研究生教学用书

教育部学位管理与研究生教育司推荐

高等激光物理学

(第二版)

Advanced Laser Physics

(Second Edition)

李福利　编著

高等教育出版社

研究生教学用书　教育部学位管理与研究生教育司推荐

ISBN 7-04-018402-8
9 787040 184020 >
定价　53.00 元

研究生教学用书

教育部学位管理与研究生教育司推荐

高等激光物理学

(第二版)

Advanced Laser Physics

(Second Edition)

李福利　编著

高等教育出版社

内容提要

本书是在作者于中国科学技术大学、清华大学、中国科学院研究生院和首都师范大学讲课使用的教材基础上修订、补充而成的，全书以麦克斯韦-布洛赫方程为主线，系统地介绍了激光物理学的基础与前沿，除哈肯和拉姆激光理论外，还重点介绍了光学双稳态、光学混沌、光学孤立子、光学压缩态、量子信息、激光冷却与玻色-爱因斯坦凝聚、慢光速与超光速、光子晶体、阿秒激光、THz辐射等。全书内容由浅入深，循序渐进，概念清晰，图像生动，具备量子力学基本知识的读者即可入门。

本书可作为光学、光电子学、物理电子学专业研究生教材，也可供信息技术、半导体、凝聚态物理的研究生、教师和科研人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等激光物理学/李福利编著. —2版. —北京：高等教育出版社，2006.7

ISBN 7-04-018402-8

Ⅰ.高… Ⅱ.李… Ⅲ.激光基础-高等学校-教材 Ⅳ.TN241

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第059296号

策划编辑 王 超 **责任编辑** 王 超 **封面设计** 李卫青
责任绘图 朱 静 **版式设计** 史新薇 **责任校对** 王 超
责任印制 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网 址**	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印 刷	北京明月印务有限责任公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开 本	787×960 1/16	**版 次**	2006年7月第2版
印 张	36.25	**印 次**	2006年7月第1次印刷
字 数	610 000	**定 价**	53.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 18402-00

第二版序言

本书自1992年初版、1995年第二次印刷，至今已十多年了，它的核心框架经受了时间的考验。

本书原是1985—1996年作者在中国科学技术大学讲课使用的研究生教材。有些兄弟院校也采用了本教材。1996年作者从中国科学技术大学调到首都师范大学物理系，随后在清华大学、中国科学院研究生院和首都师范大学为研究生同步讲授此课程。

2004年，本书被评为教育部推荐研究生教材。借再版之机，作者引用近几年发表的一些文献，汇编了6章反映新进展、新前沿的内容。这就是新增加的第22章至27章的“量子信息科学”、“激光冷却与玻色-爱因斯坦凝聚”、“慢光速与超光速”、“光子晶体”、“飞秒激光与阿秒激光”、“THz辐射技术与应用”，以及第28章最后一节的“大脑压缩态与纠缠态”。

本书尽力介绍了与激光有关的多项诺贝尔奖。在第1章中，涉及了诺贝尔奖获得者汤斯、肖洛、布隆姆贝根、凯·西格班、巴索夫、普罗霍罗夫和戈劳伯的工作。第11涉及到伽博关于全息的工作。第1章和第17章涉及到布隆姆贝根的工作。特别是第23章详细介绍了朱棣文，科恩·塔诺季，菲利普斯获1997年诺贝尔奖的工作（激光冷却）和获2001年诺贝尔奖的工作（玻色-爱因斯坦凝聚）。第13章详细介绍了格劳伯获2005年诺贝尔奖的工作。第26章介绍了霍尔和亨施获2005年诺贝尔奖的工作。此外量子信息、慢光速与超光速、光子晶体、THz辐射、阿秒激光与阿秒物理也是引人瞩目的前沿。

本书作为教材，需因时制宜、因人制宜。在1985—1996年，作者在中国科学技术大学讲授此课用80学时，可把半经典理论和全量子理论讲完，有的学生能把全书习题做完。近几年来，作者讲授此课用60学时左右，则是主要讲完半经典理论，再介绍一些专题。这次新版，为教师和学生提供了更多的选择余地。但仍需把密度矩阵、麦克斯韦-布洛赫方程作为基本内容。在此基础上，可选择孤立子、混沌等作为专题，或选择量子理论、激光冷却、量子传态等作为专题。当然，有志于从事激光物理工作的硕士生或相近专业的博士生，还是应该了解和掌握全书的内容。

在教学方法方面，作者多年来把文科的“案例教学法”引入激光物理

教学，初见成效。我们把与激光有关的诺贝尔奖及最新前沿问题作为案例，介绍和剖析相关问题的背景、问题、难点和突破口。在讲解过程中，启发同学发表意见，引导同学设想自己处于当时情境，能否提出问题，找到突破口，我们思维方式的问题出在什么地方，我们创新能力的差距在什么地方。不仅是整个课程要精选几个案例，而且每堂课也尽量提出和分析案例。这样，把课程的核心内容与科学史、人文精神、创新能力、努力方向结合起来，对同学会有触动。对调动同学学习积极性，启发学生独立思考，培养学生创新能力颇有益处。

本书的修订和补充得到了高等教育出版社的关心和支持。我的学生周斌权、沙琳、王春秀、逯美红、任荣东、王新柯等曾给予协助。清华大学、中国科学院研究生院、首都师范大学的其他研究生也提供了一些有价值的参考资料。对于书中的错误或片面之处，请专家与同学指正。

我想借此机会特别强调，激光物理学是十分有趣与活跃的研究领域，恳切希望使用本书的同学和青年科学家们，大胆创新，勇攀高峰，为国争光。

最后，我愿将自己改写的几句打油诗献给读者："日新日新又日新，今超昨日明超今。预支五百年新意，过了千年又觉陈。"

李福利

2005 年 7 月于北京花园村

初 版 前 言

本书是在作者为中国科学技术大学研究生和中国科学院代培生讲授的激光教材基础上修订而成的。

本书定稿之际，正值激光器发明 30 周年。30 年来，激光科学技术日新月异，突飞猛进，已成为 20 世纪最富成果的领域之一。

激光物理学的基本任务是研究激光及其与物质作用的基本规律。激光物理学的 3 个层次的理论分别是速率方程理论、半经典理论和全量子理论。激光物理学的 3 个学派是拉姆学派、哈肯学派和拉克斯-路易塞尔学派。

激光的速率方程理论研究激光的光强以及粒子数分布的变化。激光半经典理论研究激光的基本动力学方程及其应用，包括激光器的基本特性、光学孤立子、光学双稳态和光学混沌等。激光的全量子理论研究激光的量子统计、激光线宽以及光场的非经典效应包括光学压缩态等。

拉姆学派的理论基础是密度矩阵和密度算符，哈肯学派的理论基础是郎之万方程，拉克斯-路易塞尔学派的理论基础是福克-普朗克方程。它们都取得了巨大成功。当然，它们在本质上是等价的。

本书以麦克斯韦-布洛赫方程为主线，贯穿协同学思想，比较统一地处理了激光及其与物质作用的基本问题。该理论体系可以清晰地揭示激光速率方程、半经典理论与全量子理论之间的关系，以及 3 个学派的理论等价性。读者将会发现，一旦掌握了麦克斯韦-布洛赫方程，便有望在激光物理学的领域初试锋芒，驰骋纵横。

希望本书将以其统一性、系统性、新颖性、协同性和可读性引起读者的兴趣与共鸣。

全书采用 MKS 单位制。每章都附有习题。

由于激光物理学发展快、领域广，而作者的研究和教学经验极其有限，书中不当与错误之处，尚希激光界前辈与朋友们惠予指正。

作者深切感谢中国科学院物理所、上海光机所、安徽光机所许多专家和同行的关心和支持。在与兄弟院校专家学者的交流中也获益匪浅。

作者有机会与许多国际知名的激光物理学专家交流和讨论，并参考了他们的工作。应特别向哈肯(Haken)、阿拉克(Arecchi)、洛敦(Loudon)、斯卡利(Scully)、埃里根(Elgin)、陆加特(Lugiato)、伯特洛蒂(Berto-

lotti)、艾伯里(Eberly)和沃耳斯(Walls)等致谢。

本书部分内容得到国家科委和国家自然科学基金会的支持。

李福利

1992 年于中国科学技术大学

全书主要符号表

a	消灭算符
a^+	产生算符
α_μ	量纲为 1 的原子电偶极矩
A_{21}	自发辐射系数
A_λ	光场正频分量的慢变振幅
A_λ^*	光场负频分量的慢变振幅
B_{12}	吸收系数
B_{21}	受激辐射系数
$\boldsymbol{B}$	布洛赫矢量
$\hat{b}_s$	“准光子”消灭算符
$\hat{b}_s^+$	“准光子”产生算符
D	反转粒子数
D_c	临界反转粒子数
D_1	信息维数
D_2	关联维数
$D(\alpha)$	平移算符
$D(\nu)$	模密度
D_w	波导色散
D_m	材料色散
E_i	入射光场
E_t	透射光场
$E_\lambda^{(+)}$	第 λ 个模的光场的正频分量
$E_\lambda^{(-)}$	第 λ 个模的光场的负频分量
$\boldsymbol{F}$	光与原子电偶极矩的作用力
F_n	Fano 因子
$g_{12}^{(1)}$	一阶关联函数
$g^{(1)}(\tau)$	二阶关联函数
$g_{\mu\lambda}$	第 λ 个模的光场与第 μ 个原子的耦合常数
$g_L(\nu)$	洛伦兹线型

$g_G(\nu)$	高斯线型
G	相干函数
K	放大器的放大系数
k'	光腔损耗
k_B	玻耳兹曼常量
n	光子数
n_g	群速度折射率
n_{cl}	光纤包层的折射率
n_{co}	光纤芯层的折射率
$\boldsymbol{P}$	电子偶极矩
P_n	极化强度
$P_\lambda^{(+)}$	第 λ 个模的极化强度的正频分量
$P_\lambda^{(-)}$	第 λ 个模的极化强度的负频分量
$\hat{S}(\zeta)$	压缩算符
T_c	临界温度
t_s	自发辐射寿命
U	光与原子电偶极矩的作用势
v_g	群速度
v_p	相速度
ρ	密度矩阵
ρ_{aa}	原子在上能级几率
ρ_{bb}	原子在下能级几率
ρ_{ab}	复数电偶极矩
$\rho(\nu)$	光能密度
ρ_A	约化算符
ρ_{FA}	场与原子的密度算符
$\Delta\nu_D$	多普勒线宽
ν_D	静止原子的中心频率
γ_{ab}	电偶极矩 ρ_{ab} 的衰减
γ_{ph}	解相衰减
$\gamma_\perp$	横向弛豫参数
$\gamma_\parallel$	纵向弛豫参数
Ω_λ	腔的第 λ 个模的角频率
Ω_c	被动腔频率
Ω_R	光学布洛赫量的旋转的角频率

ω_b	拍频
ω_{CW}	连续激光器的频率
ω_r	重复频率
ω_0	偏移频率
$\bar{\omega}_\mu$	第 μ 个原子跃迁的中心频率
$\bar{\Delta}$	失谐参数
θ_{ab}	原子的电偶极矩的矩阵元
μ_0	真空磁导率
ε_0	真空介电常数
ε_r	相对介电常数
$\boldsymbol{\varepsilon}_a$	单位偏振矢量
$\varepsilon_s(r)$	晶格介质的介电常数

郑 重 声 明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话：（010）58581897/58581896/58581879

传　　真：（010）82086060

E - mail：dd@hep. com. cn

通信地址：北京市西城区德外大街4号
高等教育出版社打击盗版办公室

邮　　编：100011

购书请拨打电话：（010）58581118

目　录

全书主要符号表 …… (Ⅰ)

第 1 章　激光器的基本概念 …… (1)
1.1　激光的特性 …… (1)
1.2　受激辐射 …… (5)
1.3　光的放大 …… (7)
1.4　光的反馈 …… (11)
1.5　光的振荡 …… (14)
1.6　激光器的自组织 …… (15)
习题与思考 …… (17)
参考文献 …… (18)

第 2 章　激光器的速率方程理论 …… (19)
2.1　激光器的速率方程 …… (19)
2.2　激光器的增益饱和 …… (20)
2.3　激光器的瞬态特性 …… (22)
2.4　调 Q 激光器的速率方程 …… (23)
2.5　均匀加宽的激光器的多模振荡 …… (25)
习题与思考 …… (27)
参考文献 …… (27)

第 3 章　密度矩阵 …… (28)
3.1　激光的半经典理论概况与近似条件 …… (28)
3.2　光与二能级原子的作用 …… (30)
3.3　纯系综的密度矩阵 …… (32)
3.4　混合系综的密度矩阵 …… (35)
3.5　光学布洛赫方程 …… (37)
3.6　慢变振幅近似与旋转波近似 …… (39)
3.7　光学布洛赫方程的矢量模型 …… (42)
3.8　光学布洛赫方程的定态解 …… (44)
习题与思考 …… (46)
参考文献 …… (46)

第 4 章 麦克斯韦-布洛赫方程 …… (47)
4.1 麦克斯韦方程与场方程 …… (47)
4.2 光学布洛赫方程的简明推导 …… (48)
4.3 行波与二能级原子作用的 M-B 方程 …… (54)
4.4 谐振腔中的 M-B 方程 …… (57)
4.5 哈肯的激光方程 …… (61)
4.6 单模、均匀加宽的行波激光方程 …… (64)
4.7 归一化的宏观量的 M-B 方程 …… (66)
4.8 激光器按照动力学的分类(A,B,C 类激光器) …… (67)
习题与思考 …… (68)
参考文献 …… (68)

第 5 章 哈肯的半经典激光理论 …… (69)
5.1 激光器 M-B 方程的稳定性和阈值 …… (69)
5.2 M-B 方程的定态解 …… (71)
5.3 单模激光器的瞬态特性 …… (74)
5.4 非共振的单模激光器 …… (78)
5.5 锁模激光器 …… (80)
5.6 从半经典理论过渡到速率方程理论 …… (82)
习题与思考 …… (84)
参考文献 …… (84)

第 6 章 拉姆的半经典激光理论 …… (85)
6.1 激光器的场方程 …… (85)
6.2 增益介质的宏观极化强度的计算 …… (87)
6.3 单模激光器 …… (89)
6.4 多模激光器 …… (93)
6.5 双模激光器 …… (96)
习题与思考 …… (99)
参考文献 …… (99)

第 7 章 气体激光器 …… (101)
7.1 多普勒效应引起的非均匀加宽 …… (101)
7.2 驻波产生的烧孔效应与拉姆凹陷 …… (102)
7.3 拉姆的气体激光半经典理论 …… (105)
7.4 气体激光器的三阶极化理论 …… (109)
习题与思考 …… (110)
参考文献 …… (110)

第 8 章　瞬态相干作用 …… (111)
8.1　瞬态相干作用概念 …… (111)
8.2　瞬态相干作用的麦克斯韦-布洛赫方程 …… (112)
8.3　拉比振荡 …… (113)
8.4　光学章动 …… (116)
8.5　光子回声的机理 …… (118)
8.6　光子回声的计算 …… (120)
习题与思考 …… (124)
参考文献 …… (124)

第 9 章　光学孤立子 …… (125)
9.1　孤立子的概念 …… (125)
9.2　自感透明的定性描述 …… (126)
9.3　面积定理及其含义 …… (127)
9.4　2π 双曲正割脉冲 …… (135)
9.5　自感透明的正弦-戈登方程 …… (140)
9.6　光纤中孤立子的形成机理 …… (141)
9.7　光纤中孤立子的非线性薛定谔方程 …… (145)
9.8　光纤中孤立子的传输性质 …… (149)
9.9　非线性薛定谔方程的修正 …… (151)
9.10　光纤孤立子的增益补偿与孤立子放大器 …… (152)
9.11　光纤中孤立子的相互作用 …… (156)
9.12　孤立子激光器的实验与理论 …… (157)
9.13　暗孤立子 …… (160)
习题与思考 …… (162)
参考文献 …… (162)

第 10 章　光学双稳态 …… (164)
10.1　光学双稳态的原理 …… (164)
10.2　光学双稳态的干涉仪理论 …… (167)
10.3　光学双稳态的 M－B 方程 …… (169)
10.4　吸收双稳态与色散双稳态 …… (171)
10.5　光学双稳态的相变类比 …… (174)
10.6　起伏或噪声对光学双稳态的影响 …… (177)
10.7　光学双稳态实验 …… (179)
习题与思考 …… (181)
参考文献 …… (181)

第 11 章 位相复共轭光学 …… (183)
11.1 位相复共轭光学的概念 …… (183)
11.2 四波混频与实时全息 …… (186)
11.3 二能级系统中四波混频的半经典理论 …… (188)
11.4 透明的非线性晶体中的四波混频 …… (190)
参考文献 …… (192)

第 12 章 光学混沌与分形 …… (193)
12.1 混沌的基本概念 …… (193)
12.2 倍周期分岔 …… (194)
12.3 洛伦兹方程与奇异吸引子 …… (195)
12.4 混沌的定量标志——分形与分维 …… (200)
12.5 由一维时间序列计算奇异吸引子的关联维数 …… (206)
12.6 单模均匀加宽激光器的哈肯-洛伦兹模型 …… (210)
12.7 CO_2 激光器的混沌实验 …… (214)
12.8 非均匀加宽的单模行波激光器的混沌 …… (218)
12.9 光学双稳态的混沌 …… (220)
12.10 有延迟的光学双稳态的混沌 …… (222)
习题与思考 …… (224)
参考文献 …… (224)

第 13 章 辐射场的量子化 …… (226)
13.1 辐射场的量子化 …… (226)
13.2 光子的位相算符 …… (233)
13.3 光子数态和位相态的性质 …… (238)
13.4 相干态 …… (241)
13.5 态矢量和算符按相干态展开 …… (249)
13.6 量子化的相干函数 …… (256)
习题与思考 …… (253)
参考文献 …… (260)

第 14 章 光与物质作用的全量子理论 …… (261)
14.1 泡利算符与相互作用哈密顿量 …… (261)
14.2 二次量子化与相互作用哈密顿量 …… (268)
14.3 全量子化的麦克斯韦-布洛赫方程 …… (273)
14.4 自发辐射、受激辐射和光的吸收 …… (275)
习题与思考 …… (280)
参考文献 …… (280)

第 15 章　激光器的全量子理论 …… (281)
15.1　激光器全量子理论模型与约化算符方法 …… (281)
15.2　激光器全量子的四级微扰计算及功率特性 …… (284)
15.3　激光器全量子理论的强信号理论 …… (289)
15.4　激光的光子统计 …… (293)
15.5　激光的线宽 …… (300)
15.6　福克-普朗克方程 …… (305)
习题与思考 …… (311)
参考文献 …… (311)

第 16 章　哈肯的全量子激光理论 …… (313)
16.1　布朗运动与经典的朗之万方程 …… (313)
16.2　量子力学中的起伏与耗散 …… (318)
16.3　激光器的量子化朗之万方程 …… (323)
16.4　单模激光的朗之万方程的求解 …… (326)
16.5　福克-普朗克方程与光子统计 …… (329)
习题与思考 …… (331)
参考文献 …… (332)

第 17 章　非线性光学的量子理论 …… (333)
17.1　倍频 …… (333)
17.2　参量振荡与腔内四波混频 …… (335)
17.3　双光子激光器的半经典理论 …… (340)
17.4　双光子激光器的全量子化方程 …… (342)
17.5　双光子激光器的半经典解 …… (342)
参考文献 …… (344)

第 18 章　超荧光与超辐射 …… (345)
18.1　超荧光的概念与实验现象 …… (345)
18.2　超荧光的半经典理论 …… (349)
18.3　超荧光的全量子 M－B 方程理论 …… (351)
18.4　平均场近似下的全量子 M－B 方程 …… (354)
参考文献 …… (356)

第 19 章　共振荧光与光子反聚束 …… (357)
19.1　光的反聚束、亚泊松分布、压缩态 …… (357)
19.2　共振荧光的概念和实验 …… (362)

19.3 共振荧光谱的理论 …… (363)
19.4 单原子共振荧光的反聚束效应 …… (368)
参考文献 …… (372)

第 20 章 光学压缩态 …… (373)
20.1 光学压缩态的概念和定义 …… (373)
20.2 起伏、均方差与关联函数 …… (377)
20.3 双光子压缩态与准光子本征态 …… (380)
20.4 用位移算符与压缩算符定义的压缩态 …… (382)
20.5 光学压缩态的一般性质 …… (385)
20.6 光学压缩态与光子反聚束及亚泊松分布 …… (388)
20.7 多模压缩态与高阶压缩态 …… (390)
20.8 四波混频产生光学压缩态的实验 …… (392)
20.9 用光学参量振荡实现光学压缩态 …… (394)
20.10 压缩态的检测与应用 …… (397)
习题与思考 …… (399)
参考文献 …… (399)

第 21 章 自由电子激光器 …… (400)
21.1 自由电子激光器的构造和特点 …… (400)
21.2 自由电子激光器的自发辐射——同步辐射 …… (404)
21.3 自由电子激光放大器的增益 …… (407)
21.4 自由电子激光动力学的单电子理论 …… (413)
21.5 有锥形磁摆动器的自由电子激光器 …… (416)
21.6 自由电子激光器的全量子理论 …… (418)
21.7 自由电子激光的压缩态 …… (422)
参考文献 …… (424)

第 22 章 量子信息科学 …… (425)
22.1 量子信息 …… (425)
22.2 纠缠态 …… (426)
22.3 量子计算 …… (430)
22.4 量子网络及其应用 …… (441)
22.5 纠缠态分析的实际方法 …… (444)
22.6 用参量下转换产生偏振纠缠态的光子对 …… (447)
22.7 量子态远程传输的原理 …… (450)
22.8 量子态远程传输实验 …… (453)
习题与思考 …… (459)

参考文献 …… (460)

第 23 章　激光冷却与玻色-爱因斯坦凝聚 …… (462)
23.1　激光冷却 …… (462)
23.2　玻色-爱因斯坦凝聚 …… (466)
23.3　BEC 的实现 …… (469)
23.4　研究玻色-爱因斯坦凝聚的意义、应用 …… (470)
习题与思考 …… (474)
参考文献 …… (474)

第 24 章　慢光速与超光速 …… (475)
24.1　群速与相速的关系及其与折射色散的关系 …… (475)
24.2　三能级系统的极化率与折射率色散的计算 …… (476)
24.3　群速的慢光速与超光速实验 …… (480)
24.4　群速超光速实验现象与相对论 …… (484)
习题与思考 …… (486)
参考文献 …… (487)

第 25 章　光子晶体 …… (488)
25.1　光子晶体的概述 …… (488)
25.2　光子晶体中的场方程与布洛赫方程 …… (491)
25.3　光子晶体光纤 …… (493)
25.4　光子晶体激光器 …… (498)
25.5　光子晶体的其他应用 …… (502)
习题与思考 …… (503)
参考文献 …… (504)

第 26 章　飞秒激光与阿秒激光 …… (505)
26.1　飞秒激光 …… (505)
26.2　用飞秒锁模激光测量光的频率 …… (506)
26.3　阿秒激光的产生 …… (512)
26.4　互相关测量原理 …… (514)
26.5　单个阿秒脉冲的产生与测量 …… (516)
26.6　面临的问题与应用前景 …… (517)
习题与思考 …… (518)
参考文献 …… (518)

第 27 章 THz 辐射技术与应用 …… (519)
27.1 THz 辐射的概念与特性 …… (519)
27.2 THz 辐射的产生与探测 …… (520)
27.3 THz 辐射时域光谱技术 …… (523)
27.4 THz 辐射时域光谱实验 …… (528)
27.5 THz 辐射成像 …… (530)
27.6 隐蔽物的 THz 成像与光谱 …… (533)
27.7 展望 …… (535)
参考文献 …… (535)

第 28 章 激光与协同学 …… (536)
28.1 从激光理论到协同学 …… (536)
28.2 激光器的二级相变类比与信息的自组织 …… (537)
28.3 光学双稳态与一级相变 …… (539)
28.4 经络的自组织理论 …… (540)
28.5 大脑压缩态与纠缠态 …… (541)
28.6 大脑纠缠态 …… (547)
28.7 大脑量子信息研究展望 …… (548)
参考文献 …… (549)

附录 与激光有关的诺贝尔奖 …… (551)

索引 …… (555)

第 1 章　激光器的基本概念

本章首先用关联函数和光子统计说明激光的特性，然后介绍光的受激辐射原理及光的放大、反馈和振荡，最后用自组织概念说明激光器的振荡过程.

1.1　激光的特性

本节介绍激光器作为光频振荡器的结构特点，然后说明激光与普通光的区别.

1.1.1　激光器的构造

激光器即 Laser(light amplification by stimulated emission of radiation)，原意是利用受激辐射实现光的放大. 然而，实际上的激光器，一般不是放大器，而是振荡器，即利用受激辐射实现光的振荡，或产生相干光.

1954 年初首先实现了微波的受激放大，即 Maser(microwave amplification by stimulated emission of radiation).

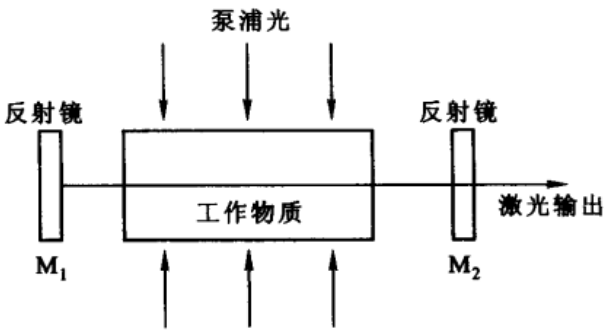


图 1.1　固体激光器示意图

1958 年，肖洛和汤斯将其原理推广到光学波段. 1960 年，梅曼制成世界上第一个激光器——红宝石激光器，图 1.1 为固体激光器的示意图.

众所周知，个性寓于共性之中，一般的振荡器总是包括能源、放大器、正反馈、谐振腔和输出等部分. 振荡器都是由噪声起振，而且起振条件(自激条件)都是

$$\beta K = 1 \tag{1.1}$$

其中 K 是放大器的放大系数，β 是正反馈系数. 与此相似，作为光学波段的振荡器，也由以上几部分组成. 在图 1.1 中，泵浦光即能源，工作物质相当于放大器，两个反射镜 M_1 和 M_2 构成谐振腔，同时起正反馈作用. 同样，激光器也是由噪声起振，起振条件也是 $\beta K=1$.

然而激光器也有其特殊性. 它是利用受激辐射原理实现光的放大，采用光学谐振腔，由自发辐射(噪声)起振.

1.1.2 激光的特性

激光是具有奇妙特性的光. 人们用不同的物理语言描述激光特性及其与普通光(热光源)的区别，例如激光有好的单色性、方向性，有很高的光子简并度，有特殊的光子统计特性等.

激光的单色性对应于时间相干性，方向性对应于空间相干性.

光子简并度是指一个模内的光子数(1.2 节)，激光的光子简并度比普通光源的光子简并度高许多个数量级.

有时还用单色亮度说明激光特性，即单位时间、单色谱线宽度、单位立体角内通过单位面积的光能. 激光的单色亮度比太阳高许多数量级.

1.1.3 光场的表示与关联函数

利用指数公式容易导出光场的复数形式.

$$\begin{aligned}E(r,t)&=E_0\sin(kr-\omega t)\\&=\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}E_0\right)\exp(\mathrm{i}kr-\mathrm{i}\omega t)+\left(\frac{\mathrm{i}}{2}E_0\right)\exp(-\mathrm{i}kr+\mathrm{i}\omega t)\\&=\mathscr{E}(a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t+\mathrm{i}kr}-a^{+}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t-\mathrm{i}kr})\end{aligned}\tag{1.2}$$

$$\mathscr{E}\equiv\mathrm{i}\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}}\tag{1.3}$$

其中 $(-\mathrm{i}/2)E_0=\mathscr{E}a$. 光场中随 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ 变化的部分称为正频分量，随 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ 变化的部分称为负频分量，通常分别记为 $E^{(+)}(r,t)$ 和 $E^{(-)}(r,t)$，

$$E(r,t)=E^{(+)}(r,t)+E^{(-)}(r,t)\tag{1.4}$$

在(1.2)和(1.4)式中，$a^{+}=a^{*}$，$E^{(+)}=E^{(-)*}$.

若把(1.2)式中的 a 和 a^{+} 理解为复数，它就是经典光场. 若 a 和 a^{+} 为算符，且满足如下的对易关系：

$$[a,a^{+}]=aa^{+}-a^{+}a=1\tag{1.5}$$

它就是量子化的光场. 光子数算符 $\hat{n}=aa^{+}$，$\mathscr{E}$ 即代表一个光子的光场(详见第 13 章).

光场的相干性由相干函数表示：

$$G(1,2)=\langle E^{(-)}(r_1,t_1)E^{(+)}(r_2,t_2)\rangle \tag{1.6}$$

若 $t_1=t_2$，上式表示空间的相干性；若 $r_1=r_2$，则表示时间相干性. 式中的 $\langle\cdots\rangle$ 在经典光场中表示对时间求平均；在量子理论中是量子力学平均.

2005 年诺贝尔物理学奖获得者格劳伯把一阶关联函数 $g_{12}^{(1)}$ 定义为

$$g_{12}^{(1)}=\frac{\langle E^{(-)}(r_1,t_1)E^{(+)}(r_2,t_2)\rangle}{(\langle E^{(-)}(r_1,t_1)E^{(+)}(r_1,t_1)E^{(-)}(r_2,t_2)E^{(+)}(r_2,t_2)\rangle)^{1/2}} \tag{1.7}$$

当 $r_1=r_2$ 时的关联函数称为自关联函数，

$$g^{(1)}(\tau)=\frac{\langle E^{(-)}(t)E^{(+)}(t+\tau)\rangle}{\langle E^{(-)}(t)E^{(+)}(t)\rangle} \tag{1.8}$$

同样可定义二阶关联函数和二阶的自关联函数. 二阶自关联函数（以后也称二阶关联函数）

$$g^{(2)}(\tau)=\frac{\langle E^{(-)}(t)E^{(-)}(t+\tau)E^{(+)}(t+\tau)E^{(+)}(t)\rangle}{\langle E^{(-)}(t)E^{(+)}(t+\tau)\rangle^2} \tag{1.9}$$

二阶关联函数可以反映光场的根本性质. 图 1.2 表示激光与普通光二阶关联函数的区别或者激光与蜡烛光的根本差别. 激光的 $g^{(2)}(\tau)\approx1$，而普通光（热光源）的 $g^{(2)}(\tau)$ 随 τ 迅速地从 2 衰减到 1. 以后我们还会看到混沌激光与反聚束的光的 $g^{(2)}(\tau)$ 也各有特征.

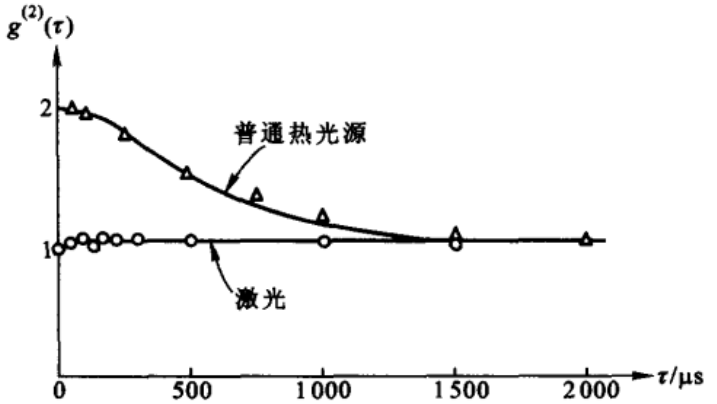


图 1.2 激光与普通光的二阶关联函数

理想的激光近似为单色光 $e^{-i\omega t}$，读者可以证明单色光的 $g^{(2)}(\tau)=1$.

1.1.4 激光的光子统计特性

由热力学和统计物理学可以知道，普通的光源的光子是玻色分布的.

$$p_n=(1-e^{-x})e^{-nx} \tag{1.10}$$

其中 n 是光子数目，$x=\hbar\omega/(kT)$. 容易计算

$$\langle n\rangle=\sum_n np_n=(1-e^{-x})\sum_n ne^{-nx}$$

$$=-(1-e^{-x})\frac{d}{dx}\sum_n e^{-nx} \tag{1.11}$$

利用级数公式,进一步得到

$$\langle n\rangle=\frac{1}{e^x-1}=\bar{n} \tag{1.12}$$

$$\langle n^2\rangle=\sum_n n^2p_n=(1-e^{-x})\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{1-e^{-x}}\right)$$

$$=\frac{1}{e^x-1}+2\frac{1}{(e^x-1)^2} \tag{1.13}$$

利用(1.12)式,则

$$\langle n^2\rangle=\langle n\rangle+2\langle n\rangle^2 \tag{1.14}$$

以后在激光的全量子理论中将证明,理想的激光是泊松分布.即

$$\rho_m=\frac{e^{-\langle n\rangle}\langle n\rangle^n}{n!} \tag{1.15}$$

令其中 $\langle n\rangle=x$,则

$$\langle n\rangle=\sum_n n\rho_m=\sum n\frac{e^{-x}x^n}{n!}$$

$$=e^{-x}\sum_n x\frac{d}{dx}\left(\frac{x^n}{n!}\right)=x=\langle n\rangle \tag{1.16}$$

$$\langle n^2\rangle=\sum_n n^2\rho_m=\sum_n n^2\frac{e^{-x}x^n}{n!}$$

$$=e^{-x}\sum_n x\frac{d}{dx}\left[x\frac{d}{dx}\left(\frac{x^n}{n!}\right)\right] \tag{1.17}$$

利用导数公式并注意这里 $x=\langle n\rangle$,则

$$\langle n^2\rangle=xe^{-x}\frac{d}{dx}(xe^x)$$

$$=x+x^2=\langle n\rangle+\langle n\rangle^2 \tag{1.18}$$

定义均方差

$$\langle(\Delta n)^2\rangle\equiv\langle n^2\rangle-\langle n\rangle^2 \tag{1.19}$$

利用(1.14)式和(1.18)式,显然有

$$\langle(\Delta n)^2\rangle=\begin{cases}\langle n\rangle+\langle n\rangle^2, & \text{普通光源}\\ \langle n\rangle, & \text{理想激光}\end{cases} \tag{1.20}$$

或用哈肯的符号

$$H\equiv\frac{\langle n^2\rangle-\langle n\rangle}{\langle n\rangle^2}-1=\begin{cases}1, & \text{普通光源}\\ 0, & \text{理想激光}\end{cases} \tag{1.21}$$

图 1.3 表示激光与普通光的光子统计的区别. 以后还会讲到亚泊松分布的光.

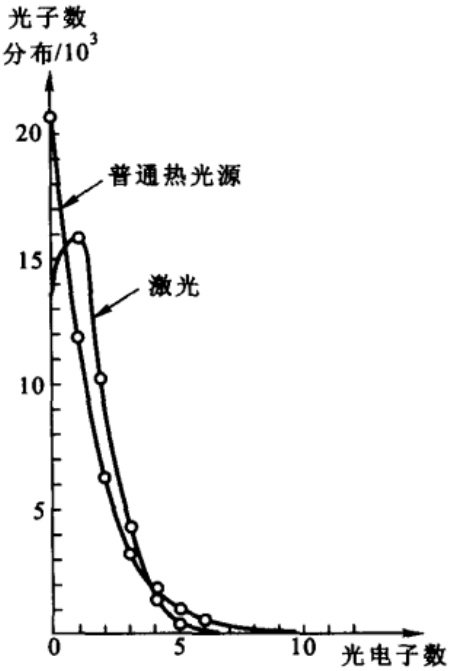


图 1.3 激光与普通光的光子统计的区别

总之,本节介绍的光场的表示式贯穿全书,而且隐含着半经典与全量子的激光理论的区别和联系. 而二阶关联函数与光子统计问题,可以说是研究光场根本性质的"试金石",也是全书研究的核心问题之一.

1.2 受 激 辐 射

激光的性质源于它是受激辐射. 早在 1917 年爱因斯坦就提出了受激辐射概念,从这种意义上说,爱因斯坦是激光理论的鼻祖.

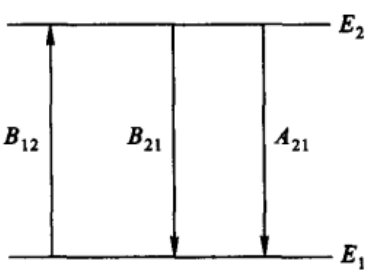


图 1.4 光的吸收、自发辐射和受激辐射

爱因斯坦研究了图 1.4 所示的吸收、自发辐射和受激辐射过程. 设 N_2 和 N_1 分别是上、下能级的原子(或分子,都简称粒子)数目,三种过程的跃迁速率分别为 $N_1B_{12}\rho(\nu)$, N_2A_{21} 和 $N_2B_{21}\rho(\nu)$, $\rho(\nu)$ 是光能密度. 在动态平衡时

$$N_1B_{12}\rho(\nu)=N_2B_{21}\rho(\nu)+N_2A_{21} \tag{1.22}$$

$$\rho(\nu)=\frac{A_{21}}{B_{21}}\frac{1}{(N_1B_{12}/(N_2B_{21})-1)}$$

$$=\frac{A_{21}}{B_{21}}\frac{1}{\frac{B_{12}}{B_{21}}e^{h\nu/kT}-1} \tag{1.23}$$

其中用到 $N_1/N_2=\exp(h\nu/kT)$，当 $T\to\infty$ 时，应有 $\rho(\nu)\to\infty$ 故有

$$B_{12}=B_{21}=B \tag{1.24}$$

当 $h\nu\ll kT$ 时，(1.23)式变为

$$\rho(\nu)=kTA_{21}/(Bh\nu) \tag{1.25}$$

然而，由瑞利-金斯公式可知 $h\nu\ll kT$ 时

$$\rho(\nu)=(8\pi/c^3)\nu^2kT \tag{1.26}$$

令(1.25)式与(1.26)式相等，则有

$$\frac{A_{21}}{B_{21}}=\frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \tag{1.27}$$

这样便得到爱因斯坦自发辐射系数 A_{21}、吸收系数 B_{12} 和受激辐射系数 B_{21} 的著名关系式.

将(1.24)和(1.27)式代回(1.23)式，则有

$$\rho(\nu)\mathrm{d}\nu=\frac{8\pi\nu^2}{c^3}\mathrm{d}\nu h\nu\frac{1}{e^{h\nu/kT}-1} \tag{1.28}$$

其中 $\frac{8\pi\nu^2}{c^3}\mathrm{d}\nu=D(\nu)\mathrm{d}\nu$ 是在 $\nu\to\nu+\mathrm{d}\nu$ 内的模数，$D(\nu)$ 是模密度，$h\nu=E$ 是一个光子能量，$\frac{1}{e^{h\nu/kT}-1}$ 为光子简并度 $\bar{n}$，有

$$\bar{n}=\frac{1}{e^{h\nu/kT}-1} \tag{1.29}$$

由(1.27)式和模密度 $D(\nu)=\frac{8\pi\nu^2}{c^3}$，则有

$$B_{21}=\frac{A_{21}}{D(\nu)h\nu} \tag{1.30}$$

$$B_{21}\rho(\nu)=\bar{n}A_{21} \tag{1.31}$$

以后在激光全量子理论中将证明二能级 $E_2\to E_1$ 的总的跃迁几率正比于 $(n+1)$，n 是光子数. 其中与 n 成正比的项代表受激辐射，而与 n 无关的项代表自发辐射，即 $n=1$ 时，受激辐射与自发辐射几率相等. 这与(1.31)式的含义一样.

由以上介绍的辐射理论可知：

(1) 光与二能级原子发生共振作用时，有吸收、自发辐射和受激辐射三种过程.

(2) 由于 $B_{12}=B_{21}$，而通常 $N_1>N_2$，所以通常光的吸收远超过受激辐射. 当 $N_2>N_1$ 时，则受激辐射超过吸收，$N_2>N_1$ 称为粒子数反转.

(3) 由(1.30)式可知模数目越少，越有利于使受激辐射超过自发辐射.

(4) 光子简并度 $\bar{n}$. 受激辐射与自发辐射速率之比(见 1.31 式)为 $\bar{n}$. 为使受激辐射超过自发辐射，必须使 $\bar{n}>1$.

(5) 在光学波段，例如 $\nu=10^{15}$ Hz，$T=10^3$ K，由(1.29)式得到 $\bar{n}\approx 5\times10^{-3}$，故普通光源(热光源)中的受激辐射可忽略，而以自发辐射为主. 但在微波波段，$\bar{n}$ 却比较大，故以受激辐射为主.

(6) 由(1.27)式可知 $A_{21}\propto\nu^3$，频率越高则自发辐射越强，实现激光越困难. 这是 X 射线和 γ 射线激光器的重要困难.

以下几节将说明怎样使 $N_2>N_1$；怎样用光学谐振腔减少模密度 $D(\nu)$；怎样由受激辐射和腔的正反馈使 $\bar{n}$ 增加.

1.3 光的放大

为了在光学波段产生受激辐射，一个必要条件是粒子数反转. 本节简单介绍实现粒子数反转的方法以及增益公式.

1.3.1 粒子数反转

由于爱因斯坦受激辐射系数等于吸收系数，即 $B_{21}=B_{12}$，为使受激辐射超过吸收，要求，

$$N_2>N_1 \tag{1.32}$$

若能级 E_1 和 E_2 简并度分别为 g_1 和 g_2，上式变为

$$N_2>\frac{g_2}{g_1}N_1 \tag{1.33}$$

由于在热平衡时总是 $N_2<N_1$，因此把 $N_2>N_1$ 的状态称为粒子数反转(population iversion)或负温度态. 由此可知激光器是远离平衡态的系统.

实现粒子数反转的典型方法有光泵和气体放电等. 图 1.5 是在红宝石激光器中使 Cr^{3+} 实现粒子数反转的示意图. 红宝石主要成分是 Al_2O_3，掺杂约 0.05% 的 Cr_2O_3，其中的 Cr^{3+} 称为活性粒子. 用闪光灯的光照射时，Cr^{3+} 被激发到吸收带 E_3，然后通过无辐射跃迁迅速转移到 E_2. 当光泵足够强时就在 E_2 和 E_1 间形成粒子数反转. 由于 Cr^{3+} 从激发态转移到 E_2 的速率远大于返回 E_1 的速率，$w_{32}\approx2\times10^7\ s^{-1}$，$w_{31}\approx2\times$

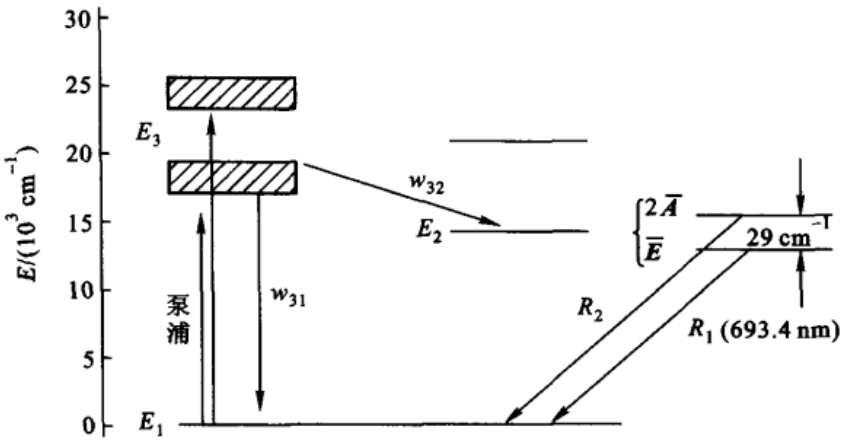


图 1.5 红宝石激光的能级与粒子数反转

$10^5\ \mathrm{s}^{-1}$使得 $N_3\approx 0$. 接近粒子数反转时 $N_2\approx N_1$，这时受激辐射速率 $N_2B_{21}\rho(\nu)$与自发辐射速率 N_2A_{21}接近. 为使 $N_2>N_1$，要求

$$W_{13}>A_{21} \tag{1.34}$$

其中 $W_{13}\equiv B_{13}\rho(\nu)$，其中 B_{13}是三能级系统中，从第一能级到第三能级的爱因斯坦吸收系数，此处用到了 $N_1\approx N_2$.

对于四能级泵浦系统(例如钕玻璃激光器与掺钕的钇铝石榴石激光器)，E_1和 E_4分别是基态和吸收带，光泵作用在 E_3与 E_2间形成粒子数反转. 因 $\Delta E=E_2-E_1\gg kT$，$N_1\approx 0$. 又由于从 E_4到 E_3的转移速率 w_{43}很快，$N_4\approx 0$. 因此，为了在 E_3上积累粒子数，要求 $N_1W_{14}>N_3A_{32}$.

常见的氦-氖激光器是利用 He－Ne 管中的气体放电. 电子把 He 原子激发到亚稳态，He 与 Ne 碰撞，使激发能量从 He 转移到 Ne(共振转移)，使得 Ne 原子在特定能级之间形成粒子数反转. 此外还有用化学反应实现粒子数反转的化学激光器，用注入电流方法的半导体激光器等.

一般说，为了在两个能级间形成粒子数反转，其上能级应是亚稳态，即能级寿命长，有利于在该能级上积累粒子数.

1.3.2 光的放大增益

一旦形成了粒子数反转，便可能实现光的放大. 由于受激辐射产生的光与入射的光子一样，而自发辐射是噪声，所以计算放大增益时只考虑受激辐射.

设入射光能密度为 $\rho(\nu)$，光强为 $I=\rho(\nu)c$，$h\nu=E_2-E_1$，E_2与 E_1 间形成了粒子数反转，上、下能级粒子数分别为 N_2和 N_1，则在单位时间单位体积内产生的粒子数增加为

$$\frac{dn}{dt}=(N_2-N_1)B_{21}\rho(\nu) \tag{1.35}$$

利用 $\rho(\nu)=nh\nu$, $I=\rho(\nu)c$, $dz=cdt$, 则有

$$\frac{dI}{dz}=\frac{1}{c}I(N_2-N_1)B_{21}h\nu \tag{1.36}$$

因此对于光强放大的增益为

$$G'=\frac{1}{I}\frac{dI}{dz}=\frac{1}{c}(N_2-N_1)B_{21}h\nu \tag{1.37}$$

这就是普罗霍罗夫在 1964 年诺贝尔物理学奖金仪式上报告的主要公式. 显然, 光场的增益为 $G=G'/2$.

1.3.3 谱线的线型

考虑到 $E_2\rightarrow E_1$ 跃迁谱线的线型 $g(\nu)$, 即谱线强度随 ν 分布的归一化的函数, 则应有

$$\frac{dI}{dz}=(N_2-N_1)\int h\nu' B_{21}\rho(\nu')g(\nu')d\nu'$$

对激光技术最重要的情况是 $\rho(\nu')=\rho(\nu)\delta(\nu'-\nu)$, 即单色光. 代入上式并利用 $B_{21}=A_{21}c^3/(8\pi h\nu^3)$, 则

$$G'=(N_2-N_1)\frac{c^2}{8\pi\nu^2}A_{21}g(\nu) \tag{1.38}$$

有时利用受激辐射截面 σ

$$\sigma=G'/(N_2-N_1)=\frac{c^2}{8\pi\nu^2}A_{21}g(\nu) \tag{1.39}$$

这样, 受激放大引起的光强与光子数变化为

$$\left.\begin{aligned}\frac{dI}{dz}&=I(N_2-N_1)\sigma\\ \frac{dn}{dz}&=n(N_2-N_1)\sigma\end{aligned}\right\} \tag{1.40}$$

光子数随时间变化为

$$\frac{dn}{dt}=c\frac{dn}{dz}=(N_2-N_1)(\sigma c)n\equiv WDn \tag{1.41}$$

其中受激辐射速率 W 和反转粒子数 D 分别为

$$W=\sigma c=\frac{c^3}{8\pi\nu^2}A_{21}g(\nu) \tag{1.42}$$

$$D=N_2-N_1$$

图 1.6 代表两种典型的线型: 均匀加宽的线型(图 1.6(a))和非均匀加宽的线型(图 1.6(b)). 均匀加宽的特点是每个原子的辐射频率和线型

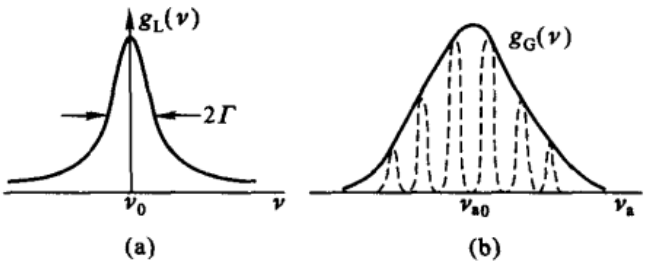


图 1.6 两种典型的谱线线型

(a)均匀加宽 (b)非均匀加宽

一样. 由于原子发光时的辐射阻尼或激发态衰减引起的加宽,以及原子之间的碰撞引起的谱线加宽都是均匀加宽,线型为洛伦兹函数.

非均匀加宽的特点是各个原子的辐射频率和线型不同,整个谱线是各个原子线型的包络. 例如气体原子运动速度不同,由于多普勒效应,使得我们接收到的辐射频率不同,这样使整个谱线展宽了,故称为多普勒加宽. 这是非均匀加宽的最重要机制. 每个原子辐射时都有自己的中心频率和线型,其线型仍是洛伦兹线型. 而气体中许多原子的辐射的总的线型则是这些"小的洛伦兹线型"的包络. 该包络线是高斯函数,故称为高斯线型.

洛伦兹线型和高斯线型分别为 $g_L(\nu)$ 和 $g_G(\nu)$:

$$g_L(\nu)=\frac{\Delta\nu}{2\pi}\frac{1}{(\nu-\nu_0)^2+(\Delta\nu/2)^2} \tag{1.43}$$

$$g_G(\nu)=\frac{2\sqrt{\ln 2}}{\Delta\nu_D\sqrt{\pi}}\exp\left[-\left(\frac{\nu-\nu_0}{\Delta\nu_D}\right)^2 4\ln 2\right] \tag{1.44}$$

$$\Delta\nu_D=7.162\times10^{-7}\left(\frac{T}{m}\right)^{1/2}\nu_0 \tag{1.45}$$

这里 $\Delta\nu_D$是多普勒线宽,ν_D是静止原子的中心频率,m 是原子量,T 是热力学温度. 在典型情况下,He - Ne 激光器的 Ne 原子 $m\approx20$,$T\approx300$ K,$\lambda_0\approx632.8$ nm,则 $\Delta\nu_D\approx1.7\times10^3$ MHz. CO_2 激光器的 CO_2 分子的$m\approx44$,$T\approx300$ K,$\lambda_0\approx10.6$ μm,$\Delta\nu_D\approx53$ MHz.

显然,在中心频率 $\nu=\nu_0$,有

$$\left.\begin{aligned} g(\nu_0)&=\frac{2}{\pi\Delta\nu},(\text{洛伦兹线型})\\ g(\nu_0)&=\frac{2(\ln 2)^{1/2}}{\sqrt{\pi}\Delta\nu_D},(\text{高斯线型}) \end{aligned}\right\} \tag{1.46}$$

代入(1.38)式则得到中心频率的增益

$$\left.\begin{aligned} G' &= \left(N_2 - N_1 \frac{g_2}{g_1}\right)\frac{c^2}{4\pi^2\nu^2\Delta\nu t_s}, \text{(洛伦兹线型)} \\ G' &= \left(N_2 - N_1 \frac{g_2}{g_1}\right)\frac{c^2}{4\pi^2\nu^2\Delta\nu_D t_s}\sqrt{\pi \ln 2}, \text{(高斯线型)} \end{aligned}\right\} \quad (1.47)$$

其中自发辐射寿命 $t_s = 1/A$，式中考虑了简并度，显而易见，$\left(N_2 - N_1 \frac{g_2}{g_1}\right)$ 越大、$\Delta\nu$ 或 $\Delta\nu_D$ 越小，则增益越高.

1.4 光的反馈

谐振腔是激光器核心部分之一，它起正反馈、谐振和容纳工作物质和输出激光的作用.

1.4.1 开式腔

由辐射理论已知，模数越少，越有利于受激辐射(见 1.30 式)，越有利于提高光子简并度 $\bar{n}$，越有利于使受激辐射超过自发辐射(见 1.31 式). 可是，取光学波段的典型值 $\nu \approx 3\times10^{14}$ Hz，$\Delta\nu \approx 1.5\times10^{8}$ Hz，若体积 $V = 1$ cm^3，由式(1.28)第一个因子，

$$D(\nu)V\Delta\nu \approx 10^7 \quad (1.48)$$

显然模数太多. 若减小腔的体积 V 到 10^{-7} cm^3，可能只有一个或数个模，但是不但加工困难，也不可能容纳足够的工作物质. 因此，腔的问题曾经似乎是不可逾越的障碍. 然而在 1958 年，狄克、普罗霍洛夫、肖洛和汤斯等，分别建议用当时光学教科书中熟知的法布里-珀罗干涉仪，或简单的两个平行反射镜作为光学谐振腔. 这种腔的侧面是开放的，称为开式腔. 它使模数大大减少，而且用反射镜的反射即可实现正反馈，可谓“一箭双雕”.

例如两平行平面间距为 L，反射镜横向尺寸很小，驻波条件为

$$L = q\frac{\lambda_q}{2} \quad (1.49)$$

λ_q 是第 q 个模的波长，相应的频率为 $\nu_q = qc/(2\lambda)$，相邻的两个模的频率间隔为

$$\Delta\nu_q = \nu_{q+1} - \nu_q = \frac{c}{2L} \quad (1.50)$$

对氦-氖激光器，取 $L = 20$ cm　$\Delta\nu_q \approx 1\,700$ MHz，由(1.50)式有 $\Delta\nu_q = 750$ MHz. 这样在线宽 $\Delta\nu_q$ 内只允许有一个模.

1.4.2 腔的损耗、Q 值、寿命

若两个反射镜的反射率为 $R_1 \approx R_2 \approx R$，单程时间为 L/c，则平均单位时间内的光强损耗(耗散)

$$\kappa' = c(1-R)/L \tag{1.51}$$

且有

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = -\kappa' n$$

$$n = n_0 \mathrm{e}^{-\kappa' t} \equiv n_0 \mathrm{e}^{-t/t_c}$$

其中 t_c 称为腔的寿命，

$$t_c = 1/\kappa' = L/[c(1-R)] \tag{1.52}$$

谐振腔的 Q 值为

$$Q = \omega t_c \tag{1.53}$$

$$\kappa' = \omega/Q \tag{1.54}$$

腔内不放工作物质(即被动式)时，衰减导致线宽

$$\Delta\omega_c = 1/t_c = \omega/Q \tag{1.55}$$

在激光理论中也经常用光场的损耗 κ，

$$\kappa = \kappa'/2 = \omega/(2Q) \tag{1.56}$$

1.4.3 光场按腔的模展开

沿腔的轴向的一种驻波就称为一个模. 第 n 个纵模的驻波为

$$U_n(z) = \sin k_n/z \tag{1.57}$$

$$k_n = 2\pi/\lambda_n \tag{1.58}$$

λ_n 是第 n 个纵模的波长，k_n 是该纵模的波数. 由于 $U_n(z)$ 是正交函数，所以光场 $E(z,t)$ 可按照 $U_n(z)$ 展开，即

$$E(z,t) = \frac{1}{2}\sum_n E_n(t)U_n(z) + \text{c. c.} \tag{1.59}$$

其中 c. c. 是复共轭，$E_n(t)$ 是第 n 个纵模的复数振幅. 这是激光物理中常用的展开式.

1.4.4 腔的横模

光场在腔内的横向分布称为横模. 一种分布形式就叫一个横模.

考虑两个曲面镜构成的腔. 光在两镜面间来回反射，光波的等相位面逐渐接近镜面的曲率半径. 当光波的等相位面与镜面的曲率半径相等时，则光场的横向分布就不再变化. 这种稳定的横向分布称为横模.

求光场的空间分布，本质上是衍射问题. 设光场在镜面 M_1 上的分布为 $u_1(x_1,y_1)$，由基尔霍夫方程可知在镜面 M_2 上的分布

$$u_2(x_2,y_2)=\frac{ik}{4\pi}\int_{s_1}u_1(x_1,y_1)\frac{e^{-ik\rho}}{\rho}(1+\cos\theta_1)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1 \tag{1.60}$$

其中 ρ 是两个镜面上 (x_1,y_1) 与 (x_2,y_2) 两点间的距离，θ_1 是 ρ 与镜面法线之夹角，k 是波数. 当光场稳定即再生(self-reproducing)时，则

$$u_2(x_2,y_2)=\gamma u_1(x_1,y_1) \tag{1.61}$$

实际计算时，假定光场在 M_1 上有任意分布，利用(1.60)式反复迭代，迭代到一定程度，相邻两次迭代的光场分布形式(即在 M_1 和 M_2 上的分布)便基本上不变，如(1.61)式.

若两个镜的曲率半径相等、焦点重合，且腔长等于它们的曲率半径，即称为共焦腔. 若 M_1 和 M_2 为方形，且菲涅尔数较大，(1.60)的积分限为无穷大，该方程的解是

$$u_m(x)u_n(y)=H_m\left(\frac{\sqrt{2}}{W_s}x\right)H_n\left(\frac{\sqrt{2}}{W_s}\right)e^{-(x^2+y^2)/W_s^2} \tag{1.62}$$

H_m和 H_n是厄米多项式，$W_s=(\lambda L/\pi)^{1/2}$. 这就是光场在镜面上沿 x 和 y 的分布. $m=n=0$ 的横模称为基模即 TEM_{00}，它是高斯分布

$$u_0(x)u_0(y)=\exp[-(x^2+y^2)/W_s^2] \tag{1.63}$$

W_s即在镜面上的光斑大小. 此式与镜面的大小无关，与方形、圆形镜面也无关，故可适用于圆形的镜面的共焦腔.

还可以计算出共焦腔内外任意位置的光场

$$u_m(x,z)u_n(y,z)=\frac{\lambda L}{\pi W_s^2}H_m\left(\frac{\sqrt{2}}{W_s}x\right)H_n\left(\frac{\sqrt{2}}{W_s}\right)\cdot\exp[-(x^2+y^2)/W_s^2]\cdot$$
$$\exp[-i(x^2+y^2)/2R]\exp[-i\Phi] \tag{1.64}$$

其中 L 是腔长，z 是从腔中心算起的轴向距离，$W_s(z)$ 是 z 处的光斑大小，$R(z)$ 是在 z 处的光场等相位面的曲率半径，$\Phi(z)$ 是从 $z=0$ 到 z 处的光场传播的相位移动，

$$W_s(z)=\left(\frac{\lambda}{2\pi}\frac{L^2+4z^2}{L}\right)^{1/2} \tag{1.65}$$

$$R(z)=(L_1^2+4z^2)/(4z) \tag{1.66}$$

$$\Phi(z)=kz-(m+n+1)\arctan(\lambda z/(\pi W_0^2)) \tag{1.67}$$

W_0是腔中心处的光斑. 若(1.65)式可求出远场 $(z\gg L)$ 时的光束发散角

$$\theta=2\lim_{z\to\infty}(W_s(z)/z)=2\sqrt{\frac{2\lambda}{\pi L}} \tag{1.68}$$

谐振条件要求光场在腔内往返一次的相位移动是 2π 的整数倍，或单程的相位为 $q\pi$，

$$\Phi(z_2)-\Phi(z_1)=q\pi \tag{1.69}$$

$$\nu_{mnq}=\frac{c}{2L}[q+(m+n+1)/2] \tag{1.70}$$

ν_{mnq}即共焦腔的谐振频率，由(1.69)和(1.67)式得到. 这样由 m,n,q 表征光场分布和谐振频率，故腔的模写为 TEM_{mnq}. 显然由(1.70)式可知，这时相邻的两个纵模间隔仍为 $c/(2L)$，

$$\nu_{mn(q+1)}-\nu_{mnq}=c/(2L) \tag{1.71}$$

本书讨论的基本问题均未涉及激光的光场的横向分布，但容易推广而顾及横向分布.

1.5 光的振荡

有了光的放大器和光学谐振腔，便可实现光的振荡，即产生激光.

1.5.1 激光器的自激条件

参照图 1.1，令其中工作物质增益为 G'，镜 M_1 和 M_2 的反射率为 R_1 和 R_2. 为了简化，令工作物质长度等于腔长，即 $l=L$.

假设在镜面 M_1 处一束光强为 I_0 的光沿轴向从左向右传播. 它经放大器，到达镜面 M_2 时的光强为

$$I_1=I_0\exp[(G'-\alpha_i)L] \tag{1.72}$$

其中 α_i 是腔内的损耗，经 M_2 反射后，光强变为 R_2I_1. 它由右向左再次通过放大器到 M_1，光强

$$I_2=R_2I_0\exp[2(G'-\alpha_i)L] \tag{1.73}$$

经过 M_1 反射，光强为

$$I_3=R_1R_2I_0\exp[2(G'-\alpha_i)L] \tag{1.74}$$

为了实现振荡，要求 $I_3\geqslant I_0$，即

$$R_1R_2I_0\exp[2(G'-\alpha_i)]L\geqslant 1 \tag{1.75}$$

上式取等式即为自激条件. 考虑到光的正反馈系数 $\beta=R_1R_2$，放大系数 $K=\exp[2(G'-\alpha_i)L]$，故

$$\beta K=1 \tag{1.76}$$

与(1.1)式相同.

1.5.2 激光器的阈值

令(1.75)式取等号，则

$$G'=\frac{1}{2L}\ln\left(\frac{1}{R_1R_2}\right)+\alpha_i\equiv\kappa' \tag{1.77}$$

当 $R_1=R_2=R\approx1$ 时，$-\ln R\approx R-1$ 上式变为

$$G'=(1-R)/L+\alpha_i\equiv\kappa' \tag{1.78}$$

即激光器的临界条件的意义是增益等于损耗.

将 G' 的公式(1.47)代入上式，得到临界反转粒子数 D_c，且有

$$D_c=\left(N_2-N_1\frac{g_2}{g_1}\right)_c=\frac{4\pi^2\nu^2\Delta\nu t_s}{c}\left(\alpha_i+\frac{1-R}{L}\right) \tag{1.79}$$

D_c 又称为激光器的阈值. 显然，ν 越低，$\Delta\nu$ 越小，损耗 κ' 越小，则阈值越低.

1.5.3 汤斯的阈值公式

假定激光器的振荡的模数目为 $p(\nu)=8\pi\nu^2\Delta\nu/c^3$，则一个模内的自发辐射速率为

$$A_{21}/p(\nu)=1/t_s p(\nu) \tag{1.80}$$

当一个模内只有一个光子时，受激辐射速率等于自发辐射速率，即(1.80)式.

若反转粒子数为 $D=(N_2-N_1)$，则单位时间内光子数的增加为

$$\frac{dn}{dt}=(N_2-N_1)\frac{1}{p(\nu)t_s} \tag{1.81}$$

而该模内只有一个光子，故光子数损耗为 $1/t_c$（t_c 是腔的寿命）. 阈值条件要求光子数的增加率等于损耗率，即

$$(N_2-N_1)\frac{1}{p(\nu)t_s}=\frac{1}{t_c} \tag{1.82}$$

因此得到阈值

$$D_c=(N_2-N_1)=p(\nu)\frac{t_s}{t_c} \tag{1.83}$$

即模数越少，腔寿命越长则阈值越低. 这就是著名的汤斯阈值公式.

一旦超过阈值，激光器便输出激光. 以后各章将研究激光随时间变化的规律、激光的频率特性、多模的合作与竞争、激光的线宽与统计性质以及激光与物质作用的规律.

1.6 激光器的自组织

本节用自组织概念分析激光器振荡过程.

1.6.1 从无序到有序的远离平衡态的相变

首先再次强调激光器是远离平衡态的开放系统，它在临界点发生从

无到有的相变.

回想平衡态的二能级相变的例子，铁磁材料的临界温度为 T_c. 当温度 $T>T_c$ 时，磁矩排列是混乱的. $T<T_c$ 时，磁矩排列是有序的. T_c 是临界点，$T>T_c$，磁化强度为 $M=0$，$T<T_c$，$M\neq 0$. 超导体的临界温度 T_c 也是临界点. 激光器的阈值 D_c 就是临界点. 反转粒子数 $D<D_c$ 时，激光器发的光是无序的(与普通光源没什么区别)；$D>D_c$ 时，产生激光，是有序的. 可以证明激光光场 $E\propto\sqrt{D-D_c}$，见图 1.7，这表明非平衡态相变与平衡态相变形式上相似.

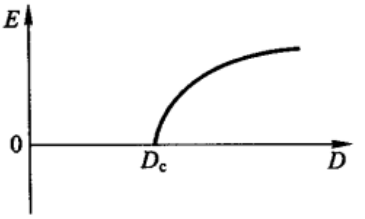


图 1.7 激光的光场随 D 的变化

1.6.2 起伏是有序之源

前已指出，所有的振荡器均是噪声起振. 激光器也是噪声(自发辐射)起振，自发辐射的机理只有全量子理论才能解释. 他实际上是起伏或涨落.

自发辐射本来是相位混乱的，每个原子在什么时候发生自发跃迁都是随机的. 然而偏离轴向的自发辐射能很快逸出腔外，沿轴向的自发辐射能引起雪崩式的受激放大. 经过往返多次放大过程以及腔对方向性和频率性的选择限制作用，光的方向性、单色性越来越好. 光的强度也远超过普通的自发辐射的光强. 因此，1977 年诺贝尔化学奖获得者普里高津精辟地指出“起伏是有序之源”. 同时我们看到，从无序到有序总是需要一个过程.

1.6.3 自组织

激光器从无序到产生有序的激光，是自组织的结果.

激光器超过阈值时，光在腔内来回反射，由于特定频率(即在原子线型中心附近又满足谐振条件)、特定方向与横向分布(能形成稳定的光场分布)，才能最有效地被放大. 不同频率和方向的辐射的竞争，是不同模式的竞争. 一旦某个模式开始占优势，就会强迫更多的原子按该模式发生受激辐射，该模式的光场就更占优势. 而其他的模的光场则可能受到抑制. 这样，大量原子便由混乱的无规则的自发辐射变为按确定的位相、方向、频率的相干辐射.

特别强调指出，一旦激光器内的反转粒子数 D 超过临界值 D_c，就会发生上述的有序化的过程. 这是激光器内部过程发展的必然结果，而不是

靠外部的“命名”.这是系统在特定条件下的自组织结果.

例如一个班的大学生讨论去旅游的地点,有的想去泰山,有的想去华山,有的想去黄山,等等,各抒己见,即“自发辐射”.经过讨论和协商,某种意见逐渐占优势,越来越多的人认识到黄山有奇松、怪石、云海、瀑布,几乎集天下名山之大成,去黄山的意见获得半数以上的赞成票,民主集中,形成去黄山旅游的决议.显然,这是这个班的同学“自组织”的结果,并不是外部有人强迫命令的结果,在这里,法定票数(过半票)就是“临界点”.

“自组织”是普遍存在的.整个自然界和宇宙的有序性、和谐性,不是上帝创造的,而是自组织的结果,或者说是合作竞争、对立统一的结果.

1.6.4 序参数与控制参数

在物理学中广泛使用序参数与控制参数.序参数是描述系统的整体行为的物理量,例如磁化强度、激光光场等.控制参数是决定系统状态和动力学特性的物理量,例如温度是铁磁体、超导体的控制参数,反转粒子数是激光器的控制参数.

要想找到合适的序参数并不容易,一般说来,应记住在临界点必须使序参数为零.

系统的序参数与子系统的关系有深刻的物理含义.例如,激光器的序参数 E 是由大量的子系即原子产生的,反过来,这些原子又要按序参数即激光光场的相位、频率、空间分布来发生受激辐射.也就是说,序参数由子系产生,反过来又“统帅和指挥”各个子系.这在协同学中称为伺服原理(slaving principle).

在激光器中本来有大量的活性原子,例如,若有10^{10}个原子,每个原子有 3 个坐标和 3 个动量分量,为描述该系统,应有 6×10^{10}个变量和方程,而且是非线性方程,要求解这 6×10^{10}个非线性方程似乎是毫无希望的.然而,由于这 6×10^{10}个原子“服从序参数即光场 E 的统帅”,这样就可能只用激光光场 E,介质极化强度 $\boldsymbol{P}$ 和反转粒子数 D 描述激光器的行为.有时甚至只用激光光场 E 就可以描述该系统.这是本书理论的出发点和基本任务.

以下各章中将深入、系统地从 $E,\boldsymbol{P},D$ 的基本方程出发研究激光器以及激光与物质作用的各种引人入胜的问题.

习题与思考

(1) 为什么说激光器本质上是光频振荡器?它与电子振荡器有何相似之处和

区别?

(2) 什么是光场的正频分量与负频分量?

(3) 什么是关联函数和光子分布函数? 由此说明激光与普通光的基本区别.

(4) 有衰减的辐射光场 $E=E_0 e^{-\gamma t} e^{i\omega t}$,计算它的一阶关联函数 $g^{(1)}(\tau)$,并与理想的余弦函数 $E=E_0 e^{i\omega t}$ 的一阶关联函数比较.

(5) 证明 $E=E_0 e^{-\gamma t} e^{i\omega t}$ 的功率谱是洛伦兹线型函数.

(6) 什么是光子简并度? 试估计太阳光的光子简并度(取 $\lambda \approx 550$ nm).

(7) 详细讨论 $B_{21}=A_{21}[D(\nu)h\nu]^{-1}$ 和 $B_{21}\rho(\nu)=\bar{n}A_{21}$ 与激光原理的关系.

(8) 描述光的放大时,有时分别用 $\frac{dI}{dz}$, $\frac{dI}{dt}$, $\frac{dn}{dz}$, $\frac{dn}{dt}$, $\frac{dE}{dz}$, $\frac{dE}{dt}$,试讨论在这几种情况下的增益与损耗有什么区别?

(9) 什么叫纵模、横模? 怎样由谱线宽度和腔长估算可能振荡的纵模数目.

(10) He-Ne 激光(考虑 $\lambda=1.15\ \mu m$),$t_s=10^{-7}$ s,$\Delta\nu=9\times10^8$ Hz,$L=100$ cm,$R=99\%$,计算阈值 D_c.

参 考 文 献

[1] Einstein A Z. On the quantum theory of light. Phys. ,1917,18:121 - 128.

[2] Gordon J P, Zeiger H J, Townes C H. The maser-new type of microwave amplifier, frequency standard and spectrometer. Phys. Rev. ,1954,99:1264 - 1274.

[3] Schawlow A L, Townes C H. Infrared and optical masers. Phys. Rev, 1958, 112: 1940 - 1949.

[4] Fox A G, Li T. Confocal multimode resonator for millimeter through optical wavelength masers. Bell Syst. Tech. J. ,1961,40:489 - 508.

[5] Maiman T H. Brit. Comm. Electron, T. 1960, Nature, 187:493 - 494.

[6] 王之江,汤星里,沈寇群等. 红宝石量子放大器工作参数对受激发射输出能的影响. 科学通报,1964,2:151 - 154.

[7] 邓锡明,杜继禄,宋从武等. 氦氖混合气体激光发射器. 科学通报,1963,12:40 - 43.

第 2 章　激光器的速率方程理论

本章研究激光器的速率方程理论. 由此可以研究激光器的增益饱和、瞬态特性、调 Q 激光动力学以及多模振荡及烧孔等一系列问题.

2.1　激光器的速率方程

世界上第一个激光器(红宝石激光器)发明不久,华裔学者汤仲良(C. L. Tang)就提出了速率方程并解释固体激光器一些输出特性. 本节介绍的速率方程与他的方程大同小异.

所谓激光速率方程,就是关于光强与反转粒子数的方程. 它的近似条件(这些条件是 $\gamma_{\perp} \gg \kappa, \gamma_{\parallel}$,激光频率等于腔的谐振频率,忽略多模之间的位相关系等)将在第 5.6 节讨论. 它适于描述红宝石激光器,YAG 激光器和 CO_2 激光器等. 速率方程所解决的问题主要是激光光强的特性以及与光强有直接关系的若干问题,包括光强随时间的变化、增益饱和、瞬态特性、多模同时振荡、气体激光的烧孔等. 速率方程不能计算激光频率和锁模等问题,更不能解释激光的线宽和光子统计特性等.

2.1.1　激发与衰减的速率方程

令二能级 E_a,E_b 上的粒子数分别为 N_a 和 N_b,激发速率及衰减分别为 λ_a,γ_a 和 λ_b,γ_b. 只考虑激发与衰减(还未产生激光),则

$$\frac{\mathrm{d}N_a}{\mathrm{d}t} = \lambda_a - \gamma_a N_a \tag{2.1}$$

$$\frac{\mathrm{d}N_b}{\mathrm{d}t} = \lambda_b - \gamma_b N_b \tag{2.2}$$

定态时 $\dot{N}_a = \dot{N}_b = 0$

$$N_a = \lambda_a / \gamma_a \tag{2.3}$$

$$N_b = \lambda_b / \gamma_b \tag{2.4}$$

特别注意,只考虑泵浦过程而激光场为零时的定态反转粒子数,记为 D_0,由(2.3)和(2.4)式相减,

$$D_0 = \lambda_a / \gamma_a - \lambda_b / \gamma_b \tag{2.5}$$

2.1.2 激光器的速率方程

下面考虑泵浦过程以及激光作用. 主要过程如图 2.1 所示，其中 WDn 是受激辐射项.

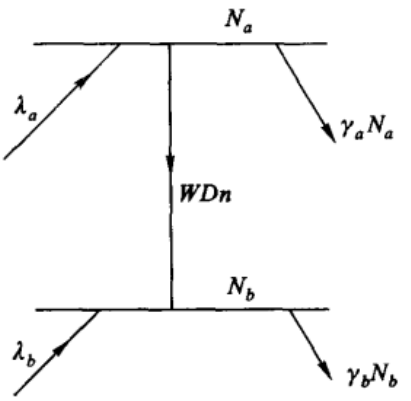


图 2.1 激光器的主要过程示意图

光子数方程为

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t}=c\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}z}=c(N_a-N_b)\sigma n-\kappa' n \tag{2.6}$$

引入 $D=N_a-N_b$，$W=\sigma c$，容易得到速率方程

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t}=WDn-\kappa' n \tag{2.7}$$

$$\frac{\mathrm{d}N_a}{\mathrm{d}t}=\lambda_a-\gamma_a N_a-WDn \tag{2.8}$$

$$\frac{\mathrm{d}N_b}{\mathrm{d}t}=\lambda_b-\gamma_b N_b+WDn \tag{2.9}$$

以下几节将研究这些方程的若干应用.

2.2 激光器的增益饱和

在定态条件($\dot{N}_a=\dot{N}_b=\dot{n}=0$)下，由(2.7)～(2.9)式，可得

$$0=\lambda_a-\gamma_a N_a-WDn \tag{2.10}$$

$$0=\lambda_b-\gamma_b N_b+WDn \tag{2.11}$$

$$0=WDn-\kappa' n \tag{2.12}$$

若令 $n=0$，则容易得到 $D_0=\lambda_a/\gamma_a-\lambda_b/\gamma_b$，当 $n\neq 0$ 时，由(2.12)式有

$$WD=\kappa' \tag{2.13}$$

这说明定态工作的激光器的增益等于损耗. 上式中的 D 即临界反转粒子

数. 只有 (D_0-D) 的一部分反转粒子对激光有贡献.

下面具体研究增益饱和问题. 为此,用 γ_a^{-1} 乘(2.10),γ_b^{-1} 乘(2.11),然后两式相减,则有

$$D_0-D[1+nW(1/\gamma_a+1/\gamma_b)]=0 \tag{2.14}$$

$$D=\frac{D_0}{1+nW(1/\gamma_a+1/\gamma_b)} \tag{2.15}$$

引入

$$R=nW \tag{2.16}$$

$$R_s^{-1}=(1/\gamma_a+1/\gamma_b)=\frac{\gamma_a\gamma_b}{\gamma_a+\gamma_b}=\frac{\gamma_a\gamma_b}{2\gamma_{ab}} \tag{2.17}$$

$$\gamma_{ab}=\frac{1}{2}(\gamma_a+\gamma_b) \tag{2.18}$$

则

$$D=\frac{D_0}{1+R/R_s} \tag{2.19}$$

因此表明,在定态时,由于光子数 n 维持一定的数值,它引起受激辐射,必然消耗反转粒子数,使反转粒子减少. 当 $R=R_s$ 时,$D=D_0/2$. 考虑到增益与反转粒子数成比例,将(2.19)式两边乘受激辐射截面,得到

$$G'=\frac{G'_0}{1+R/R_s} \tag{2.20}$$

当 $n=0$ 时,$G'=G'_0$,故称 G'_0 为小信号增益. 当 $R=R_s$ 时,$G'=G'_0/2$.

将(2.19)代入(2.13)式

$$\frac{\kappa'}{W}=\frac{D_0}{1+\dfrac{nW}{R_s}} \tag{2.21}$$

$$n=(D_0W-\kappa')\frac{R_s}{\kappa'W}=\frac{R_s}{\kappa'W}(G'_0-\kappa') \tag{2.22}$$

或者利用 $G'_0=D_0W$,$D_cW=\kappa'$,上式变为

$$n=\frac{R_s}{\kappa'}(D_0-D_c) \tag{2.23}$$

$$E=\sqrt{R_s/\kappa'}\sqrt{D_0-D_c} \tag{2.24}$$

(2.24)式就是在讨论激光器自组织问题时提到的关系式,E 是序参数,D_c 是临界点,D 是控制参数. $D=D_c$ 时,序参数等于零,$D>D_c$ 时,E 从零点分岔产生 $E\propto(D_0-D_c)^{1/2}$,这里得到的增益饱和公式与半经典理论的结果一样.

2.3 激光器的瞬态特性

本节利用绝热近似，讨论激光器的瞬态特性. 所谓绝热近似，这里指光子数随时间变化时，原子的反转粒子数 D 能即时地跟上光子数的变化(详见第 5 章).

在这里，绝热近似条件即

$$\gamma_a \gg \kappa', \quad \gamma_b \gg \kappa' \tag{2.25}$$

仍利用方程(2.7)，(2.8)，(2.9). 这时粒子数处于定态即 $\dot{N}_a = \dot{N}_b = 0$，但 $\dot{n} \neq 0$，在形式上，可将(2.7)式两边除以 κ'，得 $\frac{1}{\kappa'}\frac{dn}{dt}$，而用 γ_a 和 γ_b 分别除(2.8)和(2.9)式，得 $\frac{1}{\gamma_a}\frac{dN_a}{dt}$ $\frac{1}{\gamma_b}\frac{dN_b}{dt}$，因 $\kappa' \ll \gamma_a, \gamma_b$，比较 $\dot{n}/\kappa'$，$\dot{N}_a/\gamma_a$，$\dot{N}_b/\gamma_b$. 取 $\dot{n}/\kappa' \neq 0$，$\dot{N}_a/\gamma_a = \dot{N}_b/\gamma_b = 0$，过渡到 $\dot{N}_a = \dot{N}_b = 0$.

由 $\dot{N}_a = \dot{N}_b = 0$，类似上节推导，得到

$$D = \frac{D_0}{1 + R/R_s} = \frac{D_0}{1 + nW(1/\gamma_a + 1/\gamma_b)} \tag{2.26}$$

当激光器在阈值之上不太高时，激光光子数 n 不太大，有

$$nW(1/\gamma_a + 1/\gamma_b) \ll 1 \tag{2.27}$$

$$D \approx D_0(1 - R/R_s) = D_0 - D_0 nW(1/\gamma_a + 1/\gamma_b) \tag{2.28}$$

其中第二项是个小量，将其中 D_0 用 D_c 近似代替，

$$\begin{aligned} D &\approx D_0 - D_c nW(1/\gamma_a + 1/\gamma_b) \\ &= D_0 - n\kappa'(1/\gamma_a + 1/\gamma_b) \end{aligned} \tag{2.29}$$

其中用到 $D_c W = \kappa'$(阈值). 将(2.29)代入(2.7)

$$\begin{aligned} \frac{dn}{dt} &= WDn - \kappa' n \\ &= (D_0 W)n - \kappa' n - [W\kappa'(1/\gamma_a + 1/\gamma_b)]n^2 \end{aligned} \tag{2.30}$$

注意到 $D_0 W = G'_0$，并引入

$$C = W\kappa'(1/\gamma_a + 1/\gamma_b) \tag{2.31}$$

$$\frac{dn}{dt} = (G'_0 - \kappa')n - Cn^2 \tag{2.32}$$

其中 G'_0 是小信号增益，κ' 是损耗，$(G'_0 - \kappa')$ 是净增益，第三项是饱和项，C 是自饱和参数.

由(2.32)式还可得到激光光场 E 的方程，考虑到 $n \propto |E|^2$，则

$$\frac{dE}{dt} = \alpha E - \beta |E|^2 E \tag{2.33}$$

这里 α 是激光光场的净增益，β 是饱和参数. 由(2.33)式可以在形式上定义势函数 V，

$$\frac{dE}{dt}=-\frac{dV}{dE} \tag{2.34}$$

$$V=-\frac{1}{2}\alpha E^2+\frac{1}{4}\beta E^4 \tag{2.35}$$

图 2.2 表示的是 V 与 E 的曲线. 这样把激光器的动力学问题与一个小球(质点)在势函数内的运动类比. 激光器在阈值以下，$\alpha<0$，V 如图 2.2(a)所示，稳定点是 $E=0$(小球在 V 的最低点). 激光器在阈值之上 $\alpha>0$，V 如图 2.2(b)所示，有两个极小点 $+E_0$ 和 $-E_0$(小球可在两个极低点)也就是说，激光器在阈值附近发生了相变，稳定点 $E=0$ 变得不稳定，当它高于阈值时($\alpha>0$)，激光光场有两个稳定点 $\pm E_0$. 这就是发生了分岔. 本来 $\alpha<0$ 时，E 不论从哪边偏离 $E=0$，都要回到 $E=0$(对称性). 然而$\alpha>0$时，E 向左、右偏离 $E=0$，分别趋向 $+E_0$ 或$-E_0$，原来的对称性被破坏了. 这就是所谓对称性破缺.

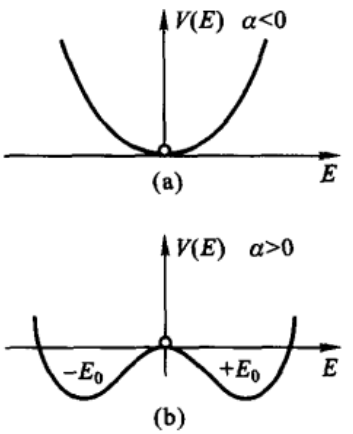


图 2.2 激光器的相变类比

2.4 调 Q 激光器的速率方程

调 Q 激光器是广泛使用的固体激光器，它可产生约 10～100 ns 的激光脉冲，主要用于激光测距仪、激光制导等.

2.4.1 调 Q 激光器原理

一般的脉冲固体激光器，其激光脉冲包含很多不规则的小脉冲，这是泵浦作用与受激辐射二者竞争的结果. 一旦泵浦作用使 $D>D_c$，则产生激光. 而产生激光就迅速消耗激发态的原子，使 $D<D_c$，这就产生一个小脉冲. 然后，泵浦作用又使反转粒子数增加，重复上述过程. 例如脉冲的红宝石激光器，泵浦脉冲的量级是 ms，在 1 ms 内有许多更窄的激光脉冲. 掺钕的钇铝石榴石激光器也有类似的多脉冲.

固体激光器的多脉冲的机理也可能比上述物理图像更复杂，例如与多模振荡有关，与激光动力学不稳定性有关等.

激光器的多脉冲对测距等应用不利. 激光器发明不久，有人就提出用

调 Q 原理以获得单个的窄脉冲激光. 这里的 Q，即光学谐振腔的 Q 值，它与损耗成反比. 调 Q 就是先使腔的 Q 值很低，再突然地迅速使 Q 值升高，也就是使腔的 Q 值突变，或损耗突变. 先使激光器的腔的 Q 值很低，损耗很大，激光器不能产生激光，这就可以在激光的上能级积累大量的激发态原子，反转粒子数很多. 当 Q 值突然升高，损耗骤降时，迅速产生很窄的光脉冲. 在适当的条件下可得到单个的约 10^{-8} s 的激光脉冲.

早期的调 Q 激光器采用转镜，使腔的一个反射镜旋转. 目前多采用电光开关和饱和吸收材料的开关，使腔的 Q 值突变.

2.4.2　调 Q 激光器的速率方程

一旦激光工作物质内部的反转粒子数目积累到 D_i（初始值）就迅速打开开关，激光脉冲开始建立. 因此在研究调 Q 激光器的过程时，略去泵浦项和衰减项，速率方程应为

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t}=WDn-\kappa' n \tag{2.36}$$

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}=-WDn \tag{2.37}$$

这适用于四能级系统的激光器.

令 Q 开关打开的时刻为 $t=0$，这时初值为 n_i，D_i，在脉冲开始建立的相当长的时间内，光子数较少，反转粒子数 D 的变化可以忽略，即 $D\approx D_i$，由速率方程(2.36)，(2.37)得到

$$n(t)\approx n_i\exp[2\alpha' t] \tag{2.38}$$

$$D(t)\approx D_i\{1+2Wn_i[1-\exp(2\alpha t)/\alpha]\} \tag{2.39}$$

其中 $\alpha=WD_i-\kappa'$.

由此可知，在激光脉冲建立的时间内，光子数指数增加. 当 n 达到较高的值时，受激辐射使反转粒子数急剧减小，光子数 n 也急剧增加. 这时只能用计算机求解速率方程.

图 2.3 是计算机计算的曲线. 当 $D=D_c$ 时，激光脉冲达到峰值（对应于 $\dot{n}=0$）. 详细的计算表明，D_i/D_c 越大，激光脉宽 Δt 越窄.

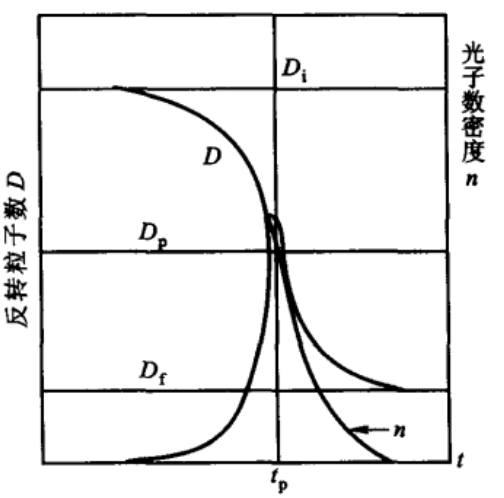


图 2.3　调 Q 激光器的计算机解

此外，理论和实验都证明，调 Q 激光器有最佳工作条件.

2.5 均匀加宽的激光器的多模振荡

本节讨论均匀加宽的激光器的多模振荡的机理与速率方程. 以后将会从半经典理论过渡到本节的速率方程，说明速率方程的适用条件.

2.5.1 均匀加宽激光器的多模振荡概念

在介绍均匀加宽介质的线型时，已说明介质中的原子都有相同的线型. 这样，使用均匀加宽的增益介质的激光器，若在某一频率（接近谱线中心频率或在线宽之内）振荡，就会对各个原子都有作用（引起它们的受激跃迁）. 在与激光光场作用时，这些原子都处于相同的地位. 由于该频率的振荡对粒子数的消耗，似乎使其他频率的振荡失去任何可能性. 然而，激光光场在谐振腔内形成驻波 $(\sin^2 kz)$，光场不均匀，对粒子数消耗也不均匀（例如波节处 $E=0$，反转粒子数几乎不消耗）. 不同频率的驻波，对粒子数各取所需，这样就可实现多模振荡. 当然，多模之间有竞争（详见 6.5 节）.

2.5.2 多模作用时光子数速率方程

已经知道受激辐射项是 WDn，对均匀加宽

$$W=\frac{c^3}{8\pi\nu^2}A_{21}g(\nu)$$

$$=\frac{c^3}{8\pi\nu^2}A_{21}\frac{\Delta\omega}{2\pi}\frac{1}{(\omega_0-\omega)^2+(\Delta\omega/2)^2} \tag{2.40}$$

其中 ω_0 是原子跃迁的中心频率. 以后用 $\bar{\omega}_\mu$ 代表第 μ 个原子跃迁的中心频率，用 Ω_λ 代表腔的第 λ 个模的角频率，用 $\gamma_\perp=\Delta\omega/2$，则第 λ 个模的光场与第 μ 个原子作用的受激辐射速率为

$$W_{\lambda\mu}=\frac{\pi c^3}{2\Omega_\lambda^2}A_{21}\left(\frac{1}{2\pi}\right)\frac{2\gamma_\perp}{(\bar{\omega}_\mu-\Omega_\lambda)^2+\gamma_\perp^2}\sin^2 k_\lambda z \tag{2.41}$$

最后一个因子是考虑到驻波作用.

此外，在形式上用 d_μ 代表第 μ 个原子的粒子数反转，总粒子数为 N_0，则

$$D=\sum_\mu d_\mu=N'd_\mu \tag{2.42}$$

显然，$d_\mu=D/N'$. 这样第 λ 个模的光子数的速率方程为

$$\frac{\mathrm{d}n_\lambda}{\mathrm{d}t}=n_\lambda\sum_\mu W_{\lambda\mu}d_\mu-\kappa'_\lambda n_\lambda \tag{2.43}$$

2.5.3 多模作用时粒子数的速率方程

考虑单模振荡的粒子数方程

$$\frac{\mathrm{d}N_a}{\mathrm{d}t}=\lambda_a-\gamma_a N_a-WDn \tag{2.44}$$

$$\frac{\mathrm{d}N_b}{\mathrm{d}t}=\lambda_b-\gamma_b N_b+WDn \tag{2.45}$$

$$D=N_a-N_b,N_0=N_a+N_b \tag{2.46}$$

用(2.44)式减去(2.45)式,并利用(2.46)式,则

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}=(\lambda_a-\lambda_b)-\frac{1}{2}N_0(\gamma_a-\gamma_b)-\frac{1}{2}D(\gamma_a+\gamma_b)-2WDn \tag{2.47}$$

当 $n=0$ 时得到定态反转粒子数

$$D_0=\left[(\lambda_a-\lambda_b)-\frac{1}{2}N_0(\gamma_a-\gamma_b)\right]/[(\gamma_a+\gamma_b)/2] \tag{2.48}$$

将(2.48)式代入(2.47)式,并且引入

$$\gamma_{\parallel}=\frac{1}{2}(\gamma_a+\gamma_b) \tag{2.49}$$

则有

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}=-\gamma_{\parallel}(D-D_0)-2WDn \tag{2.50}$$

两边除以 N_0,则

$$\frac{\mathrm{d}d_\mu}{\mathrm{d}t}=-\gamma_{\parallel}(d_\mu-d_0)-2Wd_\mu n \tag{2.51}$$

对于多模振荡,应考虑各个模的影响,这样便得到多模振荡的反转粒子数速率方程

$$\frac{\mathrm{d}d_\mu}{\mathrm{d}t}=-\gamma_{\parallel}(d_\mu-d_0)-2\sum_{\lambda}W_{\lambda\mu}d_\mu n_\lambda \tag{2.52}$$

方程最后一项的因子 2,表示一次跃迁使 N_a 减少一个,N_b 增加一个,D 减少两个.

对于四能级泵浦的激光器,末能级是空的.一次跃迁,使 N_a 减少一个,D 也减少一个(这时 $D=N_a-N_b=N_a$).这样粒子数方程为

$$\frac{\mathrm{d}d_\mu}{\mathrm{d}t}=-\gamma_{\parallel}(d_\mu-d_0)-\sum_{\lambda}W_{\lambda\mu}d_\mu n_\lambda \tag{2.53}$$

最后特别强调,$-\gamma_{\parallel}(d_\mu-d_0)$ 代表衰减项,d_0 是泵浦与衰减达到动态平衡而光场为零时的"反转粒子数".绝对不要把 d_0 或 D_0 看成热平衡态的物理量.

5.6 节将在一定的近似条件下,从半经典的激光理论过渡到方程

(2.43)和(2.52),从而揭示速率方程的适用范围.

习题与思考

(1) 什么叫激光速率方程?它解决什么问题?

(2) 什么叫激光器的增益饱和?

(3) 讨论图 2.2 的激光器的相变类比图意义.

(4) 简述调 Q 激光器的原理.

(5) 为什么均匀加宽激光器也可能多模振荡?

(6) 由光子数方程(2.32)式求定态光子数,并讨论其物理意义.

(7) 推导 $\dot{E}=\alpha E-\beta E^3$,准确求出 α,β.

(8) 从方程 $\dot{n}_\lambda$ 和 $\dot{d}_\mu$ 出发,见(2.32)式和(2.52)式,令 $\dot{d}_\mu=0$,求 $\dot{n}_\lambda$ 的方程.进而计算定态光子数 n_λ.

(9) 光子数方程 $\dot{n}_\lambda=2n(\alpha-\beta n)$,即(2.37)式,分别在 $\alpha<0$ 和 $\alpha>0$ 时求出该方程的解 $n(t)$,并讨论 $n(t)$ 随时间的发展趋势.

参 考 文 献

[1] Tang C L, Statz H. Spectral out and spiking behavior of solid-state lasers. J. Appl. Phys, 1963, 34: 2289 - 2293.

[2] Statz H, DeMars G A. Quantum electronics. New York: Columbia University Press, 1960. 530.

[3] Hellwarth R W. Advances in quantum electronics. New York: Columbia University Press, 1961. 334.

[4] 吕大元,王之江,余文炎等.瞬时大功率红宝石激光发射器.科学通报,1964,8: 733 - 736.

[5] 李福利,转镜调 Q 四能级巨脉冲激光器的最佳工作条件.激光.1975,1:11 - 15.

[6] 李福利.快开关调 Q 的四能级激光器的动力学.物理学报,1978,27:13 - 17.

第3章　密度矩阵

从这一章开始，将深入和系统地介绍半经典的激光理论及其应用. 半经典激光理论的基本方程就是麦克斯韦-布洛赫方程. 本章由密度矩阵求出光学布洛赫方程，下章给出典型情况的麦克斯韦-布洛赫方程.

3.1　激光的半经典理论概况与近似条件

激光器以及激光与物质作用的基本问题就是光与二能级原子的作用. 把光看成经典的电磁波，用麦克斯韦方程描述，把原子看成量子化的，用量子力学描述，这就是半经典激光理论的特点.

光与原子作用时，原子的量子力学行为可用密度矩阵方法很方便地描述. 由此得到的描述原子的基本方程就是光学布洛赫方程.

光与二能级原子作用的哈密顿量是

$$\begin{aligned} H_{A-F} &= V = -\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{p} \\ &= -(\boldsymbol{E}^{(+)}+\boldsymbol{E}^{(-)})\cdot\boldsymbol{\mu}\cdot(\boldsymbol{\sigma}^{+}+\boldsymbol{\sigma}^{-}) \end{aligned} \tag{3.1}$$

其中 $\boldsymbol{E}$ 是光场，$\boldsymbol{p}$ 是原子偶极矩；$\boldsymbol{E}^{(+)}$，$\boldsymbol{E}^{(-)}$ 分别是光场的正频分量与负频分量；$\boldsymbol{\mu}$ 是二能级原子的电偶极矩的矩阵元；$\boldsymbol{\sigma}^{+}$ 和 $\boldsymbol{\sigma}^{-}$ 是泡利矩阵. 当然，若把 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{p}$ 都看成复数，本质上是全经典的理论（电动力学），若 $\boldsymbol{E}$ 是复数，而 $\boldsymbol{p}$ 是算符，这就是半经典理论；若 $\boldsymbol{E}^{(+)}$ 和 $\boldsymbol{E}^{(-)}$ 也是算符（$\boldsymbol{E}^{(+)}$ 和 $\boldsymbol{E}^{(-)}$ 分别对应消灭算符 a 和产生算符 a^{+}），这就是全量子理论.

半经典激光理论的应用，是激光物理与量子光学中最精彩的内容之一. 第3章和第4章将建立起半经典激光理论的基本方程，即麦克斯韦-布洛赫方程，接着就小试锋芒，解决激光器的光强及频率特性问题. 然后转入本书核心内容，用半经典理论研究光学孤立子、光学混沌、光学双稳态和位相复共轭光学.

半经典的激光理论不能解决激光的线宽、光子统计等问题. 在激光的全量子理论中将顺利解决这些问题，并涉及光学压缩态、共振荧光等引人入胜的专题.

不论在激光的半经典理论还是全量子理论中，经常使用二能级近似、电偶极近似、慢变振幅近似和旋转波近似以及绝热近似等.

（1）二能级近似

虽然实际的原子、分子等都有许多能级，但在激光器中，只有与激光直接有关的上、下能级才与光发生主要作用. 泵浦作用和衰减作用，主要提供初始条件(初始的反转粒子数). 用光与二能级原子作用作为基本模型，既简捷又能反映问题的本质.

(2) 原子之间没有直接作用

由于激活原子的密度比较低，忽略原子之间的直接作用是较合理的近似. 原子之间的碰撞作用归入原子的弛豫或衰减.

但是各个原子都与同一个光场耦合，原子之间的这种间接作用，在一定条件下会导致原子的集体效应. 但这并非原子间的直接作用.

(3) 电偶极近似

光与原子作用的电偶极近似，其实质是原子的大小远小于光波的波长，在原子的大小范围内，光场近似为常数. 考虑原子坐标原点的光场 $\boldsymbol{E}(x_0,t)$ 或矢量势 $\boldsymbol{A}(x_0,t)$，在计算光场与原子作用时，认为 $\boldsymbol{E}(x_0,t)$，$\boldsymbol{A}(x_0,t)$ 与空间坐标 x 无关. 这样在计算相互作用时，可提到积分号外，例如

$$V_{ab}=\int U_a(r)\,(-e\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{r})U_b(r)\mathrm{d}^3r=-e\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{r}_{ab} \tag{3.2}$$

在研究光的吸收、自发辐射和受激辐射等问题时，电偶极近似是很好的近似，但要特别注意，处理多光子问题时可能出现问题，所以最好用 $A(x,t)$ 直接计算相互作用.

(4) 旋转波近似(RWA)

在处理光与二能级原子作用时，只考虑近共振项 $(\bar{\omega}-\omega)$，而忽略远离共振的项 $(\bar{\omega}+\omega)$，这里 $\bar{\omega}$ 和 ω 分别是原子跃迁的频率和光的频率. 这相当于在量子力学计算中取

$$\begin{aligned}&\frac{\exp\left[-\mathrm{i}(\bar{\omega}-\omega)t+\gamma_\perp t\right]}{\bar{\omega}-\omega+\mathrm{i}\gamma_\perp}+\frac{\exp\left[\mathrm{i}(\bar{\omega}+\omega)t+\gamma_\perp t\right]}{\bar{\omega}+\omega-\mathrm{i}\gamma_\perp}\\&\approx\frac{\exp\left[-\mathrm{i}(\bar{\omega}-\omega)t-\gamma_\perp t\right]}{(\bar{\omega}-\omega)+\mathrm{i}\gamma_\perp}\end{aligned} \tag{3.3}$$

其中 $\gamma_\perp$ 代表谱线的线宽. 由于 $(\bar{\omega}-\omega)\leqslant\gamma_\perp$，而 $(\bar{\omega}+\omega)\gg\gamma_\perp$，所以这种近似是合理的. 但在研究光学混沌时，旋转波近似会产生严重问题.

在具体应用旋转波近似时，实际上在光与二能级原子作用时，比较 $\exp[-\mathrm{i}(\bar{\omega}-\omega)t]$ 和 $\exp[\pm\mathrm{i}(\bar{\omega}+\omega)t]$，只保留 $\exp[-\mathrm{i}(\bar{\omega}-\omega)t]$.

至于旋转波近似的名称，相当于在绘制光场 $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t})$ 和原子 $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{\omega}t})$ 的相图时，它们的相位角分别是 ωt 和 $\bar{\omega}t$. 若二者在平面内按同方向旋转，二者相位角之差是 $|(\bar{\omega}-\omega)t|$，而反方向旋转时，则是 $|(\bar{\omega}+\omega)t|$. 上述的旋转波近似就相当于只考虑光场和原子的矢量在相平面内同方向旋转的

情况.

(5) 慢变振幅近似

假定光场和极化强度等可以分解为快变部分 $e^{\pm i\omega t}$ 与慢变部分 $E(t)$, $P(t)$. 例如,

$$\left.\begin{aligned} E&=E(t)e^{i\omega t}\\ P&=P(t)e^{i\omega t}\end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

$E(t)$ 和 $P(t)$ 在一个光学周期内的变化可以忽略不计,更一般的形式是

$$\left.\begin{aligned} &\text{若}\\ &\quad F=F(z,t)e^{i\omega t-ikz}\\ &\text{则}\\ &\quad \left|\frac{\partial F}{\partial t}\right|\ll\frac{1}{T}F\\ &\quad \left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|\ll\frac{1}{\lambda}F\end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

(6) 绝热近似

假定光场的弛豫时间长(损耗 κ 小),而原子的变量(偶极矩等)的弛豫时间短($\gamma_\perp$ 大). 这样,当光场的慢变部分 $E(t)$ 变化时,原子可以很快地、即时地跟随光场的变化;反之,在原子的弛豫时间内 $(1/\gamma_\perp)$,光场的慢变振幅可看成与时间 t 无关的常数.

在第 6 章中,按光场损耗 κ,偶极矩衰减常数 $\gamma_\perp$,粒子数衰减常数 $\gamma_\parallel$,将激光器分为 A 类($\kappa\ll\gamma_\parallel\approx\gamma_\perp$),B 类($\gamma_\perp\gg\kappa\gg\gamma_\parallel$)和 C 类($\kappa\approx\gamma_\parallel\approx\gamma_\perp$). 这需要按具体问题灵活应用.

3.2 光与二能级原子的作用

图 3.1 是光与二能级原子作用的模型. 上、下能级的本征态和本征能量分别是 $|a\rangle$, E_a 和 $|b\rangle$, E_b,原子跃迁的角频率是

$$\bar{\omega}=\omega_{ab}=(E_a-E_b)/\hbar \tag{3.6}$$

光的频率是 ω,光与二能级原子作用的哈密顿量包括自由哈密顿量 H_0 与相互作用哈密顿量 V,

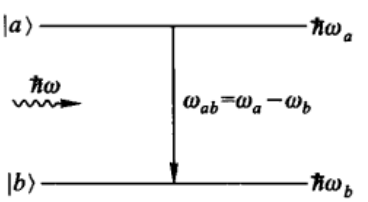


图 3.1 光与二能级原子作用模型

$$H=H_0+V \tag{3.7}$$

由于 $|a\rangle$, $|b\rangle$ 是 H_0 的本征态,故有

$$\left.\begin{aligned} H_0|a\rangle &= E_a|a\rangle \\ H_0|b\rangle &= E_b|b\rangle \end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

$E_a=\hbar\omega_a$，$E_b=\hbar\omega_b$. 矩阵元

$$\left.\begin{aligned} (H_0)_{aa} &= \hbar\omega_a \\ (H_0)_{bb} &= \hbar\omega_b \\ (H_0)_{ab} &= (H_0)_{ba}=0 \end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

$$H_0=\begin{pmatrix} \hbar\omega_a & 0 \\ 0 & \hbar\omega_b \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

光场与原子的电偶极矩的相互作用是

$$V=-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E} \tag{3.11}$$

其中电偶极矩的算符 $\boldsymbol{p}=e\boldsymbol{r}=-|e|\boldsymbol{r}$. 它是奇宇称的. 按照电磁作用的宇称守恒定律，允许的电偶极跃迁的初态和末态的宇称必须相反. 因此只有$|a\rangle$和$|b\rangle$宇称相反才允许二者之间的电偶极跃迁，$|a\rangle\to|a\rangle$和$|b\rangle\to|b\rangle$的跃迁是不允许的. 再假定原子没有固有偶极矩(非极性的原子或分子)，必有

$$V_{aa}=V_{bb}=0 \tag{3.12}$$

V 的非对角元 V_{ab}和 V_{ba}不为零. 因此

$$V=\begin{pmatrix} 0 & V_{ab} \\ V_{ba} & 0 \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

$$H=\begin{pmatrix} \hbar\omega_a & V_{ab} \\ V_{ba} & \hbar\omega_b \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

下面由态矢量求力学量的平均值. 态矢量

$$|\psi\rangle=c_a|a\rangle+c_b|b\rangle \tag{3.15}$$

其中基矢$|a\rangle$和$|b\rangle$的矩阵形式是

$$\left.\begin{aligned} |a\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ |b\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \langle a| &= (1 \quad 0) \\ \langle b| &= (0 \quad 1) \end{aligned}\right\} \tag{3.16}$$

容易验证 $|a\rangle$ 和 $|b\rangle$ 是正交归一的、完备的，

$$\left.\begin{aligned} \langle a|a\rangle &= \langle b|b\rangle = 1 \\ \langle a|b\rangle &= \langle b|a\rangle = 0 \\ |a\rangle\langle a|+|b\rangle\langle b| &= 1 \end{aligned}\right\} \tag{3.17}$$

态矢量按$|a\rangle$和$|b\rangle$展开的系数的模的平方，即$|c_a|^2$和$|c_b|^2$分别是原子处$|a\rangle$和$|b\rangle$的几率.

由态矢量可计算任一个力学量的平均值

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{O}\rangle &= \langle \psi|\boldsymbol{O}|\psi\rangle \\ &= (c_a^*\langle a| + c_b^*\langle b|)\boldsymbol{O}(c_a|a\rangle + c_b|b\rangle) \\ &= c_a^* c_a\langle a|\boldsymbol{O}|a\rangle + c_b^* c_b\langle b|\boldsymbol{O}|b\rangle \\ &\quad + c_a^* c_b\langle a|\boldsymbol{O}|b\rangle + c_b^* c_a\langle b|\boldsymbol{O}|a\rangle\end{aligned} \tag{3.18}$$

写成矩阵元的形式$\langle a|\boldsymbol{O}|a\rangle = O_{aa}$，$\langle a|\boldsymbol{O}|b\rangle = O_{ab}$等，

$$\langle \boldsymbol{O}\rangle = c_a^* c_a O_{aa} + c_b^* c_b O_{bb} + c_a^* c_b O_{ab} + c_b^* c_a O_{ba} \tag{3.19}$$

定义四个矩阵元

$$\left.\begin{aligned}\rho_{aa} &= c_a^* c_a \\ \rho_{ab} &= c_b^* c_a \\ \rho_{ba} &= c_a^* c_b \\ \rho_{bb} &= c_b^* c_b\end{aligned}\right\} \tag{3.20}$$

则(3.18)式变为

$$\langle \boldsymbol{O}\rangle = \rho_{aa}O_{aa} + \rho_{ab}O_{ba} + \rho_{ba}O_{ab} + \rho_{bb}O_{bb} \tag{3.21}$$

由(3.20)式定义的矩阵元构成的矩阵，就是密度矩阵. 下节研究密度矩阵的一般性质.

3.3 纯系综的密度矩阵

如果一个量子力学系统的波函数是已知的，该系统称为纯系综. 上节讨论的二能级系统，$|\psi\rangle$是知道的，就是纯系综. 对纯系综引入的密度矩阵，称为纯系综的密度矩阵. 本节研究纯系综的密度矩阵，下节介绍混合系综的密度矩阵.

3.3.1 纯系综的密度矩阵及平均值公式

已知波函数或波矢量$|\psi\rangle = c_a|a\rangle + c_b|a\rangle$，由展开系数定义的矩阵元构成的矩阵，即纯系综的密度矩阵，记为$\boldsymbol{\rho}$

$$\boldsymbol{\rho} = \begin{pmatrix}\rho_{aa} & \rho_{ab} \\ \rho_{ba} & \rho_{bb}\end{pmatrix} \tag{3.22}$$

其中ρ_{aa}，ρ_{ab}，ρ_{ba}和ρ_{bb}见(3.10)式

将算符$\boldsymbol{O}$写成矩阵

$$\boldsymbol{O} = \begin{pmatrix}O_{aa} & O_{ab} \\ O_{ba} & O_{bb}\end{pmatrix} \tag{3.23}$$

直接计算得到

$$\boldsymbol{\rho O}=\begin{pmatrix}\rho_{aa}O_{aa}+\rho_{ab}O_{ba} & \rho_{aa}O_{ab}+\rho_{ab}O_{bb}\\ \rho_{ba}O_{aa}+\rho_{bb}O_{ba} & \rho_{ba}O_{ab}+\rho_{bb}O_{bb}\end{pmatrix} \tag{3.24}$$

将此式与平均值 $\langle \boldsymbol{O}\rangle$ 的公式(3.21)比较,可知

$$\langle \boldsymbol{O}\rangle=\mathrm{tr}(\boldsymbol{\rho O})=\rho_{aa}O_{aa}+\rho_{ab}O_{ba}+\rho_{ba}O_{ab}+\rho_{bb}O_{bb} \tag{3.25}$$

其中 tr 即 trace,即求迹(求对角元之和).

由此得到由密度矩阵求平均值的一般公式

$$\langle \boldsymbol{O}\rangle=\mathrm{tr}(\boldsymbol{\rho O}) \tag{3.26}$$

显然,由密度矩阵求平均值的方法有很大优越性:不需知道波函数具体形式,只要知道展开系数的乘积 $c_a^* c_a$ 和 $c_a^* c_b$ 等即可.

3.3.2 密度矩阵元的物理意义

密度矩阵的对角元 ρ_{aa} 和 ρ_{bb} 显然是原子处于 $|a\rangle$ 和 $|b\rangle$ 的几率.若态原子数为 N_0,则 $N_0(\rho_{aa}-\rho_{bb})$ 就是我们最感兴趣的反转粒子数.

密度矩阵的非对角元与原子的偶极矩有关.为揭示其物理意义,计算电偶极矩算符的平均值.前已说明,由于宇称守恒的要求,电偶极矩算符的对角元必为零,故有

$$\boldsymbol{er}=\begin{pmatrix}0 & er_{ab}\\ er_{ba} & 0\end{pmatrix} \tag{3.27}$$

求平均值为

$$\left.\begin{aligned}\langle \boldsymbol{er}\rangle&=\mathrm{tr}(\boldsymbol{\rho er})\\ &=e(\rho_{ab}r_{ba}+\rho_{ba}r_{ab})\\ &=\mu_{ba}\rho_{ab}+\mu_{ab}\rho_{ba}\end{aligned}\right\} \tag{3.28}$$

其中 $\mu_{ab}=er_{ab}$,$\mu_{ba}=er_{ba}$

因此,密度矩阵元的物理意义归结为:

$\rho_{aa}=c_a^* c_a$,原子在上能级几率;

$\rho_{bb}=c_b^* c_b$,原子在下能级几率;

$\rho_{ab}=c_b^* c_a=\rho_{ba}^*$,正比于复数电偶极矩,即 $\rho_{ab}+\rho_{ba}$ 是以 μ_{ab} 为单位的原子电偶极矩.以后将看到是 ρ_{ab} 是原子的电偶极矩的正频分量,而 ρ_{ba} 则是负频分量.

由 ρ_{aa} 和 ρ_{bb} 的含义,$\rho_{aa}+\rho_{bb}=1$,即态几率等于 1.由此可知密度矩阵的一个性质

$$\mathrm{tr}\boldsymbol{\rho}=\rho_{aa}+\rho_{bb}=1 \tag{3.29}$$

3.3.3 密度矩阵的狄拉克形式

由于

$$\left.\begin{aligned} |a\rangle &= \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \\ |b\rangle &= \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{3.30}$$

$$\left.\begin{aligned} |\psi\rangle &= c_a|a\rangle + c_b|a\rangle = \begin{bmatrix}c_a\\c_b\end{bmatrix} \\ \langle\psi| &= (c_a^* \quad c_b^*) \end{aligned}\right\} \tag{3.31}$$

容易计算出

$$|\psi\rangle\langle\psi| = \begin{bmatrix}c_a\\c_b\end{bmatrix}(c_a^* \quad c_b^*) = \begin{bmatrix}c_a c_a^* & c_a c_b^*\\ c_b c_a^* & c_b c_b^*\end{bmatrix} \tag{3.32}$$

由此得到密度矩阵的狄拉克形式

$$\boldsymbol{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi| \tag{3.33}$$

还可立即得到密度矩阵的一个极重要性质

$$\boldsymbol{\rho}^2 = |\psi\rangle\langle\psi||\psi\rangle\langle\psi| = \boldsymbol{\rho} \tag{3.34}$$

即 $\boldsymbol{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$ 具有投影的性质(例如一个电线杆在地面上投影,投影到地面一次,再投影一次,与一次投影得到的效果相等).

3.3.4 密度矩阵的运动方程

从薛定谔方程出发,

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{i}\hbar|\dot{\psi}\rangle &= \boldsymbol{H}|\psi\rangle \\ -\mathrm{i}\hbar\langle\dot{\psi}| &= \langle\psi|\boldsymbol{H} \end{aligned}\right\} \tag{3.35}$$

由密度矩阵的狄拉克形式,容易得到运动方程

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\rho}} &= |\dot{\psi}\rangle\langle\psi| + |\psi\rangle\langle\dot{\psi}| \\ &= -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\boldsymbol{H}|\psi\rangle\langle\psi| + \frac{\mathrm{i}}{\hbar}|\psi\rangle\langle\psi|\boldsymbol{H} \\ &= -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\boldsymbol{H}\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}\boldsymbol{H}) \end{aligned} \tag{3.36}$$

写成泊松括号的形式

$$\dot{\boldsymbol{\rho}} = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\boldsymbol{H}, \boldsymbol{\rho}] \tag{3.37}$$

由(3.36)式,可直接写出密度矩阵元的方程

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_{ij} &= \langle i|\dot{\boldsymbol{\rho}}|j\rangle \\ &= -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\sum_k \{\langle i|\boldsymbol{H}|k\rangle\langle k|\boldsymbol{\rho}|j\rangle - \langle i|\boldsymbol{\rho}|k\rangle\langle k|\boldsymbol{H}|j\rangle\} \\ &= -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\sum_k \{H_{ik}\rho_{kj} - \rho_{ik}H_{kj}\}\end{aligned} \tag{3.38}$$

由此出发，容易求出 $(\dot{\rho}_{aa} - \dot{\rho}_{bb})$ 和 $\dot{\rho}_{ab}$ 的方程，分别对应反转粒子数及电偶极矩的方程. 这正是激光物理学的核心.

3.4 混合系综的密度矩阵

有些量子力学系统，例如多粒子问题，并不知道其态矢量，只知道一定的统计性质. 这时，求力学量的平均值，必须考虑统计平均，常用混合系综的密度矩阵.

若一个量子力学系统，它有态矢量 $|\psi\rangle$ 的几率为 P_ψ，P_ψ 就是统计权重. 为了求力学量的平均值，既应考虑在 $|\psi\rangle$ 态的量子力学平均 $\langle\psi|\boldsymbol{O}|\psi\rangle$，也要考虑占有 $|\psi\rangle$ 态的统计权重.

这种量子力学系统(不知其波函数只知一定的统计性质)称为混合系综. 混合系综的密度矩阵定义为

$$\boldsymbol{\rho} = \sum_\psi P_\psi |\psi\rangle\langle\psi| \tag{3.39}$$

例如，对于二能级系统，有 N 个原子，第 j 个原子的态矢量是

$$|\psi_j\rangle = c_{aj}|a\rangle + c_{bj}|a\rangle \tag{3.40}$$

由(3.39)式，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\rho} &= \sum P_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j| \\ &= \sum_j P_j \begin{pmatrix} c_{aj}c_{aj}^* & c_{aj}c_{bj}^* \\ c_{bj}c_{aj}^* & c_{bj}c_{bj}^* \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{3.41}$$

用混合系综的密度矩阵求平均值的公式以及运动方程，在形式上与纯系综的情况相似.

$$\begin{aligned}\langle\boldsymbol{O}\rangle &= \sum_\psi P_\psi \langle\psi|\boldsymbol{O}|\psi\rangle \\ &= \sum_\psi P_\psi \sum_k \langle\psi|\boldsymbol{O}|k\rangle\langle k|\psi\rangle\end{aligned} \tag{3.42}$$

将内积 $\langle k|\psi\rangle$ 移到前面，

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{O}\rangle &= \sum_{\psi} P_{\psi} \sum_{k} \langle k \mid \psi\rangle\langle\psi \mid \boldsymbol{O} \mid k\rangle \\ &= \sum_{k}\langle k \mid \sum_{\psi} P_{\psi} \mid \psi\rangle\langle\psi \mid \boldsymbol{O} \mid k\rangle\end{aligned} \tag{3.43}$$

利用混合系综 $\boldsymbol{\rho}$ 的定义(3.41)式,则

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{O}\rangle &= \sum_{k}\langle k \mid \boldsymbol{\rho O} \mid k\rangle = \sum_{k}(\boldsymbol{\rho O})_{kk} \\ &= \operatorname{tr}(\boldsymbol{\rho O})\end{aligned} \tag{3.44}$$

混合系综的密度矩阵的运动方程也可由薛定谔方程得到

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\rho}} &= \sum_{\psi} P_{\psi}\{\mid \dot{\psi}\rangle\langle\psi \mid + \mid \psi\rangle\langle\dot{\psi} \mid\} \\ &= -\mathrm{i}\hbar^{-1}\sum_{\psi} P_{\psi}\{\boldsymbol{H} \mid \psi\rangle\langle\psi \mid - \mid \psi\rangle\langle\psi \mid \boldsymbol{H}\} \\ &= -\mathrm{i}\hbar^{-1}[\boldsymbol{H},\boldsymbol{\rho}]\end{aligned} \tag{3.45}$$

作为混合系综的一个例子,让我们计算热平衡辐射的平均光子数.令光子数态为 $\mid n\rangle$,本征值为 n,光子算符为 $\hat{n}$,有

$$\hat{n}\mid n\rangle = n\mid n\rangle \tag{3.46}$$

光子数为 n 的几率由玻耳兹曼分布给出

$$\begin{aligned}P_n &= \exp(-n\hbar\omega/kT)/\sum_{m=0}^{\infty}\exp(-m\hbar\omega/kT) \\ &= \exp(-n\hbar\omega/kT)[1-\exp(-\hbar\omega/kT)]\end{aligned} \tag{3.47}$$

所以密度矩阵是

$$\boldsymbol{\rho} = \sum_{n} P_n \mid n\rangle\langle n \mid = [1-\exp(-\hbar\omega/kT)]\sum_{l}\mathrm{e}^{-l\hbar\omega/kT} \mid l\rangle\langle l \mid \tag{3.48}$$

平均光子数 $\langle n\rangle$ 为

$$\langle n\rangle = \operatorname{tr}(\boldsymbol{\rho}\hat{n}) = \sum_{m}\sum_{n}\rho_{nm}\hat{n}_{mn} \tag{3.49}$$

其中

$$\begin{aligned}\rho_{nm} &= \langle n \mid \boldsymbol{\rho} \mid m\rangle \\ &= [1-\exp(-\hbar\omega/kT)]\sum_{l}\mathrm{e}^{-l\hbar\omega/kT}\langle n \mid l\rangle\langle l \mid m\rangle \\ &= [1-\exp(-\hbar\omega/kT)]\mathrm{e}^{-m\hbar\omega/kT}\langle n \mid m\rangle\end{aligned} \tag{3.50}$$

$$\hat{n}_{mn} = \langle m\mid\hat{n}\mid n\rangle = n\delta_{mn} \tag{3.51}$$

将(3.50)、(3.51)式代入(3.49)式,

$$\begin{aligned}\langle n\rangle &= \sum_{m}(m\mathrm{e}^{-m\hbar\omega/kT})(1-\mathrm{e}^{-\hbar\omega/kT}) \\ &= 1/[\exp(\hbar\omega/kT)-1]\end{aligned} \tag{3.52}$$

这正是熟知的结果.

在激光全量子理论还要用到混合系综的密度矩阵.

3.5 光学布洛赫方程

将密度矩阵用于光与二能级原子的作用,可以得到光学布洛赫方程.这是研究激光理论的基本方程.本节求出光学布洛赫方程,以下两节再利用旋转波近似和慢变振幅近似,并给出光学布洛赫方程的矢量模型.

3.5.1 二能级系统的密度矩阵元的方程

对于二能级原子,利用哈密顿量 H 的公式(3.7)以及密度矩阵元的运动方程,可得到

$$\dot{\rho}_{aa}=-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\{(H_{aa}\rho_{aa}+H_{ab}\rho_{ba})-(\rho_{aa}H_{aa}+\rho_{ab}H_{ba})\} \tag{3.53}$$

考虑到 $H=H_0+V$,$V_{aa}=V_{bb}=0$,$(H_0)_{ab}=0$ 则,

$$\left.\begin{aligned}H_{aa}&=(H_0)_{aa}+V_{aa}=\hbar\omega_a\\H_{ab}&=(H_0)_{ab}+V_{ab}=V_{ab}\\H_{ba}&=H_{ab}^{*}=V_{ab}^{*}\end{aligned}\right\} \tag{3.54}$$

代入(3.53)式,

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_{aa}&=-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[V_{ab}\rho_{ba}-V_{ba}\rho_{ab}]\\&=-[\mathrm{i}\hbar^{-1}V_{ab}\rho_{ba}+\mathrm{c.c.}]\end{aligned} \tag{3.55}$$

同理可得到

$$\dot{\rho}_{bb}=-[\mathrm{i}\hbar^{-1}V_{ab}\rho_{ba}+\mathrm{c.c.}] \tag{3.56}$$

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_{ab}&=-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\{(H_{aa}\rho_{ab}+H_{ab}\rho_{bb})-(H_{aa}\rho_{ab}+H_{ab}\rho_{bb})\}\\&=-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\{(\hbar\omega_a-\hbar\omega_b)\rho_{ab}+V_{ab}\rho_{bb}-V_{ab}\rho_{aa}\}\\&=-\mathrm{i}\bar{\omega}\rho_{ab}+\mathrm{i}\hbar^{-1}V_{ab}(\rho_{aa}-\rho_{bb})\end{aligned} \tag{3.57}$$

方程(3.55)~(3.57)就是没有考虑原子的衰减过程的光学布洛赫方程.

也可以将方程写成另外的形式.令

$$\left.\begin{aligned}u(t)&=\rho_{ab}+\rho_{ba}\\v(t)&=i(\rho_{ab}-\rho_{ba})\\w(t)&=(\rho_{aa}-\rho_{bb})\end{aligned}\right\} \tag{3.58}$$

并考虑到

$$V_{ab}=-\mu_{ab}E \tag{3.59}$$

$$\left.\begin{aligned}\dot{u}(t)&=-\bar{\omega}v\\ \dot{v}(t)&=\bar{\omega}\mu+\frac{2}{\hbar}\mu_{ab}Ew\\ \dot{w}(t)&=-\frac{2}{\hbar}\mu_{ab}Ev\end{aligned}\right\}\tag{3.60}$$

方程(3.60)是直接由(3.55)～(3.58)得到的.

将方程(3.60)与麦克斯韦方程联立,便是著名的 Jaynes－Cummings 模型,可用于研究光学混沌和若干其他问题.

3.5.2 衰减过程

令原子上、下能级的衰减分别为 γ_a,γ_b,则衰减过程的影响是

$$\left.\begin{aligned}\dot{\rho}_{aa}&=-\gamma_a\rho_{aa}\\ \dot{\rho}_{bb}&=-\gamma_b\rho_{bb}\end{aligned}\right\}\tag{3.61}$$

由于 $\rho_{aa}=c_a^* c_a$,可形式上考查 c_a,c_a^*,并注意 γ_a 和 γ_b 是实数,则

$$\left.\begin{aligned}\dot{c}_a&=-\frac{\gamma_a}{2}c_a\\ \dot{c}_a^*&=-\frac{\gamma_a}{2}c_a^*\\ \dot{c}_b&=-\frac{\gamma_b}{2}c_b\\ \dot{c}_b^*&=-\frac{\gamma_b}{2}c_b^*\end{aligned}\right\}\tag{3.62}$$

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_{ab}&=\dot{c}_b^* c_a+c_b^*\dot{c}_a\\ &=-\frac{1}{2}(\gamma_a+\gamma_b)c_b^* c_a\\ &=-\gamma_{ab}\rho_{ab}\end{aligned}\tag{3.63}$$

其中

$$\gamma_{ab}=\frac{1}{2}(\gamma_a+\gamma_b)\tag{3.64}$$

这样,由于原子的衰减,也会导致原子的电偶极矩 ρ_{ab} 的衰减. 由电磁学和电动力学可知,电偶极矩的衰减(即类似电偶极振子衰减)必然使辐射的谱线有一定的线宽.

此外,由于原子之间的碰撞、固体介质中的声子与离子的作用等,也会引起谱线加宽,而谱线加宽就对应一定的衰减过程. 对于多个原子,若设法使 N 个原子的电偶极子同位相振荡,这种衰减过程会使它们的位相趋于混乱,使宏观极化强度减小. 因此这种衰减过程称为“解相”(dephasing),相应的衰减常数记为 γ_{ph},下标即 phase(位相).

这样，考虑到 γ_{ab} 和 γ_{ph}，得到横向弛豫参数.

$$\gamma_{\perp}=\gamma_{ab}+\gamma_{ph} \tag{3.65}$$

这样，考虑到衰减过程，再加入对原子的泵浦或激发过程，则得到光学布洛赫方程

$$\dot{\rho}_{ab}=-(\mathrm{i}\bar{\omega}+\gamma_{\perp})\rho_{ab}+\mathrm{i}\hbar^{-1}V_{ab}(\rho_{aa}-\rho_{bb}) \tag{3.66}$$

$$\dot{\rho}_{aa}=\lambda'_{a}-\gamma_{a}\rho_{aa}-(\mathrm{i}\hbar^{-1}V_{ab}\rho_{ba}+\mathrm{c.c.}) \tag{3.67}$$

$$\dot{\rho}_{bb}=\lambda'_{b}-\gamma_{b}\rho_{bb}+(\mathrm{i}\hbar^{-1}V_{ab}\rho_{ba}+\mathrm{c.c.}) \tag{3.68}$$

其中 λ'_{a} 和 λ'_{b} 代表泵浦过程.

当光场为零时，由方程(3.67)和(3.68)的定态解得到“反转粒子数”

$$d_{0}=(\rho_{aa}-\rho_{bb})_{0}=\lambda'_{a}/\gamma_{a}-\lambda'_{b}/\gamma_{b} \tag{3.69}$$

光场与原子的作用使 $(\rho_{aa}-\rho_{bb})$ 偏离定态值 $(\rho_{aa}-\rho_{bb})_{0}$，而弛豫过程则使 $(\rho_{aa}-\rho_{bb})$ 趋向 $(\rho_{aa}-\rho_{bb})_{0}$，这样，当考虑到泵浦过程和衰减过程，并假定 $\gamma_{a}=\gamma_{b}=\gamma_{\parallel}$，由(3.67)与(3.68)式相减，再利用(3.69)式，则得到“反转粒子数”方程

$$\begin{aligned}(\dot{\rho}_{aa}-\dot{\rho}_{bb})=&-\gamma_{\parallel}[(\rho_{aa}-\rho_{bb})-(\rho_{aa}-\rho_{bb})_{0}]\\&-2[\mathrm{i}\hbar^{-1}V_{ab}\rho_{ba}+\mathrm{c.c.}]\end{aligned} \tag{3.70}$$

这样就得到了光学布洛赫方程 $\dot{\rho}_{aa}$ 和 $(\dot{\rho}_{aa}-\dot{\rho}_{bb})$. 方程中各项的物理意义是清楚的：

(1) $-\gamma_{a}\rho_{aa}$，$-\gamma_{b}\rho_{bb}$ 代表粒子数的衰减.

(2) $-\gamma_{\perp}\rho_{ab}$ 代表偶极矩的衰减，使辐射的谱线有一定宽度. 谱线半宽度 $\Delta\omega/2=\gamma_{\perp}$.

(3) $\dot{\rho}_{ab}=-\mathrm{i}\bar{\omega}\rho_{ab}$ 的项，其解 $\rho_{ab}=\rho_{ab}(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\bar{\omega}t}$. 这是光场为零、衰减为零时的电偶极振荡，振荡频率等于原子跃迁频率. 由此还可知 ρ_{ab} 是原子的电偶极矩的正频分量.

(4) $(\dot{\rho}_{aa}-\dot{\rho}_{bb})$ 中的最后一项 $2[\mathrm{i}\hbar^{-1}V_{ab}\rho_{ba}+\mathrm{c.c.}]$ 是受激辐射项.

(5) ρ_{ab} 中的最后一项 $\mathrm{i}\hbar^{-1}V_{ab}(\rho_{aa}-\rho_{bb})$ 表示光与原子(偶极子)的能量交换，它取决于 $(\rho_{aa}-\rho_{bb})$ 的符号. $(\rho_{aa}-\rho_{bb})>0$ 时，光场得到能量；反之，光场被吸收. 这正对应于激光原理中的粒子数反转的含义.

3.6 慢变振幅近似与旋转波近似

本节利用慢变振幅近似和旋转波近似，简化光学布洛赫方程.

考虑线偏振光与二能级原子的作用，光场

$$E=E_{0}\cos\omega t=\frac{1}{2}E_{0}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}) \tag{3.71}$$

$$V_{ab}=-\mu_{ab}E=-\frac{1}{2}\mu_{ab}E_0(e^{-i\omega t}+e^{i\omega t}) \tag{3.72}$$

将 V_{ab} 代入 $\dot{\rho}_{ab}$ 的公式(3.66),则

$$\dot{\rho}_{ab}=-(i\bar{\omega}+\gamma_\perp)\rho_{ab}-\frac{i\mu_{ab}E_0}{2\hbar}(e^{-i\omega t}+e^{i\omega t})(\rho_{aa}-\rho_{bb}) \tag{3.73}$$

由于在光场为零时原子按下式振荡

$$\rho_{ab}=\rho_{ab}^{(0)}\exp[-(i\bar{\omega}+\gamma_\perp)t] \tag{3.74}$$

将(3.74)代入(3.73),即把 $\rho_{ab}^{(0)}(t)$ 作为零级近似,

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_{ab}^{(0)}=&-\frac{i\mu_{ab}E_0}{2\hbar}(\rho_{aa}-\rho_{bb})\{\exp[-i(\omega-\bar{\omega}+i\gamma_\perp)t]\\&+\exp[i(\omega+\bar{\omega}-i\gamma_\perp)t]\}\end{aligned} \tag{3.75}$$

在一级近似下,把其中的 $(\rho_{aa}-\rho_{bb})$ 当成常数,忽略它随时间的变化.对(3.75)式积分,则

$$\rho_{ab}^{(0)}=\frac{\mu_{ab}E_0}{2\hbar}(\rho_{aa}-\rho_{bb})\left\{\frac{\exp[-i(\omega-\bar{\omega}+i\gamma_\perp)t]}{(\omega-\bar{\omega}+i\gamma_\perp)}-\frac{\exp[i(\omega+\bar{\omega}-i\gamma_\perp)t]}{(\omega+\bar{\omega}-i\gamma_\perp)}\right\} \tag{3.76}$$

在上式中,大括号内的第二项远小于第一项,故略去第二项.这就是旋转波近似,

$$\rho_{ab}^{(0)}=\frac{\mu_{ab}E_0}{2\hbar}(\rho_{aa}-\rho_{bb})\frac{\exp[-i(\omega-\bar{\omega}+i\gamma_\perp)t]}{(\omega-\bar{\omega}+i\gamma_\perp)} \tag{3.77}$$

代回到(3.74)式,

$$\rho_{ab}=\frac{\mu_{ab}E_0}{2\hbar}\frac{\rho_{aa}-\rho_{bb}}{(\omega-\bar{\omega}+i\gamma_\perp)}\exp(-i\omega)t \tag{3.78}$$

即原子在光场的作用下按 $e^{-i\omega t}$ 振荡.这正是熟知的强迫振荡特性.

当然,一般情况下 $(\rho_{aa}-\rho_{bb})$ 不是常数,这样只能用严格的光学布洛赫方程描述 ρ_{ab}.参照(3.78)式,令

$$\rho_{ab}=\tilde{\rho}_{ab}\exp(-i\omega t) \tag{3.79}$$

其中 $\tilde{\rho}_{ab}$ 是慢振幅,将(3.79)式代入(3.66)式,在旋转波近似下得到

$$\dot{\tilde{\rho}}_{ab}=-i(\bar{\omega}-\omega)\tilde{\rho}_{ab}-\frac{i\mu_{ab}}{2\hbar}E_0(\rho_{aa}-\rho_{bb})-\gamma_\perp\tilde{\rho}_{ab} \tag{3.80}$$

同理得到

$$(\dot{\rho}_{aa}-\dot{\rho}_{bb})=-\frac{i\mu_{ab}E_0}{\hbar}(\tilde{\rho}_{ab}-\tilde{\rho}_{ba})-\gamma_\parallel[(\rho_{aa}-\rho_{bb})-(\rho_{aa}-\rho_{bb})_0] \tag{3.81}$$

(3.80)式和(3.81)式就是旋转波近似和慢变振幅近似的光学布洛赫方程.

定义

$$\tilde{u}=\tilde{\rho}_{ab}+\tilde{\rho}_{ba} \tag{3.82}$$

$$\tilde{v}=\mathrm{i}(\tilde{\rho}_{ab}-\tilde{\rho}_{ba}) \tag{3.83}$$

$$w=\rho_{aa}-\rho_{bb} \tag{3.84}$$

由方程(3.80)容易得到

$$\dot{\tilde{\rho}}_{ab}+\dot{\tilde{\rho}}_{ba}=-\mathrm{i}(\bar{\omega}-\omega)(\tilde{\rho}_{ab}-\tilde{\rho}_{ba})-\gamma_{\perp}(\tilde{\rho}_{ab}+\tilde{\rho}_{ba}) \tag{3.85}$$

$$\mathrm{i}(\dot{\tilde{\rho}}_{ab}-\dot{\tilde{\rho}}_{ba})=(\bar{\omega}-\omega)(\tilde{\rho}_{ab}+\tilde{\rho}_{ba})+\frac{\mu_{ab}E_0}{\hbar}(\rho_{aa}-\rho_{bb})$$

$$-\mathrm{i}\gamma_{\perp}(\tilde{\rho}_{ab}-\tilde{\rho}_{ba}) \tag{3.86}$$

这样,利用方程(3.85),(3.86),(3.81)以及 $\tilde{u},\tilde{v},w$ 的定义,立刻得到

$$\dot{\tilde{u}}=-(\bar{\omega}-\omega)\tilde{v}-\gamma_{\perp}\tilde{u} \tag{3.87}$$

$$\dot{\tilde{v}}=(\bar{\omega}-\omega)\tilde{u}+\frac{\mu_{ab}E_0}{\hbar}w-\gamma_{\perp}\tilde{v} \tag{3.88}$$

$$\dot{w}=-\frac{\mu_{ab}E_0}{\hbar}\tilde{v}-\gamma_{\parallel}(w-w_0) \tag{3.89}$$

或者利用 $\gamma_{\parallel}=1/T_1,\gamma_{\perp}=1/T_2$,并略去“波浪号~”,

$$\dot{u}=-(\bar{\omega}-\omega)v-u/T_2 \tag{3.90}$$

$$\dot{v}=(\bar{\omega}-\omega)u+\frac{\mu E_0}{\hbar}w-v/T_2 \tag{3.91}$$

$$\dot{w}=-\frac{\mu E_0}{\hbar}v-(\omega-\omega_0)/T_1 \tag{3.92}$$

为了简单,其中 $\mu\equiv\mu_{ab}$

u,v 和 w 的物理意义是显而易见的,$w=(\rho_{aa}-\rho_{bb})$ 与反转粒子数 D 有关.

$$D=N'w=N'(\rho_{aa}-\rho_{bb}) \tag{3.93}$$

按照 u,v 的定义

$$\tilde{\rho}_{ab}=\frac{1}{2}(\tilde{u}-\mathrm{i}\tilde{v}) \tag{3.94}$$

$$\mathrm{Re}(\tilde{\rho}_{ab})=\frac{1}{2}\tilde{u} \tag{3.95}$$

$$\mathrm{Im}(\tilde{\rho}_{ab})=-\frac{1}{2}\tilde{v} \tag{3.96}$$

$\tilde{\rho}_{ab}$ 是原子偶极矩的正频分量的慢变振幅. $\tilde{u}$ 对应 $\tilde{\rho}_{ab}$ 的实部,即代表色散;$\tilde{v}$ 对应 $\tilde{\rho}_{ab}$ 的虚部,代表吸收或放大. 若总的原子数目为 N',则极化强度的正频分量的慢变振幅是

$$P_0^{(+)}=N'\mu_{ab}\tilde{\rho}_{ab}=N'\mu_{ab}\left[\frac{1}{2}(\tilde{u}-\mathrm{i}\tilde{v})\right] \tag{3.97}$$

本节得到的光学布洛赫方程广泛用于研究激光与物质的作用，包括相干作用、位相复共轭光学等.

3.7 光学布洛赫方程的矢量模型

本节给出光学布洛赫方程的矢量模型，并给出其几何图像，这样可使物理图像更清晰，并且通过与磁共振现象的类比，有利于研究与磁共振相似的光学现象(拉比振荡与光子回声等)；

在假想的三维空间 $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ 中，定义布洛赫矢量

$$\boldsymbol{B}=(u,v,w) \tag{3.98}$$

其中略去了 $\tilde{u}$ 和 $\tilde{v}$ 的波浪号. 再定义 $\boldsymbol{\beta}$ 矢量，

$$\boldsymbol{\beta}=\left(-\frac{\mu E_0}{\hbar},0,(\bar{\omega}-\omega)\right) \tag{3.99}$$

则光学布洛赫方程可写成陀螺方程

$$\dot{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{B} \tag{3.100}$$

当 $\gamma_{\parallel}=\gamma_{\perp}=\gamma$ 时，光学布洛赫方程为

$$\dot{\boldsymbol{B}}=-\gamma\boldsymbol{B}+\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{B} \tag{3.101}$$

由力学中的陀螺方程的几何图像可知，$\dot{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{B}$，就表示在 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 坐标轴的假想的空间中，布洛赫矢量 $\boldsymbol{B}$ 绕 $\boldsymbol{\beta}$ 轴转动，转动方向由右手定则决定，转动的角频率等于 $\boldsymbol{\beta}$ 轴的长度 $|\boldsymbol{\beta}|$. 由(3.99)式可知，$\boldsymbol{\beta}$ 轴沿 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 和 $\boldsymbol{e}_3$ 的3个分量分别是 $\left(-\frac{\mu E_0}{\hbar}\right)$，0 和 $(\bar{\omega}-\omega)$，它们能决定 $\boldsymbol{\beta}$ 轴的方向和大小.

因此，光学布洛赫矢量的旋转的角频率是

$$\Omega_{\mathrm{R}}=|\boldsymbol{\beta}|=\sqrt{\left(-\frac{\mu E_0}{\hbar}\right)^2+(\bar{\omega}-\omega)^2} \tag{3.102}$$

共振时，$\bar{\omega}=\omega$

$$\Omega'_{\mathrm{R}}=\frac{\mu E_0}{\hbar} \tag{3.103}$$

Ω_{R} 和 Ω'_{R} 分别称为一般情况的拉比(Rabi)频率和共振情况的拉比频率.

光学布洛赫方程的矢量模型的几何图像如图 3.2 和图 3.3 所示.

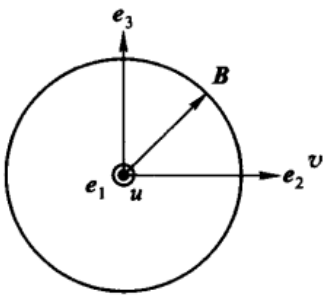


图 3.2 布洛赫矢量旋转的几何图像，共振时($\bar{\omega}=\omega$)

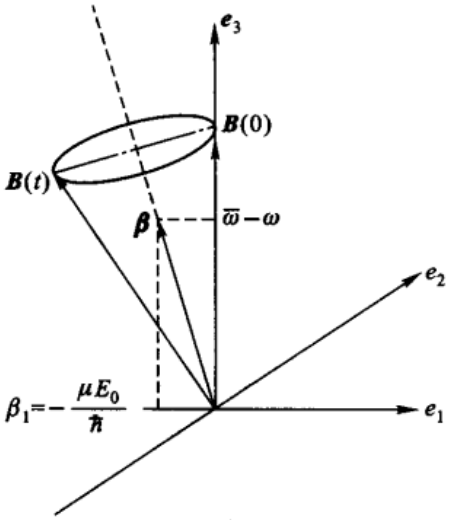


图 3.3 布洛赫矢量旋转的几何图像，非共振时

现在把光学布洛赫方程矢量模型的物理意义总结如下：

(1) 在假想的空间($\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$)内，光学布洛赫矢量 $\boldsymbol{B}$ 和转轴 $\boldsymbol{\beta}$ 分别定义为

$$\boldsymbol{B}=(u,v,w)=u\boldsymbol{e}_1+v\boldsymbol{e}_2+w\boldsymbol{e}_3 \tag{3.104}$$

$$\boldsymbol{\beta}=\left(-\frac{\mu E_0}{\hbar},0,\bar{\omega}-\omega\right)=-\frac{\mu E_0}{\hbar}\boldsymbol{e}_1+(\bar{\omega}-\omega)\boldsymbol{e}_3 \tag{3.105}$$

特别注意 u 和 v 分别代表色散和吸收，沿第一、二轴；“反转粒子数”w 沿第三个轴；而 $\boldsymbol{\beta}$ 的第一个分量为 $\left(-\frac{\mu E_0}{\hbar}\right)$，沿 $-\boldsymbol{e}_1$ 轴，第三个分量与($\bar{\omega}-\omega$) 的符号有关，或沿 $+\boldsymbol{e}_3$($\bar{\omega}>\omega$)，$-\boldsymbol{e}_3$($\bar{\omega}<\omega$) 或为零($\bar{\omega}=\omega$).

(2) 布洛赫矢量的转动方向由右手定则决定(即 $\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{B}$ 的方向)，旋转的角速度即拉比频率为

$$\Omega_R=|\boldsymbol{\beta}|=\sqrt{\left(-\frac{\mu E_0}{\hbar}\right)^2+(\bar{\omega}-\omega)^2}$$

共振时则为 $\Omega'_R=\frac{\mu E_0}{\hbar}$.

(3) 在图 3.2 中，因为共振条件 $\bar{\omega}=\omega$，所以 $\boldsymbol{\beta}=\left(-\frac{\mu E_0}{\hbar},0,0\right)$. 又由于共振时色散分量 u 为零，所以

$$\boldsymbol{B}=v\boldsymbol{e}_2+w\boldsymbol{e}_3 \tag{3.106}$$

$$\boldsymbol{\beta}=-\frac{\mu E_0}{\hbar}\boldsymbol{e}_1 \tag{3.107}$$

因为 $\boldsymbol{\beta}=-\frac{\mu E_0}{\hbar}\boldsymbol{e}_1$，所以 $\boldsymbol{\beta}$ 沿 $-\boldsymbol{e}_1$ 的方向. $\boldsymbol{B}$ 在 $\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3$ 平面内，即 $\boldsymbol{B}$ 绕 $-\boldsymbol{e}_1$ 轴在平面 $\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3$ 内旋转，在 $\boldsymbol{B}$ 旋转时，$w(t)=\rho_{aa}-\rho_{bb}$ 可以从 $+1$ 变到 -1.

(4) 在非共振时，即图 3.3 所示的情况下

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{B}&=u\boldsymbol{e}_1+v\boldsymbol{e}_2+w\boldsymbol{e}_3\\ \boldsymbol{\beta}&=-\frac{\mu E_0}{\hbar}\boldsymbol{e}_1+(\bar{\omega}-\omega)\boldsymbol{e}_3\end{aligned}\right\} \tag{3.108}$$

即 $\boldsymbol{B}$ 有 3 个不为零的分量. $\boldsymbol{\beta}$ 有 2 个不为零的分量. $\boldsymbol{\beta}$ 的第一个分量是沿 $-\boldsymbol{e}_1$ 方向. 另外，若初值 $w(0)=1$，则在 $\boldsymbol{B}$ 旋转时，永远不可能达到 $w=-1$，反之，若 $w(0)=-1$，永远不可能达到 $w=1$.

(5) 当 $\boldsymbol{B}$ 绕 $\boldsymbol{\beta}$ 旋转时，$\boldsymbol{B}$ 在 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 上的投影即 u,v,w 都在随时间变化，即原子的偶极矩和“反转粒子数”都在按此规律变化.

(6) 无耗散时($\gamma_{\parallel}=\gamma_{\perp}=0$)，可以证明布洛赫矢量在旋转时保持长度不变，或

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u^2+v^2+w^2)=0 \tag{3.109}$$

而有耗散时，则 $\boldsymbol{B}$ 一边旋转并一边收缩，即反转粒子数和原子偶极矩在衰减.

(7) 在力学的陀螺问题中，陀螺绕自己的轴旋转，而陀螺的轴也在旋转. 在光学布洛赫方程(3.102)的情况，$\boldsymbol{B}$ 绕 $\boldsymbol{\beta}$ 旋转，而 $\boldsymbol{\beta}$ 不动. 这是因为这里选择的坐标系 $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ 在旋转，而在此旋转坐标系中，$\boldsymbol{\beta}$ 就不旋转了.

光学布洛赫方程及其矢量模型有广泛的应用. 在第 8 章中将用于研究光的相干作用.

3.8 光学布洛赫方程的定态解

本节将给出光学布洛赫方程的定态解，它有重要的物理意义和应用.

在定态条件下，

$$\dot{u}=\dot{v}=\dot{w}=0 \tag{3.110}$$

由方程(3.90)和(3.92)直接得到

$$u=-(\bar{\omega}-\omega)T_2 v \tag{3.111}$$

$$w=-\frac{\mu E_0}{\hbar}T_1 v+w_0 \tag{3.112}$$

再代入 $\dot{v}=0$ 的方程(3.91)，则得到

$$v=\left(\frac{\mu E_0}{\hbar}\right)w_0 T_2 \frac{1}{1+(\bar{\omega}-\omega)^2 T_2^2+\left(\frac{\mu E_0}{\hbar}\right)^2 T_1 T_2} \tag{3.113}$$

将 v 代入(3.111)和(3.112)式,分别得到

$$u=\left(\frac{\mu E_0}{\hbar}\right)w_0 T_2 \frac{-(\bar{\omega}-\omega)^2 T_2^2}{1+(\bar{\omega}-\omega)^2 T_2^2+\left(\frac{\mu E_0}{\hbar}\right)^2 T_1 T_2} \tag{3.114}$$

$$w=w_0 \frac{1+(\bar{\omega}-\omega)^2 T_2^2}{1+(\bar{\omega}-\omega)^2 T_2^2+\left(\frac{\mu E_0}{\hbar}\right)^2 T_1 T_2} \tag{3.115}$$

显然,共振时($\bar{\omega}=\omega$),$u=0$,v 最大,即色散为零,吸收或增益最大.

由 u,v 和 w 容易求出反转粒子数 D,极化强度 P 以及极化率 χ' 和 χ''

$$D=N'w=D_0\left\{\frac{1+(\bar{\omega}-\omega)^2 T_2^2}{1+(\bar{\omega}-\omega)^2 T_2^2+\left(\frac{\mu E_0}{\hbar}\right)^2 T_1 T_2}\right\} \tag{3.116}$$

$$P=N'\mu\left[\frac{1}{2}(u-\mathrm{i}v)\right]=\varepsilon_0(\chi'+\mathrm{i}\chi'')\frac{E_0}{2} \tag{3.117}$$

将 u 和 v 代入,则

$$P=-\left(\frac{\mu E_0}{2\hbar}\right)D_0\mu T_2\left\{\frac{(\bar{\omega}-\omega)T_2+\mathrm{i}}{1+(\bar{\omega}-\omega)^2 T_2^2+\left(\frac{\mu E_0}{\hbar}\right)^2 T_1 T_2}\right\} \tag{3.118}$$

$$\left.\begin{aligned}\bar{\Delta}&=(\bar{\omega}-\omega)T_2=(\bar{\omega}-\omega)/\gamma_\perp\\ |E_s|^2&=\hbar^2/(\mu^2 T_1 T_2)\\ \alpha_0&=-\mu^2 D_0 T_2 k_0/(\varepsilon_0\hbar)\end{aligned}\right\} \tag{3.119}$$

其中 k_0 是波数,$\bar{\Delta}$ 是以谱线半宽度($\gamma_\perp$)为单位的归一化的“失谐参数”,$|E_s|^2$ 是饱和光强,α_0 是小信号共振吸收系数. 这样极化率为

$$\chi=\chi'+\mathrm{i}\chi''=\frac{\alpha}{k_0}\frac{\mathrm{i}+\bar{\Delta}}{1+\bar{\Delta}^2+(E_0/E_s)^2} \tag{3.120}$$

因相对介电常数 $\varepsilon_r=1+\chi$,折射率

$$n_r=\sqrt{\varepsilon_r}\approx(1+\chi'/2)+\mathrm{i}\chi''/2 \tag{3.121}$$

代入行波光场的 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}$ 因子并注意 $k=k_0 n_r$,则

$$\begin{aligned}E(z,t)&=E_0\exp(\mathrm{i}k_0 n_r z)\exp(-\mathrm{i}\omega t)\\&=E_0\exp\left(-\frac{1}{2}k_0\chi''z\right)\exp\left[-\mathrm{i}\omega t+\mathrm{i}k_0 z\left(1+\frac{1}{2}\chi'\right)\right]\end{aligned} \tag{3.122}$$

由此求得光场增益为$-\frac{1}{2}k_0\chi''$，光强增益$G=-k_0\chi''$

$$G=-k_0\chi''=k_0\frac{\mu^2T_2}{\varepsilon_0\hbar}D_0\frac{1}{1+\bar{\Delta}^2+|E_0/E_s|^2} \tag{3.123}$$

习题与思考

(1) 什么是纯系综、混合系综、密度矩阵?

(2) 激光半经典理论的近似条件的含义是什么?

(3) 光学布洛赫方程各项的物理意义是什么?

(4) 详细讨论光学布洛赫方程的几何图像与相应的物理意义. 证明无耗散时 B 为常数.

(5) 由 $\dot{\rho}_{ab}$，$\dot{\rho}_{aa}$和$\dot{\rho}_{bb}$的方程求定态的ρ_{ab}.

(6) 由 $\dot{u}$，$\dot{v}$，$\dot{w}$的方程求共振时小信号增益.

(7) 证明在共振和小信号时，增益公式(3.123)与第 1 章的均匀加宽的增益公式相同.

(8) 推导三能级系统的光学布洛赫方程.

(9) 利用 SU(3)群的知识，将三能级系统的光学布洛赫方程写成矢量形式.

参 考 文 献

[1] Bloch F. Nuclear induction. Phys. Rev. ,1946,70:460 - 468.

[2] Dicke R H. Coherence in Spontaneous radiation processes. Phys. Rev. ,1954,93: 99 - 103.

[3] Fano U. Description of states in Quantum mechanics by density matrix and operator techniques. Rev. Mod. Phys. ,1957,29:74 - 78.

[4] Lamb J W E. Theory of optical maser oscillators. Proceedings of the international school of physics, course XXXI. 1964.

[5] Sargent Ⅲ M, Toschek P E, Danielmeyer H G. Unidirectional saturation spectroscopy, I: Theory and short dipole lifetime limit. Appl. Phys. ,1976,11:56 - 60.

第 4 章　麦克斯韦-布洛赫方程

在研究光与物质作用的半经典理论中，用麦克斯韦方程描述光场，用光学布洛赫方程描述原子或分子系统. 这组方程称为麦克斯韦-布洛赫方程，简称 M－B 方程. M－B 方程是激光理论的核心.

本章首先介绍麦克斯韦方程，接着用最简捷的方法推导光学布洛赫方程，然后推导出哈肯的激光方程. 本章具有相对独立性，是全书的重要基础. 第 5～12 章基本上是 M－B 方程的具体应用. M－B 方程还可用于共振荧光和超荧光等问题. 而激光与物质作用的全量子理论与哈肯的全量子激光理论，则是全量子化的麦克斯韦-布洛赫方程.

4.1　麦克斯韦方程与场方程

不论研究激光器，还是研究激光与物质的作用，最典型的问题是光与原子的作用. 在半经典理论中，把光看成经典的电磁场，用麦克斯韦方程描述，把原子看成量子化的，用量子力学描述. 具体说，光是由麦克斯韦方程或场方程描述，原子是由光学布洛赫方程描述. 光学布洛赫方程是薛定谔方程的特殊应用.

在场方程中，极化强度是光场的辐射源，而极化强度又是由大量原子的偶极矩决定的. 原子偶极矩由光学布洛赫方程描述. 因此，光与原子的作用或耦合，决定了麦克斯韦方程与光学布洛赫方程是耦合在一起的. 这一组耦合的方程，称为麦克斯韦-布洛赫方程，简称 M－B 方程.

本节从麦克斯韦方程组出发，推导出光的电场强度满足的方程，即场方程. 用 MKS 单位制，麦克斯韦方程组为

$$\left.\begin{aligned} &\nabla \cdot \boldsymbol{D}=0 \\ &\nabla \cdot \boldsymbol{B}=0 \\ &\nabla \times \boldsymbol{E}=-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\ &\nabla \times \boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{D}&=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}\\ \boldsymbol{B}&=\mu_0\boldsymbol{H}\\ \boldsymbol{J}&=\sigma\boldsymbol{E}\end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

μ_0和ε_0分别是真空磁导率和真空介电常数. 它们决定真空中的光速,即

$$c^2=1/(\mu_0\varepsilon_0) \tag{4.3}$$

由于在激光介质中,一般没有自由电荷,故$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=0$. 上述方程中的电导率$\sigma$只是唯象引入的常数,用来代表腔的损耗所引起的光场衰减. 可把σ看成等效的欧姆电导. 特别注意方程中$\boldsymbol{P}$是极化强度,用量子力学计算.

将$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$的两端取旋度(用$\nabla$叉乘),再用(4.2)式及$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$则

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}+\mu_0\sigma\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=-\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{P}}{\partial t^2} \tag{4.4}$$

用场论公式将$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}$简化,则

$$\begin{aligned}\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}&=-\nabla^2\boldsymbol{E}+\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E})\\&=-\nabla^2\boldsymbol{E}+\varepsilon_0\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{D}-\nabla\cdot\boldsymbol{P})=-\nabla^2\boldsymbol{E}\end{aligned} \tag{4.5}$$

其中用到$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$,$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=0$并假定了$\nabla\cdot\boldsymbol{P}=0$. 将(4.5)式代入(4.4)式,并利用$c^2=1/(\mu_0\varepsilon_0)$,则有

$$\Delta\boldsymbol{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}-\mu_0\sigma\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{P}}{\partial t^2} \tag{4.6}$$

这就是场方程. 上式中的拉普拉斯算子即

$$\Delta=\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{4.7}$$

在场方程(4.6)中,$\boldsymbol{P}$是极化强度.

4.2 光学布洛赫方程的简明推导

本节用量子力学的初步知识推导光学布洛赫方程. 这是哈肯学派的理论基础.

采用二能级模型(如图4.1),即只考虑激光跃迁的上、下能级. 上、下能级的本征值分别为$E_a=\hbar\omega_a$和$E_b=\hbar\omega_b$;本征函数分别为ϕ_a和ϕ_b.

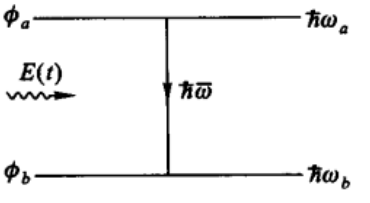


图4.1 二能级原子模型

原子在二能级间跃迁对应的光频率为

$$\bar{\omega}=(E_a-E_b)/\hbar=\omega_a-\omega_b \tag{4.8}$$

考虑该二能级原子与光场 $E(t)$ 的作用. 假定在无光场作用时，原子没有固有的电偶极矩(即正负电荷中心重合). 而在光场作用下，原子的正负电荷中心分开，即产生感应极化. 设电子从平衡位置偏离 $\boldsymbol{r}$，则电子偶极矩是

$$\boldsymbol{p}=-q\boldsymbol{r}=-|e|\boldsymbol{r} \tag{4.9}$$

其中 $q=|e|$，e 是基本电荷. 光场与原子的相互作用哈密顿量是

$$V=-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}(t)=q\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{E}(t) \tag{4.10}$$

总哈密顿量是

$$H=H_0+V=H_0+q\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{E}(t) \tag{4.11}$$

薛定谔方程是

$$\mathrm{i}\hbar\dot{\psi}=H\psi \tag{4.12}$$

本征方程是

$$H_0\phi_a=\hbar\omega_a\phi_a \tag{4.13}$$

$$H_0\phi_b=\hbar\omega_b\phi_b \tag{4.14}$$

注意 ϕ_a 和 ϕ_b 是完备、正交和归一的. 将波函数按 ϕ_a 和 ϕ_b 展开，即

$$\psi(r,t)=c_a(t)\exp\left[-\mathrm{i}\omega_a t\right]\phi_a(r)+c_b(t)\exp\left[-\mathrm{i}\omega_b t\right]\phi_b(r) \tag{4.15}$$

其中展开系数的物理意义是显而易见的，$|c_a|^2$ 和 $|c_b|^2$ 分别是电子出现在 ϕ_a 及 ϕ_b 的几率，也即原子分别处于上、下能态的几率.

将波函数 $\psi(r,t)$ 代入薛定谔方程(4.12)，

$$\begin{aligned}&\mathrm{i}\hbar\{\dot{c}_a\exp\left[-\mathrm{i}\omega_a t\right]\phi_a-\mathrm{i}\omega_a c_a\exp\left[-\mathrm{i}\omega_a t\right]\phi_a\\&\quad+\dot{c}_b\exp\left[-\mathrm{i}\omega_b t\right]\phi_b-\mathrm{i}\omega_b c_b\exp\left[-\mathrm{i}\omega_b t\right]\phi_b\}\\&=c_a\exp\left[-\mathrm{i}\omega_a t\right](\hbar\omega_a)\phi_a+c_a\exp\left[-\mathrm{i}\omega_a t\right]V\phi_a\\&\quad+c_b\exp\left[-\mathrm{i}\omega_b t\right](\hbar\omega_b)\phi_b+c_b\exp\left[-\mathrm{i}\omega_b t\right]V\phi_b\end{aligned} \tag{4.16}$$

将(4.16)式两边分别左乘 ϕ_a^*，对 r 积分，再利用 ϕ_a 和 ϕ_b 的正交归一性，可求出 $\dot{c}_a$. 同理可求 $\dot{c}_b$. 这样得到

$$\dot{c}_a=\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}V_{ab}\exp\left[\mathrm{i}\bar{\omega}t\right]c_b \tag{4.17}$$

$$\dot{c}_b=\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}V_{ba}\exp\left[-\mathrm{i}\bar{\omega}t\right]c_a \tag{4.18}$$

其中用到

$$\left.\begin{aligned}V_{aa}&=0\\V_{bb}&=0\end{aligned}\right\} \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned} V_{ab} &= \int \phi_a^* qrE(t)\phi_b \mathrm{d}^3 r \\ &= E(t)\int \phi_a^* (qr)\phi_b \mathrm{d}^3 r \\ &= E(t)\theta_{ab} = V_{ba}^* \end{aligned} \tag{4.20}$$

特别注意原子的电偶极矩的矩阵元定义为

$$\theta_{ab} = \int \phi_a^* (qr)\phi_b \mathrm{d}^3 r = |q| r_{ab} = -er_{ab} \tag{4.21}$$

显然，θ_{ab} 与第 3 章用的原子偶极矩矩阵元 μ_{ab} 只差一个负号，即

$$\theta_{ab} = -\mu_{ab} \tag{4.22}$$

(4.19)式中 $V_{aa}=V_{bb}=0$ 的含义，显然是因假定原子固有偶极矩为零，即 $\boldsymbol{E}(t)=0$ 时的 $\boldsymbol{p}=-q\boldsymbol{r}=0$，即 $\boldsymbol{p}$ 或 $\boldsymbol{r}$ 完全是光场感应的结果，同时还考虑到了电磁作用的宇称守恒. 显然电偶极矩算符 $(-q\boldsymbol{r})$ 是奇宇称的(即 $\boldsymbol{r}$ 反演时使 $\boldsymbol{p}$ 改变符号)，故宇称守恒定律要求允许的电偶极跃迁的初态和末态的宇称必相反，即只允许 ϕ_a 和 ϕ_b 之间的跃迁(假定 ϕ_a 和 ϕ_b 的宇称相反)，而从 ϕ_a 到 ϕ_a 或从 ϕ_b 到 ϕ_b 的“跃迁”是不允许的. 因此必有 $V_{aa}=0, V_{bb}=0$.

将相互作用的矩阵元 V_{ab} 和 V_{ba} 的公式(4.20)和(4.21)式代入(4.17)及(4.18)式，则得到

$$\dot{c}_a = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}E(t)\theta_{ab}\exp[\mathrm{i}\bar{\omega}t]c_b \tag{4.23}$$

$$\dot{c}_b = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}E(t)\theta_{ba}\exp[-\mathrm{i}\bar{\omega}t]c_a \tag{4.24}$$

由 $\dot{c}_a$ 和 $\dot{c}_b$ 的方程，可以求出原子偶极矩和反转粒子数随时间的变化. 为此，先求原子电偶极矩的期待值

$$\boldsymbol{p} = \int \psi^*(r,t)(-|e|r)\psi(r,t)\mathrm{d}^3 r \tag{4.25}$$

将波函数(4.15)式代入(4.25)式，则得到

$$\boldsymbol{p} = -\{c_a c_b^* \exp[-\mathrm{i}\bar{\omega}t]\theta_{ba} + c_b c_a^* \exp[\mathrm{i}\bar{\omega}t]\theta_{ab}\} \tag{4.26}$$

此式表明，原子电偶极矩的期待值有正频分量 $p^{(+)}$ 及负频分量 $p^{(-)}$ 即

$$p = p^{(+)} + p^{(-)} \tag{4.27}$$

$$\left.\begin{aligned} p^{(+)} &= -\alpha(t)\theta_{ba} \\ p^{(-)} &= -\alpha^*(t)\theta_{ab} \end{aligned}\right\} \tag{4.28}$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha(t) &= c_a c_b^* \exp[-\mathrm{i}\bar{\omega}t] \\ \alpha^*(t) &= c_b c_a^* \exp[\mathrm{i}\bar{\omega}t] \end{aligned}\right\} \tag{4.29}$$

与第 3 章密度矩阵中用的符号比较，可知

$$\left.\begin{aligned} \alpha(t) &= \rho_{ab} \\ \alpha^*(t) &= \rho_{ba} \end{aligned}\right\} \tag{4.30}$$

$\alpha(t)$是原子电偶极矩的正频分量，$\alpha^*(t)$是其负频分量，θ_{ba}是电偶极矩的单位. 为了突出$\alpha(t)$的物理意义，以后就把$\alpha(t)$称为原子的电偶极矩.

将$\alpha(t)$的公式(4.29)对时间t求导数，则

$$\dot{\alpha}=-\mathrm{i}\bar{\omega}\alpha+\dot{c}_a c_b^* \exp[-\mathrm{i}\bar{\omega}t]+c_a\dot{c}_b^* \exp[-\mathrm{i}\bar{\omega}t] \tag{4.31}$$

将$\dot{c}_a$和$\dot{c}_b$的公式(4.23)和(4.24)代入上式，并且利用$\theta_{ab}=\theta_{ba}^*$，则得到

$$\dot{\alpha}=-\mathrm{i}\bar{\omega}\alpha-\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}E(t)\theta_{ba}d \tag{4.32}$$

$$d=|c_a|^2-|c_b|^2 \tag{4.33}$$

考虑到原子的电偶极矩的衰减常数为$\gamma_\perp$，则

$$\dot{\alpha}=-\mathrm{i}\bar{\omega}\alpha-\gamma_\perp\alpha-\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}E(t)\theta_{ab}d \tag{4.34}$$

方程(4.34)中最后一项含有d，即原子占据上、下能级的几率之差. 为了得到“封闭”的方程，下面求出d的方程.

将d的表达式(4.33)对时间求导数，

$$\dot{d}=(\dot{c}_a^* c_a+c_a^*\dot{c}_a)-(\dot{c}_b^* c_b+c_b^*\dot{c}_b) \tag{4.35}$$

再将$\dot{c}_a$和$\dot{c}_b$的公式(4.23)及(4.24)代入上式，则

$$\dot{d}=\frac{2}{\mathrm{i}\hbar}E(t)(\theta_{ab}\alpha^*-\alpha\theta_{ba}) \tag{4.36}$$

考虑到反转粒子数的衰减，即纵向弛豫过程，唯象地引入纵向弛豫速率$\gamma_\parallel$，则

$$\dot{d}=-\gamma_\parallel(d-d_0)+\frac{2}{\mathrm{i}\hbar}E(t)(\theta_{ab}\alpha^*-\alpha\theta_{ba}) \tag{4.37}$$

这里特别指出α和d是单个原子的物理量. 然而研究激光器时，涉及大量原子. 为此，将第μ个原子的α和d加下标，成为α_μ和d_μ，并把$E(t)$看成是第μ个原子的位置的函数，故写为$E(x_\mu,t)$这样，把α和d的方程(4.34)，(4.37)稍加修正，并与麦克斯韦方程写在一起，则得到

$$\Delta E(x,t)-\frac{1}{c^2}\ddot{E}(x,t)-\mu_0\sigma\dot{E}(x,t)=\mu_0\ddot{p}(x,t) \tag{4.38}$$

$$\dot{\alpha}_\mu=(-\mathrm{i}\bar{\omega}_\mu-\gamma_\perp)\alpha_\mu-\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}E(x_\mu,t)\theta_{ab}d_\mu \tag{4.39}$$

$$\dot{d}_\mu=-\gamma_\parallel(d_\mu-d_0)+\frac{2}{\mathrm{i}\hbar}E(x_\mu,t)(\theta_{ab}\alpha_\mu^*-\alpha_\mu\theta_{ba}) \tag{4.40}$$

方程(4.38)即麦克斯韦方程；$\dot{\alpha}_\mu$和$\dot{d}_\mu$的方程即为光学布洛赫方程. M-B方程有生动的物理意义：

(1) 在场方程中，极化强度是场的辐射源，而极化强度即单位体积内

的总的原子电偶极矩 $p(x,t)$ 与 α_μ 有关.

(2) $\alpha=c_a c_b^* \exp(-\mathrm{i}\bar{\omega}t)$ 表明,α 是原子偶极矩的期待值的正频分量,以 θ_{ba} 为单位.

(3) $d=|c_a|^2-|c_b|^2$,即原子出现在上、下能级的几率之差. 令 N' 为总的原子数,则粒子数差 $D=N'd$,而 $D_0=N'd_0$. D_0 是无光场(即 $E(x,t)=0$)时的反转粒子数.

(4) 原子的电偶极矩 α 的方程(4.34)中,第一项代表以角频率 $\bar{\omega}$ 自由振荡,$\bar{\omega}=(E_a-E_b)/\hbar$. 第二项代表衰减(或耗散). $\gamma_\perp$ 是横向弛豫速率. 这样,电偶极子一边以角频率 $\bar{\omega}$ 振荡,一边按 $\gamma_\perp$ 衰减,其辐射必有一定宽度,而谱线的半极大点的半宽度即等于 $\gamma_\perp$.

(5) 原子的电偶极矩方程中第三项至关重要. 它是光场感应的偶极矩(已假定固有偶极矩为零). 特别是它将导致光场与二能级原子之间的能量交换. 回顾电磁学和电动力学,按经典的观点,光场从原子得到能量或者相反原子吸收光场的能量,由光场与电偶极矩二者的位相差决定. (4.39)式表明,按照量子力学的观点,光场与原子之间的能量交换决定于原子的状态,即原子在二能级上的分布的几率之差. 若 $d<0$,则原子吸收光场的能量;反之,若 $d>0$,则光场从原子得到能量,即放大. 因此,d 的符号就决定了光场与原子的能量交换的方向. 而 d 的大小 $|d|$ 则决定能量交换的多少.

(6) 反转粒子数方程(4.40)的第一项代表纵向弛豫或粒子数耗散. d_0 仅仅由泵浦过程和弛豫过程决定,即 $D_0=N'd_0=(\lambda_a/\gamma_a-\lambda_b/\gamma_b)$,与光场 $E(x,t)$ 无关. 方程的第二项代表光与原子的相干作用,即忽略衰减或耗散时的作用. 详见第 8 章相干作用.

(7) 场方程中包含 $\boldsymbol{P}(x,t)$ 和 $\boldsymbol{E}(x,t)$,而原子偶极矩方程和反转粒子数方程含有 α_μ, d_μ 和 $E(x_\mu,t)$,那么这三个方程是怎样"封闭"起来的呢? 实际上是利用极化强度 $P(x,t)$ 与原子偶极矩 α_μ 的关系、反转粒子数 D 与 d 的关系而使 M-B 方程"封闭"起来的.

下面就利用 p_μ 与 α_μ 的关系以及 D 与 d 的关系. 求出 E,P,D 的方程. 注意

$$p_\mu=-(\alpha_\mu(t)\theta_{ba}+\alpha_\mu^*(t)\theta_{ab}) \tag{4.41}$$

$$P(x,t)=\sum_\mu \delta(x-x_\mu)p_\mu \tag{4.42}$$

$$D(x,t)=\sum_\mu \delta(x-x_\mu)d_\mu \tag{4.43}$$

$$D_0=\sum_\mu d_0=N'd_0 \tag{4.44}$$

其中 p_μ 是第 μ 个原子的电偶极矩的期待值，而(4.42)式表示在空间坐标 x 附近的单位体积内总的偶极矩. 这与电磁学或电动力学中对极化强度的定义一致. 我们把极化强度分为正频分量与负频分量，即

$$P(x,t)=P^{(+)}(x,t)+P^{(-)}(x,t) \tag{4.45}$$

$$P^{(+)}(x,t)=-\sum_\mu \delta(x-x_\mu)\theta_{ba}\alpha_\mu(t) \tag{4.46}$$

$$P^{(-)}=P^{(+)*} \tag{4.47}$$

将 $P^{(+)}(x,t)$ 对时间 t 求导数，考虑原子是静止的情况，x 和 x_μ 与 t 无关，$\delta(x-x_\mu)$ 也与 t 无关，因此从(4.46)式得到

$$\dot{P}^{(+)}(x,t)=-\sum_\mu \delta(x-x_\mu)\theta_{ba}\dot{\alpha}_\mu \tag{4.48}$$

将 $\dot{\alpha}_\mu$ 的方程(4.39)代入上式，则

$$\begin{aligned}\dot{P}^{(+)}(x,t)=&-\sum_\mu \delta(x-x_\mu)\theta_{ba}(-\mathrm{i}\bar{\omega}_\mu-\gamma_\perp)\alpha_\mu\\&+\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\sum_\mu[\delta(x-x_\mu)\theta_{ba}\theta_{ab}E(x_\mu,t)d_\mu]\end{aligned} \tag{4.49}$$

上式右边的求和符号中的 $\delta(x-x_\mu)E(x_\mu,t)$ 可用下式代替，即

$$\delta(x-x_\mu)E(x_\mu,t)=\delta(x-x_\mu)E(x,t)$$

为了证明该等式，将其两边乘任一函数 $F(x,t)$ 并对 x 积分，利用 δ 函数性质，左、右两边分别为

$$\int \delta(x-x_\mu)E(x_\mu,t)F(x,t)\mathrm{d}x=E(x_\mu,t)F(x_\mu,t) \tag{4.50}$$

$$\int \delta(x-x_\mu)E(x,t)F(x,t)\mathrm{d}x=E(x_\mu,t)F(x_\mu,t) \tag{4.51}$$

因为对任意函数 $F(x_\mu,t)$，上面的两个积分相等，积分函数内必有

$$\delta(x-x_\mu)E(x_\mu,t)=\delta(x-x_\mu)E(x,t) \tag{4.52}$$

这样把(4.52)式代入(4.49)式，并注意对于均匀加宽的介质，$\bar{\omega}_\mu\equiv\bar{\omega}$，则有

$$\dot{P}^{(+)}(x,t)=(-\mathrm{i}\bar{\omega}-\gamma_\perp)P^{(+)}(x,t)+\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[E(x,t)\theta_{ab}]\theta_{ba}D(x,t) \tag{4.53}$$

同样将 $\dot{d}_\mu$ 的方程(4.40)两边乘 $\delta(x-x_\mu)$，并对 μ 求和，则得到

$$\begin{aligned}\sum_\mu \delta(x-x_\mu)\dot{d}_\mu=&-\gamma_\parallel\sum_\mu \delta(x-x_\mu)(d_\mu-d_0)\\&+\frac{2}{\mathrm{i}\hbar}\sum_\mu[\delta(x-x_\mu)E(x_\mu,t)(\theta_{ab}\alpha_\mu^*-\alpha_\mu\theta_{ba})]\end{aligned} \tag{4.54}$$

同样，其中的 $\delta(x-x_\mu)E(x_\mu,t)$ 用 $\delta(x-x_\mu)E(x,t)$ 代替，把 $E(x,t)$ 提到求和符号之外，则得到

$$\dot{D}(x,t)=-\gamma_{\parallel}(D-D_0)-\frac{2}{\mathrm{i}\hbar}E(x,t)[P^{(-)}-P^{(+)}] \tag{4.55}$$

其中用到了(4.43),(4.44),(4.46)和(4.47)式.

为了方便,把场方程写在这里

$$\Delta E-\frac{1}{c^2}\ddot{E}-\mu_0\sigma\dot{E}=\mu_0[\ddot{P}^{(+)}+\ddot{P}^{(-)}] \tag{4.56}$$

方程(4.56),(4.53)和(4.55)就是宏观量 E,P,D 的麦克斯韦-布洛赫方程.

4.3 行波与二能级原子作用的 M-B 方程

这里考虑行波与二能级原子作用.光场 $E(x,t)$ 分为正频分量与负频分量,

$$\left.\begin{aligned}E(x,t)&=E^{(+)}(x,t)+E^{(-)}(x,t)\\E^{(-)}(x,t)&=E^{(+)*}(x,t)\end{aligned}\right\} \tag{4.57}$$

$$\left.\begin{aligned}E^{(+)}(x,t)&=E_0^{(+)}(x,t)\exp[\mathrm{i}(kx-\omega t)]\\E^{(-)}(x,t)&=E_0^{(-)}(x,t)\exp[-\mathrm{i}(kx-\omega t)]\end{aligned}\right\} \tag{4.58}$$

其中波数 k 与角频率 ω 满足

$$kc=\omega \tag{4.59}$$

首先计算麦克斯韦方程(4.38)中的 $\Delta E^{(+)}-\frac{1}{c^2}\ddot{E}^{(+)}$,将(4.58)式代入,得

$$\begin{aligned}\Delta E^{(+)}-\frac{1}{c^2}\ddot{E}^{(+)}=\exp[\mathrm{i}(kx-\omega t)][&-k^2E_0^{(+)}+2\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\nabla)E_0^{(+)}\\&+(\omega^2/c^2)E_0^{(+)}+(2\mathrm{i}\omega/c^2)\dot{E}_0^{(+)}-(1/c^2)\ddot{E}_0^{(+)}]\end{aligned} \tag{4.60}$$

在(4.60)式的大方括号内,第一、三项抵消.进而采用慢变振幅近似,即 $E_0^{(+)}$ 在一个光学周期 T 或一个光学波长 λ 内的变化可以忽略不计,即

$$\left.\begin{aligned}T\left|\frac{\partial E_0^{(+)}}{\partial t}\right|&\ll|E_0^{(+)}|,\quad&\left|\frac{\partial E_0^{(+)}}{\partial t}\right|&\ll\omega|E_0^{(+)}|\\\lambda\left|\frac{\partial E_0^{(+)}}{\partial x}\right|&\ll|E_0^{(+)}|,\quad&\left|\frac{\partial E_0^{(+)}}{\partial x}\right|&\ll k|E_0^{(+)}|\end{aligned}\right\} \tag{4.61}$$

这样,在(4.60)的第五项可略去.(4.60)式变为

$$\Delta E^{(+)}-\frac{1}{c^2}\ddot{E}^{(+)}\approx\exp\left[\mathrm{i}(kx-\omega t)\right]\left[2\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\nabla)E_0^{(+)}+\left(\frac{2\mathrm{i}\omega}{c^2}\right)\dot{E}_0^{(+)}\right] \tag{4.62}$$

同理，

$$\begin{aligned}-\mu_0\sigma\dot{E}^{(+)}&=-\mu_0\sigma[\dot{E}_0^{(+)}-\mathrm{i}\omega E_0^{(+)}]\exp\left[\mathrm{i}(kx-\omega t)\right]\\&\approx\mu_0\sigma\mathrm{i}\omega E_0^{(+)}\exp\left[\mathrm{i}(kx-\omega t)\right]\end{aligned} \tag{4.63}$$

同样，把麦克斯韦方程中的极化强度写为

$$\left.\begin{aligned}\dot{P}^{(+)}(x,t)&=P_0^{(+)}(x,t)\exp[\mathrm{i}(kx-\omega t)]\\\dot{P}^{(-)}(x,t)&=P_0^{(-)}(x,t)\exp[-\mathrm{i}(kx-\omega t)]\end{aligned}\right\} \tag{4.64}$$

其中 $P_0^{(+)}(x,t)$和 $P_0^{(-)}(x,t)$是慢变振幅，它们在一个光学周期或一个波长内的变化可以忽略不计，故有

$$\begin{aligned}\dot{P}_0^{(+)}(x,t)&=[\dot{P}_0^{(+)}(x,t)-\mathrm{i}\omega P_0^{(+)}(x,t)]\exp[\mathrm{i}(kx-\omega t)]\\&\approx-\mathrm{i}\omega P_0^{(+)}(x,t)\exp[\mathrm{i}(kx-\omega t)]\end{aligned} \tag{4.65}$$

$$\begin{aligned}\ddot{P}_0^{(+)}(x,t)&=[-\mathrm{i}\omega\dot{P}_0^{(+)}(x,t)-\omega^2P_0^{(+)}(x,t)]\exp[\mathrm{i}(kx-\omega t)]\\&\approx-\omega^2P_0^{(+)}(x,t)\exp[\mathrm{i}(kx-\omega t)]\end{aligned} \tag{4.66}$$

将(4.62)，(4.63)以及(4.66)式代入麦克斯韦方程，分别取出正频分量(或负频分量)，并消去指数因子 $\exp\left[\mathrm{i}(kx-\omega t)\right]$，则得到

$$2\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\nabla)E_0^{(+)}+(2\mathrm{i}\omega/c^2)\dot{E}_0^{(+)}+\mathrm{i}\mu_0\sigma\omega E_0^{(+)}=-\mu_0\omega^2P_0^{(+)} \tag{4.67}$$

将上式两边除以 $(2\mathrm{i}\omega/c^2)$，并引入

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{k}/k&=\boldsymbol{e}_k\\c^2&=1/(\mu_0\varepsilon_0)\\\sigma/(2\varepsilon_0)&=\kappa\end{aligned}\right\} \tag{4.68}$$

这样得到慢变振幅近似下的场方程

$$c(\boldsymbol{e}_k\cdot\nabla)E_0^{(+)}(x,t)+\dot{E}_0^{(+)}(x,t)+\kappa E_0^{(+)}(x,t)=\frac{\mathrm{i}\omega}{2\varepsilon_0}P_0^{(+)}(x,t) \tag{4.69}$$

其中 $\boldsymbol{e}_k$是单位向量，$\boldsymbol{e}_k\cdot\nabla E_0^{(+)}$即成为标量了.

下面利用旋转波近似简化极化强度和反转粒子数的方程. 前已指出，所谓旋转波近似就是略去包含 $\exp\left[\pm\mathrm{i}(\omega+\bar{\omega})t\right]$的项，保留 $\exp[\pm\mathrm{i}(\omega-\bar{\omega})t]$的项. 将 $E^{(+)}(x,t)$和 $P^{(+)}(x,t)$的公式(4.58)和(4.64)代入极化强度的方程(4.53)，并注意

$$\dot{P}_0^{(+)}(x,t)=[\dot{P}_0^{(+)}(x,t)-\mathrm{i}\omega P_0^{(+)}]\exp[\mathrm{i}(kx-\omega t)] \tag{4.70}$$

这样便得到了极化强度的慢变振幅方程

$$\dot{P}_0^{(+)}(x,t)=(\mathrm{i}\omega-\mathrm{i}\bar{\omega}-\gamma_\perp)P_0^{(+)}(x,t)+\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}E_0^{(+)}(x,t)\theta_{ab}\theta_{ba}D(x,t) \tag{4.71}$$

注意在一般情况下 $\omega\neq\bar{\omega}$，旋转波近似只要求 $|\omega-\bar{\omega}|\ll\omega,\bar{\omega}$.

现在讨论反转粒子数方程(4.55). 它的右边包含四项

$$\begin{aligned}&E(x,t)[P^{(-)}-P^{(+)}]\\&=E^{(+)}P^{(-)}-E^{(+)}P^{(+)}+E^{(-)}P^{(+)}-E^{(-)}P^{(+)}\end{aligned} \tag{4.72}$$

由 $E^{(\pm)}$ 和 $P^{(\pm)}$ 的表达式(4.58)，(4.64). 显而易见，$E^{(+)}P^{(+)}$，$E^{(-)}P^{(-)}$ 是按 $\exp[\pm\mathrm{i}(\bar{\omega}-\omega)t]$ 快速振荡的项，在旋转波近似下应略去. 另两项是

$$\begin{aligned}E^{(+)}P^{(-)}&=E_0^{(+)}(x,t)\exp[\mathrm{i}(kx-\omega t)]P_0^{(-)}\exp[-\mathrm{i}(kx-\omega t)]\\&\approx E_0^{(+)}(x,t)P_0^{(-)}(x,t)\end{aligned} \tag{4.73}$$

$$E^{(-)}P^{(+)}\approx E_0^{(-)}(x,t)P_0^{(+)}(x,t) \tag{4.74}$$

这样便可得到只含光场和极化强度的慢变振幅 $E_0^{(\pm)}$，$P_0^{(\pm)}$ 的反转粒子数方程

$$\begin{aligned}\dot{D}(x,t)=&-\gamma_\parallel[D(x,t)-D_0]-\frac{2}{\mathrm{i}\hbar}[E_0^{(+)}(x,t)P_0^{(-)}(x,t)\\&-E_0^{(-)}(x,t)P_0^{(+)}(x,t)]\end{aligned} \tag{4.75}$$

为了讨论物理意义和使用方便，把行波作用的 M－B 方程组写在一起

$$\begin{aligned}&c(\boldsymbol{e}_k\cdot\nabla)E_0^{(+)}(x,t)+\dot{E}_0^{(+)}(x,t)+\kappa E_0^{(+)}(x,t)\\&=\frac{\mathrm{i}\omega}{2\varepsilon_0}P_0^{(+)}(x,t)\end{aligned} \tag{4.76}$$

$$\begin{aligned}\dot{P}_0^{(+)}(x,t)=&[-\mathrm{i}(\bar{\omega}-\omega)-\gamma_\perp]P_0^{(+)}(x,t)\\&+\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[E_0^{(+)}(x,t)\theta_{ab}]\theta_{ba}D(x,t)\end{aligned} \tag{4.77}$$

$$\begin{aligned}\dot{D}(x,t)=&-\gamma_\parallel[D(x,t)-D_0]-\frac{2}{\mathrm{i}\hbar}[E_0^{(+)}(x,t)P_0^{(-)}(x,t)\\&-E_0^{(-)}(x,t)P_0^{(+)}(x,t)]\end{aligned} \tag{4.78}$$

应该特别注意以下几点：

(1) 这是对于行波作用的、采用慢变振幅近似与旋转波近似的 M－B 方程. 关于驻波光场的情况，将在半经典理论中讨论.

(2) $E_0^{(+)}(x,t)$，$P_0^{(+)}(x,t)$ 分别是光场和极化强度的慢变振幅，$D(x,t)$ 是反转粒子数，$\kappa,\gamma_\perp,\gamma_\parallel$ 分别是光场、极化强度和反转粒子数的损耗或弛豫常数. θ_{ab}，θ_{ba} 是电偶极矩的矩阵元. ω 是光场的角频率，$\bar{\omega}$ 是原

子跃迁的角频率.

(3) 在麦克斯韦方程中，$e\cdot\nabla E_0^{(+)}(x,t)$表示光场的空间演化. 在研究激光脉冲的传播问题时，应该用方程(4.76)，(4.77)和(4.78).

下面举例说明光学布洛赫方程的一个简单应用，即计算定态的极化强度. 为此，在方程(4.77)中，令 $\dot{P}_0^{(+)}(x,t)=0$，得到

$$P_0^{(+)}(x,t)=-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}|\theta_{ba}|^2\frac{1}{\gamma_\perp(1+\mathrm{i}\bar{\Delta})}D(x,t)E_0^{(+)}(x,t) \tag{4.79}$$

$$P_0^{(-)}(x,t)=\frac{\mathrm{i}}{\hbar}|\theta_{ba}|^2\frac{1}{\gamma_\perp(1-\mathrm{i}\bar{\Delta})}D(x,t)E_0^{(-)}(x,t) \tag{4.80}$$

其中

$$\bar{\Delta}\equiv(\bar{\omega}-\omega)/\gamma_\perp \tag{4.81}$$

在方程(4.78)中，令 $\dot{D}(x,t)=0$，即

$$0=-\gamma_\parallel D+\gamma_\parallel D_0+\frac{2}{\mathrm{i}\hbar}[E_0^{(+)}P_0^{(-)}-E_0^{(-)}P_0^{(+)}] \tag{4.82}$$

将 $P_0^{(+)}$ 和 $P_0^{(-)}$ 代入上式，则得到

$$D=\frac{D_0}{1+\bar{\Delta}^2+\dfrac{4|\theta_{ba}|^2|E_0^{(+)}|^2}{\hbar^2\gamma_\perp\gamma_\parallel}} \tag{4.83}$$

再将 D 代回到极化强度 $P_0^{(+)}(x,t)$的表达式，则

$$P_0^{(+)}(x,t)=-\frac{|\theta_{ba}|^2}{\hbar\gamma_\perp}D_0E_0^{(+)}(x,t)\frac{\mathrm{i}+\bar{\Delta}}{1+\bar{\Delta}^2+\dfrac{4|\theta_{ba}|^2|E_0^{(+)}|^2}{\hbar^2\gamma_\perp\gamma_\parallel}} \tag{4.84}$$

这与第 3 章中求出的极化强度公式一样.

4.4 谐振腔中的 M－B 方程

上节讨论了行波与二能级原子的作用，本节讨论驻波与二能级原子的作用. 由于在激光器的谐振腔内形成驻波，这里讨论的情况相当于驻波腔内光场与原子的作用. 为此，必须把 M－B 方程中的光场按谐振腔的驻波模式展开.

从 E,α_μ 和 d_μ 的方程(4.38)、(4.39)和(4.40)出发，即：

$$\Delta E(x,t)-\frac{1}{c^2}\ddot{E}(x,t)-\mu_0\sigma\dot{E}(x,t)=\mu_0\ddot{P}(x,t) \tag{4.85}$$

$$\dot{\alpha}_\mu=(-\mathrm{i}\bar{\omega}_\mu-\gamma_\perp)\alpha_\mu-\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}E(x_\mu,t)\theta_{ab}d_\mu \tag{4.86}$$

$$\dot{d}_\mu = -\gamma_\parallel (d_\mu - d_0) + \frac{2}{i\hbar} E(x_\mu, t)(\theta_{ab}\alpha_\mu^* - \alpha_\mu \theta_{ba}) \tag{4.87}$$

谐振腔内最简单的模式是一维驻波，即

$$u_\lambda(x) = N_n \sin(k_\lambda x) \tag{4.88}$$

容易证明归一化常数 $N_n = \sqrt{L/2}$，L 是腔长. 当然一般情况的 u_λ 是三维驻波. 将 M-B 方程的场方程中的 $E(x,t)$ 和 $P(x,t)$ 按 $u_\lambda(x)$ 展开，

$$E(x,t) = \sum_\lambda E_\lambda(t) u_\lambda(x) \tag{4.89}$$

$$P(x,t) = \sum_\lambda P_\lambda(t) u_\lambda(x) \tag{4.90}$$

其中 $E_\lambda(t)$ 和 $P_\lambda(t)$ 分别是光场与极化强度的第 λ 个分量，并且只与时间有关. $u_\lambda(x)$ 表示光场的空间分布，它满足如下的波动方程和正交关系

$$\Delta u_\lambda(x) = -k_\lambda^2 u_\lambda(x) = -(\Omega_\lambda^2/c^2) u_\lambda(x) \tag{4.91}$$

$$\int u_{\lambda'}(x) u_\lambda(x) \mathrm{d}^3 x = \delta_{\lambda'\lambda} \tag{4.92}$$

将(4.89)和(4.90)代入场方程(4.85). 利用(4.91)式，则方程中的第一项变为

$$\begin{aligned} \Delta E(x,t) &= \sum_\lambda E_\lambda(t) \Delta u_\lambda(x) \\ &= \sum_\lambda E_\lambda(t)(-\Omega_\lambda^2/c^2) u_\lambda(x) \end{aligned} \tag{4.93}$$

将(4.93)式代入场方程(4.85)，然后将方程两边都左乘 $u_{\lambda'}(x)$，并积分(积分的范围即腔的大小). 利用 $u_\lambda(x)$ 的正交关系(4.92)，则场方程变为

$$\Omega_\lambda^2 E_\lambda + \ddot{E}_\lambda + \sum_{\lambda'} (\sigma_{\lambda'\lambda}/\epsilon_0) \dot{E}_{\lambda'} = (-1/\epsilon_0) \ddot{P}_\lambda \tag{4.94}$$

其中用到了 $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$，而 $\sigma_{\lambda'\lambda}$ 定义为

$$\sigma_{\lambda'\lambda} = \int u_{\lambda'}(x) \sigma u_\lambda(x) \mathrm{d}^3 x \tag{4.95}$$

在激光的半经典理论中，用 σ 代表损耗机构. 腔的损耗是空间变量 x 的函数，例如透射损耗只集中在反射镜的位置 $x=0, L$. 当 $x \neq 0, L$ 时，透射损耗为零. 这说明在场方程中，σ 应是 x 的函数，即 $\sigma = \sigma(x)$. (4.94)和(4.95)式清楚表明，当模式指标 $\lambda' \neq \lambda$ 时，第 λ' 个模对第 λ 个模的光场损耗也有影响. 这使问题复杂化. 为了简化计算，这里假定 σ 代表腔的平均损耗，即假定 σ 与 x 无关. 这时，在(4.95)和(4.94)式中，有

$$\sigma_{\lambda'\lambda} = \sigma \int u_{\lambda'}(x) u_\lambda(x) \mathrm{d}^3 x = \sigma \delta_{\lambda'\lambda} \tag{4.96}$$

$$\sum_{\lambda'} (\sigma_{\lambda'\lambda}/\epsilon_0) \dot{E}_{\lambda'} = \sum_{\lambda'} (\sigma/\epsilon_0) \delta_{\lambda'\lambda} \dot{E}_{\lambda'} = (\sigma/\epsilon_0) E_\lambda \tag{4.97}$$

$$\Omega_\lambda^2 E_\lambda + \ddot{E}_\lambda + (\sigma/\varepsilon_0)\dot{E}_\lambda = (-1/\varepsilon_0)\ddot{P}_\lambda \tag{4.98}$$

至此我们考虑了场方程按腔的驻波模的展开. 同理可处理 α_μ 和 d_μ 的方程. 注意

$$E(x_\mu, t) = \sum_\lambda E_\lambda(t) u_\lambda(x_\mu) \tag{4.99}$$

代入 α_μ 和 d_μ 的方程(4.86),(4.87),则可得到

$$\dot{\alpha}_\mu = (-\mathrm{i}\bar{\omega}_\mu - \gamma_\perp)\alpha_\mu - \frac{1}{\mathrm{i}\hbar} d_\mu \sum_\lambda E_\lambda(t) u_\lambda(x_\mu)\theta_{ab} \tag{4.100}$$

$$\dot{d}_\mu = -\gamma_\parallel (d_\mu - d_0) + \frac{2}{\mathrm{i}\hbar}(\theta_{ab}\alpha_\mu^* - \alpha_\mu \theta_{ba}) \sum_\lambda E_\lambda(t) u_\lambda(x_\mu) \tag{4.101}$$

方程(4.98),(4.100)和(4.101)就是激光器的半经典理论的出发点. 下面用旋转波近似和慢变振幅近似对其进行简化.

首先用旋转波近似. 将 $E_\lambda(t)$ 分为正频分量和负频分量

$$E_\lambda(t) = E_\lambda^{(+)}(t) + E_\lambda^{(-)}(t) \tag{4.102}$$

$$\left.\begin{aligned} E_\lambda^{(+)}(t) &= A_\lambda \exp[-\mathrm{i}\Omega_\lambda t] \\ E_\lambda^{(-)}(t) &= A_\lambda^* \exp[\mathrm{i}\Omega_\lambda t] \end{aligned}\right\} \tag{4.103}$$

特别注意 A_λ 是复数. 在研究激光的频率特性时,将考虑 $A_\lambda = |A_\lambda| \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}$. A_λ 和 A_λ^* 分别是光场的正频分量与负频分量的慢变振幅.

再考虑原子的电偶极矩 α_μ 也含有快速振荡因子

$$\alpha_\mu = \tilde{\alpha}_\mu \exp[-\mathrm{i}\bar{\omega}_\mu t] \tag{4.104}$$

这样,在反转粒子数 d_μ 的方程中必有

$$\alpha_\mu E_\lambda \sim \exp[\mathrm{i}(\Omega_\lambda \pm \bar{\omega}_\mu)t] \tag{4.105}$$

用旋转波近似,略去含有 $\exp[\mathrm{i}(\Omega_\lambda + \bar{\omega}_\mu)t]$ 的项,则可得到

$$\dot{d}_\mu = -\gamma_\parallel (d_\mu - d_0) + \frac{2}{\mathrm{i}\hbar}\Big[\alpha_\mu^* \sum_\lambda E_\lambda^{(+)}(t) u_\lambda(t)\theta_{ab} - \alpha_\mu \sum_\lambda E_\lambda^{(-)}(t) u_\lambda(x_\mu)\theta_{ba}\Big] \tag{4.106}$$

同样,还可用旋转波近似简化 $\dot{\alpha}_\mu$ 的方程(4.100),得到

$$\dot{\alpha}_\mu = (-\mathrm{i}\bar{\omega}_\mu - \gamma_\perp)\alpha_\mu - \frac{1}{\mathrm{i}\hbar} d_\mu \sum_\lambda E_\lambda^{(+)}(t) u_\lambda(x_\mu)\theta_{ab} \tag{4.107}$$

在将(4.100)式简化为(4.107)式时,曾令 $\alpha_\mu = \tilde{\alpha}_\mu \exp(-\mathrm{i}\bar{\omega}t)$,代入(4.100)式,并把(4.103),(4.104)式代入,然后将两边除以 $\exp(-\mathrm{i}\bar{\omega}t)$,略去含 $\exp[\mathrm{i}(\Omega_\lambda + \bar{\omega})t]$ 的项,然后方程两边再乘 $\exp(-\mathrm{i}\bar{\omega}t)$,从 $\dot{\tilde{\alpha}}_\mu$ 的方程变为 $\dot{\alpha}_\mu$ 的方程(4.107).

最后,把场方程(4.98)中的 $E_\lambda(t)$ 和 $P_\lambda(t)$ 各分为正频分量与负频

分量，在旋转波近似下得到

$$\Omega_\lambda^2 E_\lambda^{(+)}+\ddot{E}_\lambda^{(+)}+(\sigma/\varepsilon_0)\dot{E}_\lambda^{(+)}=(-1/\varepsilon_0)\ddot{P}_\lambda^{(+)} \tag{4.108}$$

方程(4.106)，(4.107)和(4.108)，构成“封闭”的方程组. 特别注意，(4.107)式表明，正频的光场 $E_\lambda^{(+)}$ 感应出正频的偶极矩 α_μ，而(4.108)式表明正频的电偶极矩则辐射出正频的光场.

下面用慢变振幅近似简化场方程(4.108)，令

$$\left.\begin{aligned}E_\lambda^{(+)}(t)&=A_\lambda(t)\exp(-\mathrm{i}\Omega_\lambda t)\\P_\lambda^{(+)}(t)&=A'_\lambda(t)\exp(-\mathrm{i}\Omega_\lambda t)\end{aligned}\right\} \tag{4.109}$$

这里 $A_\lambda(t)$ 随时间 t 变化，但它在一个光学周期内的变化可以忽略(即慢变振幅近似的定义). 这样，有关系式

$$\left.\begin{aligned}\left|\frac{\mathrm{d}A_\lambda(t)}{\mathrm{d}t}\right|&\ll|\Omega_\lambda A_\lambda|,\qquad|\ddot{A}_\lambda|\ll|\Omega_\lambda\dot{A}_\lambda|\\\left|\frac{\mathrm{d}A'_\lambda(t)}{\mathrm{d}t}\right|&\ll|\Omega_\lambda A'_\lambda|,\qquad|\ddot{A}'_\lambda|\ll|\Omega_\lambda\dot{A}'_\lambda|\end{aligned}\right\} \tag{4.110}$$

利用这两个关系式可以使场方程中的 $\ddot{E}_\lambda^{(+)}(t)$ 及 $\ddot{P}^{(+)}(t)$ 等计算大大简化. 例如

$$\dot{E}_\lambda^{(+)}(t)=\dot{A}_\lambda\exp[-\mathrm{i}\Omega_\lambda t]-\mathrm{i}\omega_\lambda A_\lambda\exp[-\mathrm{i}\Omega_\lambda t] \tag{4.111}$$

$$\begin{aligned}\ddot{E}_\lambda^{(+)}(t)=&\ddot{A}_\lambda\exp[-\mathrm{i}\Omega_\lambda t]-\mathrm{i}\omega_\lambda\dot{A}_\lambda\exp[-\mathrm{i}\Omega_\lambda t]\\&-\mathrm{i}\omega_\lambda\dot{A}_\lambda\exp[-\mathrm{i}\Omega_\lambda t]-\omega_\lambda^2 A_\lambda\exp[-\mathrm{i}\Omega_\lambda t]\end{aligned} \tag{4.112}$$

在(4.112)式中，略去最小的项 $\ddot{A}\ll|\Omega_\lambda\dot{A}_\lambda|$，所以

$$\ddot{E}_\lambda^{(+)}(t)\approx-2\mathrm{i}\Omega_\lambda\dot{A}_\lambda\exp[-\mathrm{i}\Omega_\lambda t]-\Omega_\lambda^2 E_\lambda^{(+)}(t) \tag{4.113}$$

上式中的 $\dot{A}_\lambda$ 可用 E_λ 表示，为此利用(4.109)式

$$\dot{A}_\lambda=[\dot{E}_\lambda^{(+)}+\mathrm{i}\Omega_\lambda E_\lambda^{(+)}]\exp[\mathrm{i}\Omega_\lambda t] \tag{4.114}$$

代入(4.113)式，则

$$\ddot{E}_\lambda^{(+)}(t)\approx-2\mathrm{i}\Omega_\lambda[\dot{E}_\lambda^{(+)}+\mathrm{i}\Omega_\lambda E_\lambda^{(+)}]-\Omega_\lambda^2 E_\lambda^{(+)} \tag{4.115}$$

这样得到麦克斯韦方程中的两项，即

$$\Omega_\lambda^2 E_\lambda^{(+)}+\ddot{E}_\lambda^{(+)}\approx-2\mathrm{i}\Omega_\lambda(\dot{E}_\lambda^{(+)}+\mathrm{i}\Omega_\lambda E_\lambda^{(+)}) \tag{4.116}$$

在麦克斯韦方程中，见(4.108)式，$\ddot{E}_\lambda^{(+)}$ 与 $(\sigma/\varepsilon_0)\dot{E}_\lambda^{(+)}$ 比较时，将 $(\sigma/\varepsilon_0)\dot{E}_\lambda^{(+)}$ 中的二级小量 $(\sigma/\varepsilon_0)\dot{A}_\lambda$ 略去，故有

$$\begin{aligned}(\sigma/\varepsilon_0)\dot{E}_\lambda^{(+)}&=[(\sigma/\varepsilon_0)\dot{A}_\lambda-(\sigma/\varepsilon_0)\mathrm{i}\Omega_\lambda A_\lambda]\exp[-\mathrm{i}\Omega_\lambda t]\\&\approx-(\sigma/\varepsilon_0)\mathrm{i}\Omega_\lambda E_\lambda^{(+)}\end{aligned} \tag{4.117}$$

同样可以计算 $\ddot{P}_\lambda^{(+)}$，采用由(4.111～4.115)的类似步骤，得到

$$\ddot{P}_\lambda^{(+)} \approx -2i\Omega_\lambda[\dot{P}_\lambda^{(+)} + i\Omega_\lambda P_\lambda^{(+)}] - \Omega_\lambda^2 P_\lambda^{(+)} \tag{4.118}$$

当激光介质在弱极化的情况下(相当于反转程度不太高,在阈值之上不太远),在麦克斯韦方程中,只保留 $\ddot{P}_\lambda^{(+)}$ 的最大的一项,即

$$\ddot{P}_\lambda^{(+)} \approx -\Omega_\lambda^2 P_\lambda^{(+)} \tag{4.119}$$

现在将(4.116),(4.117)式以及(4.119)式代入场方程(4.108),便得到了在慢变振幅近似和旋转波近似下的场方程,并与前边得到的 α_μ 和 d_μ 的方程(4.107)和(4.106)写在一起,即为

$$\dot{E}_\lambda^{(+)} = (-i\Omega_\lambda - \kappa_\lambda)E_\lambda^{(+)} + [i\Omega_\lambda/(2\varepsilon_0)]P_\lambda^{(+)} \tag{4.120}$$

$$\dot{\alpha}_\mu = (-i\bar{\omega}_\mu - \gamma_\perp)\alpha_\mu - \frac{1}{i\hbar}d_\mu \sum_\lambda E_\lambda^{(+)}(t)u_\lambda(x_\mu)\theta_{ab} \tag{4.121}$$

$$\dot{d}_\mu = -\gamma_\parallel(d_\mu - d_0) + \frac{2}{i\hbar}(\alpha_\mu^* \sum_\lambda E_\lambda^{(+)}(t)u_\lambda(x_\mu)\theta_{ab} - \alpha_\mu \sum_\lambda E_\lambda^{(-)}(t)u_\lambda(x_\mu)\theta_{ba}) \tag{4.122}$$

特别注意其中 $\kappa_\lambda \equiv \sigma/2\varepsilon_0$,代表损耗.

方程(4.120),(4.121)和(4.122)是哈肯的激光理论的核心.在下节将它们变成归一化的量纲为 1 的哈肯激光方程.

4.5 哈肯的激光方程

本节引入量纲为 1 的光场,把上节得到的 M-B 方程写成更对称的形式,然后再给出另一种形式的 M-B 方程——量纲为 1 的场方程,以及 α_μ 和 d_μ 的方程.

引入量纲为 1 的光场 a_λ 和 a_λ^*(哈肯的原著用符号 b_λ 和 b_λ^*),

$$\left.\begin{aligned} E_\lambda^{(+)} &= i\sqrt{\hbar\Omega_\lambda/(2\varepsilon_0)}a_\lambda \\ E_\lambda^{(-)} &= -i\sqrt{\hbar\Omega_\lambda/(2\varepsilon_0)}a_\lambda^* \end{aligned}\right\} \tag{4.123}$$

考虑到光场的能量正比于 $|E_\lambda^{(+)}|^2$ 或 $|E_\lambda^{(-)}|^2$,而一个光子的能量是 $\hbar\omega_\lambda$,因此,在(4.123)式中,$a_\lambda^* a_\lambda$ 必然与光子数目成比例.后面将证明,$a_\lambda^* a_\lambda$ 确实就是第 λ 个模的光子数.若把 a_λ 和 a_λ^+ 看成算符,则 $a_\lambda^+ a_\lambda$ 就是光子数算符.

同时用 α_μ 表示场方程中的 P_λ^+,为此,利用极化强度的定义,即

$$P^+(x,t) = -\sum_\mu \delta(x - x_\mu)\theta_{ba}\alpha_\mu(t) \tag{4.124}$$

$$P^+(x,t) = \sum_{\lambda'} P_{\lambda'}^+(t)u_{\lambda'}(x) \tag{4.125}$$

(4.125)式即是 P^+ 按驻波模展开.两边乘 u_λ^*,并对 x 积分,则利用$u_\lambda(x)$ 的正交性,得到

$$P_\lambda^{(+)}(t)=\int P^{(+)}(x,t)u_\lambda(x)\mathrm{d}^3x \tag{4.126}$$

将(4.124)式代入(4.126),利用 δ 函数性质,可得到

$$P_\lambda^{(+)}(t)=-\sum_\mu \theta_{ba}u_\lambda^*(x_\mu)\alpha_\mu(t) \tag{4.127}$$

将(4.133)及(4.127)式代入场方程(4.120)则有

$$\dot{a}_\lambda=(-\mathrm{i}\Omega_\lambda-\kappa_\lambda)a_\lambda-\sum_\mu \theta_{ba}u_\lambda^*(x_\mu)\sqrt{\Omega_\lambda/(2\hbar\varepsilon_0)}\alpha_\mu(t) \tag{4.128}$$

为了简化此式,引入第 λ 个模的光场与第 μ 个原子作用的耦合常数 $g_{\mu\lambda}$,

$$g_{\mu\lambda}=\mathrm{i}\theta_{ab}u_\lambda(x_\mu)\sqrt{\Omega_\lambda/(2\hbar\varepsilon_0)} \tag{4.129}$$

$$g_{\mu\lambda}^*=-\mathrm{i}\theta_{ab}u_\lambda^*(x_\mu)\sqrt{\Omega_\lambda/(2\hbar\varepsilon_0)} \tag{4.130}$$

$$|g_{\mu\lambda}|=\theta_{ab}u_\lambda(x_\mu)\sqrt{\Omega_\lambda/(2\hbar\varepsilon_0)} \tag{4.131}$$

这样,代入(4.128)式,便得到哈肯的**场方程**

$$\dot{a}_\lambda=(-\mathrm{i}\Omega_\lambda-\kappa_\lambda)a_\lambda-\mathrm{i}\sum_\mu g_{\mu\lambda}^*\alpha_\mu \tag{4.132}$$

同样,将(4.123)代入 α_μ 和 d_μ 的方程(4.121)和(4.122),再利用(4.129)和(4.130)式得到哈肯的**物质方程**.

$$\dot{\alpha}_\mu=(-\mathrm{i}\bar{\omega}_\mu-\gamma_\perp)\alpha_\mu+\mathrm{i}\sum_\lambda g_{\mu\lambda}a_\lambda d_\mu \tag{4.133}$$

$$\dot{d}_\mu=-\gamma_\parallel(d_\mu-d_0)+2\mathrm{i}\sum_\lambda(g_{\mu\lambda}^*\alpha_\mu a_\lambda^*-g_{\mu\lambda}\alpha_\mu^*a_\lambda) \tag{4.134}$$

注意光子数目为

$$n_\lambda=a_\lambda^*a_\lambda \tag{4.135}$$

场方程(4.132)和物质方程(4.133)、(4.134)就是哈肯的半经典激光方程,a_λ,α_μ,d_μ 都是量纲为 1 的量.

下面对哈肯的半经典激光方程的物理意义做一些讨论:

(1) 为研究激光器以及谐振腔内光与物质的作用,必须把光场按 $u_\lambda(x)$ 展开.$u_\lambda(x)$ 是第 λ 个模的空间分布,E_λ 或 a_λ 是第 λ 个模的光场、第 λ 个模的频率和波数分别是 Ω_λ 和 k_λ.

(2) 光场在谐振腔内有损耗,第 λ 个模的损耗用衰减常数 κ_λ 表示.

(3) 在量纲为 1 的场方程中,$a_\lambda a_\lambda^*$ 代表第 λ 个模的光子数,由于 a_λ 与正频率的光场 $E_\lambda^{(+)}$ 只差一个常数因子,以后就直接将 a_λ 称为光场振幅.而在全量子的激光理论中,a_λ 就是第 λ 个模的光子的消灭算符,$a_\lambda^+a_\lambda$ 就是第 λ 个模的光子数算符.

(4) 由于激光介质涉及大量原子,用 μ 代表第 μ 个原子.第 μ 个原子

的电偶极矩是 $p_\mu=-(\theta_{ba}\alpha_\mu+\theta_{ab}\alpha_\mu^*)$，$\theta_{ba}$ 是矩阵元，$(-\theta_{ba})$ 是正数，原子电偶极矩的正频分量是 $p_\mu^{(+)}=-\theta_{ba}\alpha_\mu(t)$，$\alpha_\mu$ 就称为量纲为 1 的原子电偶极矩.

(5) 二能级原子在上、下能级上占有几率之差用 d_μ 来表示，所以 d_μ 也是量纲为 1 的，$d_\mu=N_{2,\mu}-N_{1,\mu}$.

(6) $g_{\mu\lambda}$ 是第 λ 个模的光场与第 μ 个原子的作用的耦合常数. $g_{\mu\lambda}$ 包含 θ_{21} 和 $u_\lambda(x_\mu)$，$u_\lambda(x_\mu)$ 表示光场在第 μ 个原子的位置上的空间分布. 原子有一定大小，$u_\lambda(x_\mu)$ 就意味着在原子大小的范围内光场空间分布一样，这即是偶极近似.

(7) 场方程和物质方程构成封闭的方程组. 这两个方程有生动而丰富的含义. 场方程左边是光场振幅随时间的变化，右边第一项是假定场与原子没有作用时，腔内的光场振幅的振荡与衰减. 右边第二项表明，原子偶极矩是场的辐射源. 这在电磁学和电动力学中是熟知的.

(8) 原子电偶极矩的方程(4.133)中，$\dot{\alpha}_\mu$ 表示量纲为 1 的原子偶极矩随时间的演化，右边第一项是当光场与原子没有作用时，偶极矩的振荡与衰减，第 μ 个原子的偶极矩的振荡的角频率是 $\bar{\omega}_\mu=(E_{2,\mu}-E_{1,\mu})/\hbar$，横向弛豫速率是 $\gamma_\perp$，对于均匀加宽的介质，各个原子的 $\bar{\omega}_\mu$ 相同，即 $\bar{\omega}_\mu\equiv\bar{\omega}$，而非均匀加宽介质的不同原子，$\bar{\omega}_\mu$ 不同. 方程右边最后一项对 λ 求和，表示全部的模的光场的作用. $g_{\mu\lambda}a_\lambda d_\mu$ 是非线性项，代表第 λ 个模的光场怎样感应出第 μ 个原子的偶极矩 α_μ. 原子可能吸收能量，也可能辐射出光能，取决于 d_μ 的符号，$d_\mu<0$ 发生受激吸收，能量从光场传给原子；$d_\mu>0$ 发生受激辐射，能量从原子传给光场. 而 d_μ 的绝对值 $|d_\mu|$ 则与原子和光场能量交换的多少有密切关系. 简言之，d_μ 的符号代表能量交换的方向，d_μ 的绝对值代表能量交换的大小.

(9) 在反转粒子数方程(4.134)中 d_μ，d_0 也是量纲为 1 的，代表上、下能级的占有几率之差，方程的左边 $\dot{d}_\mu$ 表示反转粒子数(几率)随时间的变化，右边第一项代表弛豫过程，d_0 是没有相干光的作用时，由于光泵的非相干作用(或其他手段)而产生的反转粒子数的定态值，对应于 $D_0=N'd_0=\lambda_a/\gamma_a-\lambda_b/\gamma_b$. $\gamma_\parallel$ 是纵向弛豫速率. 右边第二项代表光与原子的相干作用. 特别注意，当 $\gamma_\parallel(d_\mu-d_0)$ 可忽略不计时，则只有第二项，所以它代表相干作用(见第 8 章). 对 λ 求和代表多模光场的共同的作用.

(10) 全量子化的激光方程与(4.132)，(4.133)和(4.134)形式上完全一样，只不过 a_λ，a_λ^* 看成算符，同时把偶极矩 er 写成矩阵或算符形式，称为偶极算符. 偶极算符的期待值即为 α_μ 和 α_μ^*.

(11) 对于非均匀加宽的介质，除了考虑不同原子的 $\bar{\omega}_\mu$ 不同之外，还

应考虑原子的速度分布. 这时，M－B 方程中的 x_μ 应该用 $(x_\mu+v_\mu t)$ 代替，同时必须计算按速度 v_μ 的分布.

(12) 行波腔与驻波腔，它们的区别表现在 $u_\lambda(x)$ 不同，前者正比于 $\exp(ik_\lambda x)$；后者正比于 $\sin(k_\lambda x)$.

场方程(4.132)和物质方程(4.133)，(4.134)是研究激光半经典理论与激光动力学的最重要的方程. 或者说，第5～12章只不过是这里介绍的场方程和物质方程的具体应用.

4.6 单模、均匀加宽的行波激光方程

在激光动力学中，广泛研究单模的均匀加宽的二能级介质的行波激光模型. 对于行波腔，光场应按行波展开，即

$$u_\lambda(x)=\frac{1}{\sqrt{2L}}\exp(ik_\lambda x) \tag{4.136}$$

与驻波腔的激光方程比较，行波腔中的光场与原子的耦合常数变为

$$g'_{\mu\lambda}=i\theta_{ab}\sqrt{\frac{\Omega_\lambda}{2\varepsilon_0\hbar}}\exp(ik_\lambda x_\mu)=g\exp(ik_\lambda x_\mu) \tag{4.137}$$

$$g=i\theta_{ab}\sqrt{\frac{\Omega_\lambda}{2\varepsilon_0\hbar}} \tag{4.138}$$

同时假设原子的电偶极矩为

$$\alpha'_\mu(t)=\alpha_\mu(t)\exp(ik_\lambda x_\mu) \tag{4.139}$$

其中 $\alpha_\mu(t)$ 即原来定义的电偶极矩.

将哈肯激光方程中的 $g_{\mu\lambda}$ 和 α_μ 分别用 $g'_{\mu\lambda}$ 和 α'_μ 代替. 然后利用公式(4.137)和(4.139)，并在演算中消去行波的指数因子 $\exp(ik_\lambda x_\mu)$，则

$$\dot{a}_\lambda=(-i\Omega_\lambda-\kappa)a_\lambda-i\sum_\mu g^*\alpha_\mu \tag{4.140}$$

由于(4.138)式定义的耦合常数 g 与下标 μ 无关，故在上式中可将 g^* 提到求和符号 $\sum_\mu$ 之外，

$$\dot{a}_\lambda=(-i\Omega_\lambda-\kappa)a_\lambda-ig^*\sum_\mu\alpha_\mu \tag{4.141}$$

定义量纲为1的极化强度

$$\mathscr{P}=\sum_\mu\alpha_\mu \tag{4.142}$$

$$\dot{a}_\lambda=(-i\Omega_\lambda-\kappa)a_\lambda-ig^*\mathscr{P} \tag{4.143}$$

对于单模情况，原子偶极矩方程变为

$$\dot{\alpha}'_\mu=(-i\bar{\omega}-\gamma_\perp)\alpha'_\mu+ig'_{\mu\lambda}a_\lambda d_\mu \tag{4.144}$$

利用(4.137)和(4.139)式，消去因子 $\exp(ik_\lambda x_\mu)$，并对 μ 求和，

$$\dot{\mathscr{P}}=(-i\bar{\omega}-\gamma_\perp)\mathscr{P}+igA_\lambda D \tag{4.145}$$

其中用到

$$D=\sum_\mu d_\mu \tag{4.146}$$

同样，反转粒子数方程变为

$$\dot{d}_\mu=-\gamma_\parallel(d_\mu-d_0)+2i(g^*\alpha_\mu a_\lambda^*-g\alpha_\mu^* a_\lambda) \tag{4.147}$$

两边对 μ 求和，并利用 $\mathscr{P}$ 和 D 的定义(4.142)和(4.146)，则

$$\dot{D}=-\gamma_\parallel(D-D_0)+2i(g^*\mathscr{P}a_\lambda^*-g\mathscr{P}^* a_\lambda) \tag{4.148}$$

令激光频率为 ω，将 a_λ 和 $\mathscr{P}$ 写成慢变振幅的形式

$$a_\lambda=\mathscr{E}\exp(-i\omega t) \tag{4.149}$$

$$\mathscr{P}=P\exp(-i\omega t) \tag{4.150}$$

代入方程(4.143)，(4.145)和(4.148)，则得到 M－B 方程

$$\dot{\mathscr{E}}=(-i\delta-\kappa)\mathscr{E}-ig^* P \tag{4.151}$$

$$\dot{P}=(-i\Delta-\gamma_\perp)P+ig\mathscr{E}D \tag{4.152}$$

$$\dot{D}=-\gamma_\parallel(D-D_0)+2i(g^* P\mathscr{E}^*-gP^*\mathscr{E}) \tag{4.153}$$

其中 $\delta=\Omega_\lambda-\omega$，$\Delta=\bar{\omega}-\omega$

若把耦合常数定义为实数

$$g'=\theta_{ab}\sqrt{\Omega_\lambda/(2\varepsilon_0\hbar)} \tag{4.154}$$

$$g=ig' \tag{4.155}$$

代入 M－B 方程(4.151)，(4.152)和(4.153)，则得到

$$\dot{\mathscr{E}}=(-i\delta-\kappa)\mathscr{E}-g'P \tag{4.156}$$

$$\dot{P}=(-i\Delta-\gamma_\perp)P-g'\mathscr{E}D \tag{4.157}$$

$$\dot{D}=-\gamma_\parallel(D-D_0)+2g'(P\mathscr{E}^*-P^*\mathscr{E}) \tag{4.158}$$

行波腔的 M－B 方程(4.151)，(4.152)，(4.153)，或者(4.156)，(4.157)，(4.158)广泛用于研究光学双稳态、光学混沌等问题(见第 10 章和第 12 章).

最后把行波腔的激光器的麦克斯韦-布洛赫方程的物理意义总结如下：

(1) $\mathscr{E}$ 是量纲为 1 的光场的正频分量的慢变振幅，$|\mathscr{E}|^2=a_\lambda a_\lambda^*$.

(2) $\mathscr{P}$ 是量纲为 1 的极化强度的慢变振幅的正频分量，$(-\mathscr{P}\theta_{ba})$ 才是极化强度.

(3) $\delta=(\Omega_\lambda-\omega)$ 是谐振腔的失谐参数，即腔的模的角频率与激光的

角频率之差.

(4) $\Delta=(\bar{\omega}-\omega)$是原子的失谐参数,即原子的跃迁之角频率与激光的角频率之差.

(5) 在共振对,$\delta=0$,$\Delta=0$,方程可简化.

(6) 方程中各个量及各项物理意义与哈肯的半经典激光方程的讨论相似.

4.7 归一化的宏观量的 M-B 方程

本节给出归一化的宏观量 $E^{(+)}$,$P^{(+)}$,和 D 的方程.这对于讨论激光的非线性动力学是很方便的.

由 g'和 $\mathscr{E}$ 的定义,有

$$g'=\theta_{ab}\sqrt{\Omega_\lambda/(2\varepsilon_0\hbar)} \tag{4.159}$$

$$\mathscr{E}=-\mathrm{i}\sqrt{2\varepsilon_0/(\hbar\Omega_\lambda)}E^{(+)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \tag{4.160}$$

代入方程(4.156),(4.157)和(4.158),并推广到包含 $\frac{\partial E^{(+)}}{\partial x}$ 的项,则得到

$$\frac{\partial E^{(+)}}{\partial t}+c\frac{\partial E^{(+)}}{\partial x}=(-\mathrm{i}\delta-\kappa)E^{(+)}+\frac{\mathrm{i}\omega_\lambda}{2\varepsilon_0}P^{(+)} \tag{4.161}$$

$$\frac{\partial P^{(+)}}{\partial t}=(-\mathrm{i}\Delta-\gamma_\perp)P^{(+)}+\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}E^{(+)}|\theta_{ab}|^2D \tag{4.162}$$

$$\frac{\partial D}{\partial t}=-\gamma_\parallel(D-D_0)-\frac{2}{\mathrm{i}\hbar}(E^{(+)}P^{(-)}-E^{(-)}P^{(+)}) \tag{4.163}$$

令方程(4.161),(4.162)及(4.163)在共振($\Delta=\delta=0$)、定态 $\left(\frac{\partial}{\partial t}=0\right)$ 以及忽略传播效应 $\left(\frac{\partial}{\partial x}=0\right)$ 时的解为 $\overline{E}^{(+)}$,$\overline{P}^{(+)}$和 $\overline{D}$.由(4.161)式可知

$$\overline{P}^{(+)}=\frac{2\varepsilon_0}{\mathrm{i}\Omega_\lambda}\kappa\ \overline{E}^{(+)} \tag{4.164}$$

$$\overline{P}^{(-)}=-\frac{2\varepsilon_0}{\mathrm{i}\Omega_\lambda}\kappa\ \overline{E}^{(-)} \tag{4.165}$$

将 $\overline{P}^{(+)}$和 $\overline{P}^{(-)}$代入(4.163),并注意 $\frac{\partial\overline{D}}{\partial t}=0$,得到

$$\overline{D}=D_0-\frac{\delta\varepsilon_0\kappa}{\gamma_\parallel\hbar\Omega_\lambda}|E^{(+)}|^2 \tag{4.166}$$

将 $\overline{P}^{(+)}$, $\overline{P}^{(-)}$, $\overline{D}$ 代入(4.162),利用 $\partial\overline{P}^{(+)}/\partial t=0$,则

$$|\overline{E}^{(+)}|^2=\left(D_0-\frac{2\varepsilon_0\kappa\gamma_\perp\hbar}{\omega_\lambda|\theta_{ab}|^2}\right)/[8\varepsilon_0\kappa/(\gamma_\parallel\hbar\Omega_\lambda)] \tag{4.167}$$

将 $|\overline{E}^{(+)}|^2$ 代入(4.166),则

$$\overline{D}=2\varepsilon_0\hbar\kappa\gamma_\perp/(\Omega_\lambda|\theta|^2) \tag{4.168}$$

$$\overline{P}^{(+)}=\frac{2\varepsilon_0\kappa}{\mathrm{i}\Omega_\lambda}\overline{E}^{(+)} \tag{4.169}$$

$$E^{(+)}=[(D_0-\overline{D})\gamma_\parallel\hbar\Omega_\lambda/(8\varepsilon_0\kappa)]^{\frac{1}{2}} \tag{4.170}$$

引入归一化的量 $\hat{E},\hat{P},\hat{D}$,

$$\left.\begin{aligned}\hat{E}&=E^{(+)}/\overline{E}^{(+)}\\ \hat{P}&=P^{(+)}/\overline{P}^{(+)}\\ \hat{D}&=D/\overline{D}\\ \Lambda+1&=D_0/\overline{D}\end{aligned}\right\} \tag{4.171}$$

将(4.171)式代入(4.161),(4.162)和(4.163)式,则得到

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+c\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{i}\delta+\kappa\right)\hat{E}=\kappa\hat{P} \tag{4.172}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathrm{i}\Delta+\gamma_\perp\right)\hat{P}=\gamma_\perp\hat{E}\hat{D} \tag{4.173}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\gamma_\parallel\right)\hat{D}=\gamma_\parallel(1+\Lambda)-\Lambda\gamma_\parallel(\hat{E}\hat{P}^*+\hat{E}^*\hat{P})/2 \tag{4.174}$$

此方程组被广泛用于研究激光器的动力学问题以及激光的传输问题.

M-B 方程的其他形式见(8.9)～(8.13)式.

4.8 激光器按照动力学的分类 (A,B,C 类激光器)

在激光器的麦克斯韦-布洛赫方程中,按照参数 $\kappa,\gamma_\parallel$ 和 $\gamma_\perp$ 可区分三类激光器,即 A,B,C 类激光器. 它们的动力学行为大不相同.

(1) A 类激光器有

$$\kappa\ll\gamma_\parallel\approx\gamma_\perp$$

包括 He-Ne,Ar,Kr 及染料激光器.

(2) B 类激光器有

$$\gamma_\perp\gg\kappa,\gamma_\parallel$$

包括红宝石、钕玻璃、YAG 和 CO_2 激光器.

(3) C 类激光器有

$$\kappa \approx \gamma_{\parallel} \approx \gamma_{\perp}$$

包括一些远红外激光器.

下面在激光的半经典理论的应用中,将经常用到这种按动力学的分类. 当然,除此之外的情况也是可能的.

习题与思考

(1) 将 $\dot{a}_{\lambda}, \dot{a}_{\mu}, \dot{d}_{\mu}$ 的方程(4.132),(4.133)和(4.134)用于单模激光器. 设 $g_{\mu\lambda}$ 为实数,令 $a=r\exp(\mathrm{i}\phi), a_{\mu}=p_{\mu}+\mathrm{i}q_{\mu}$ 求 r, ϕ, p_{μ} 和 q_{μ} 的方程.

(2) 将 $\dot{a}_{\lambda}, \dot{a}_{\mu}, \dot{d}_{\mu}$ 的方程(4.132),(4.133),(4.134)推广到非均匀加宽的情况.

(3) 详细讨论方程(4.128),(4.133)和(4.134)的适用条件.

(4) 求出用 CGS 单位制的麦克斯韦-布洛赫方程.

参 考 文 献

[1] Bloch F, Siegert A. Magnetic resonance for nonrotating fields. Phys. Rev, 1940. 57:522 - 526.

[2] Bloch F. Nuclear Induction. Phys. Rev. ,1946,70:460 - 468.

[3] Feynman R P, Vernon F L, Hellwarth R W. J. Geometrical representation of the Schrödinger equation for solving maser problems. Appl, Phys. ,1957,28:49 - 53.

[4] 甘子钊,张国祯. 半导体中光的相干传播理论(Ⅰ). 物理学报. 1981,7:24 - 32.

[5] 甘子钊,张国祯. 半导体中光的相干传播理论(Ⅱ). 物理学报. 1981,8:41 - 55.

[6] 甘子钊,张国祯. 半导体中光的相干传播理论(Ⅲ). 物理学报. 1981,8:56 - 66.

第 5 章　哈肯的半经典激光理论

麦克斯韦-布洛赫方程是半经典激光理论的基础. 从本章到第 12 章,将利用 M－B 方程研究激光器的特性以及相干作用、光学孤立子、光学双稳态、位相复共轭光学、光学混沌等问题. 用 M－B 方程还可研究激光光谱、辐射压力、共振荧光、超荧光等问题.

本章介绍哈肯的半经典激光理论,用 M－B 方程研究激光器的阈值、光强、频率特性、瞬态特性、锁模激光原理. 最后说明从半经典理论向速率方程理论的过渡,说明速率方程的近似条件.

5.1　激光器 M－B 方程的稳定性和阈值

为了简单,本节考虑均匀加宽的单模行波激光器,仍然从哈肯的激光方程出发,有

$$\dot{a}_\lambda=(-\mathrm{i}\Omega_\lambda-\kappa_\lambda)a_\lambda-\mathrm{i}\sum_\mu g^*_{\mu\lambda}\alpha_\mu \tag{5.1}$$

$$\dot{\alpha}_\mu=(-\mathrm{i}\bar{\omega}_\mu-\gamma_\perp)\alpha_\mu+\mathrm{i}\sum_\lambda g_{\mu\lambda}a_\lambda d_\mu \tag{5.2}$$

$$\dot{d}_\mu=-\gamma_\parallel(d_\mu-d_0)+2\,\mathrm{i}\sum_\lambda(g^*_{\mu\lambda}\alpha_\mu a^*_\lambda-g_{\mu\lambda}\alpha^*_\mu a_\lambda) \tag{5.3}$$

其中 a_λ 是第 λ 个模的光场振幅,α_μ 和 d_μ 分别是第 μ 个原子的偶极矩和反转粒子数,$g_{\mu\lambda}$ 是第 λ 个模的光场与第 μ 个原子的耦合常数,

$$g_{\mu\lambda}=\mathrm{i}\theta_{ab}u_\lambda(x_\mu)\sqrt{\Omega_\lambda/(2\hbar\varepsilon_0)} \tag{5.4}$$

对于我们讨论的情况,可把哈肯方程简化:

(1) 对均匀加宽介质,各个原子的中心频率一样,即 $\bar{\omega}_\mu=\bar{\omega}$.

(2) 对于单模激光器,只需考虑一个腔模 Ω_λ,求和符号 $\sum_\lambda(\cdots)$ 只有一项.

(3) 对于行波激光器

$$g_{\mu\lambda}=g'_\lambda\exp[\mathrm{i}k_\lambda x_\mu] \tag{5.5}$$

$$\alpha_\mu=\alpha'_\mu\exp[\mathrm{i}k_\lambda x_\mu] \tag{5.6}$$

代入哈肯的激光方程并去掉“′”,则得到

$$\dot{a}_\lambda=(-\mathrm{i}\Omega_\lambda-\kappa_\lambda)a_\lambda-\mathrm{i}g_\lambda^*\sum_\mu\alpha_\mu \tag{5.7}$$

$$\dot{\alpha}_\mu=(-\mathrm{i}\bar{\omega}-\gamma_\perp)\alpha_\mu+\mathrm{i}g_\lambda a_\lambda d_\mu \tag{5.8}$$

$$\dot{d}_\mu=-\gamma_\parallel(d_\mu-d_0)+2\mathrm{i}(g_\lambda^*\alpha_\mu a_\lambda^*-g_\lambda\alpha_\mu^* a_\lambda) \tag{5.9}$$

进而假定腔的模的频率与原子频率相等，即 $\Omega_\lambda=\bar{\omega}$，这时激光频率 $\omega=\Omega_\lambda=\bar{\omega}$. 在这种情况下，光与原子发生共振作用，因此极化强度是纯虚数，原子电偶极矩 α_μ 也是纯虚数，即

$$\alpha_\mu=\alpha'_\mu+\mathrm{i}\alpha''_\mu=\mathrm{i}\alpha''_\mu \tag{5.10}$$

再引入实数的耦合常数 g，

$$g_\lambda\equiv\mathrm{i}g \tag{5.11}$$

$$g=\theta_{ab}\sqrt{\Omega_\lambda/(2\hbar\varepsilon_0)} \tag{5.12}$$

将(5.10)和(5.11)式代入公式(5.7)，(5.8)和(5.9)，并略去 α''_μ，a_λ 和 κ_λ 的脚标，则得到

$$\dot{a}=(-\mathrm{i}\omega-\kappa)a-\mathrm{i}g\sum_\mu\alpha_\mu \tag{5.13}$$

$$\dot{\alpha}_\mu=(-\mathrm{i}\omega-\gamma_\perp)\alpha_\mu+\mathrm{i}gad_\mu \tag{5.14}$$

$$\dot{d}_\mu=-\gamma_\parallel(d_\mu-d_0)+2\mathrm{i}g(\alpha_\mu a^*-\alpha_\mu^* a) \tag{5.15}$$

首先考虑 d_0 较小(低于阈值)的情况. 求定态解，令

$$\dot{a}=\dot{\alpha}_\mu=\dot{d}_\mu=0 \tag{5.16}$$

可得到如下的定态解(固定点)

$$\bar{a}=\bar{\alpha}_\mu=(\bar{d}_\mu-d_0)=0 \tag{5.17}$$

$\bar{a}=0$ 即激光光强为零. 当泵浦强度增加时，上述定态解 $\bar{a}=0$，$\bar{\alpha}_\mu=0$ 和 $\bar{d}_\mu=d_0$ 会变得不稳定. 为讨论解的不稳定性，令

$$\left.\begin{aligned}a&=\bar{a}+\delta a\\ \alpha_\mu&=\bar{\alpha}_\mu+\delta\alpha_\mu\\ d_\mu&=\bar{d}_\mu+\delta d_\mu\end{aligned}\right\} \tag{5.18}$$

将(5.18)式代入上面的激光方程，并注意 $\bar{d}_\mu=d_0$，则有

$$\delta\dot{a}=(-\mathrm{i}\omega-\kappa)\delta a-\mathrm{i}g\sum_\mu\delta a_\mu \tag{5.19}$$

$$\delta\dot{\alpha}_\mu=(-\mathrm{i}\omega-\gamma_\perp)\delta\alpha_\mu+\mathrm{i}g\delta a d_0 \tag{5.20}$$

引入下列记号

$$\left.\begin{aligned}\sum_\mu\alpha_\mu&=S\\ \sum_\mu 1&=N'\\ D_0&=N'd_0\end{aligned}\right\} \tag{5.21}$$

则上述方程变为

$$\left.\begin{aligned}\delta\dot{a}&=(-\mathrm{i}\omega-\kappa)\delta a-\mathrm{i}g\delta S\\ \delta\dot{S}&=(-\mathrm{i}\omega-\gamma_{\perp})\delta S+\mathrm{i}gD_0\delta a\end{aligned}\right\}\tag{5.22}$$

为求解这个非线性方程组，令

$$\left.\begin{aligned}\delta a&=\delta a_0\exp\left[(-\mathrm{i}\omega+\Gamma)t\right]\\ \delta S&=\delta S_0\exp\left[(-\mathrm{i}\omega+\Gamma)t\right]\end{aligned}\right\}\tag{5.23}$$

代入(5.22)式和(5.23)式，则得到

$$\Gamma_{\pm}=-\frac{\kappa+\gamma_{\perp}}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\kappa-\gamma_{\perp}}{2}\right)^2+g^2D_0}\tag{5.24}$$

当 $\Gamma_{\pm}<0$，$t\to\infty$ 时，$\delta a\to0$，$\delta S\to0$，即解 $\bar{a}=0$ 和 $\bar{\alpha}_{\mu}=0$ 是稳定的. 当 D_0（反转粒子数）增大时，可由(5.24)式得到 $\Gamma_{+}>0$ 的条件，即

$$D_0>\kappa\gamma_{\perp}/g^2\tag{5.25}$$

这时，解 $\bar{a}=0$ 和 $\bar{\alpha}_{\mu}=0$ 变得不稳定了，而有新的解 $\bar{a}\neq0$，即产生了激光. 这样便得到了激光器的不稳定的临界条件：

$$D_0g^2/\gamma_{\perp}=\kappa\tag{5.26}$$

这就是激光器的阈值条件，有时称为激光器的第一阈值. 请注意

$$\left.\begin{aligned}g&=\theta_{ab}\sqrt{\Omega_{\lambda}/(2\hbar\epsilon_0)}\\ \gamma_{\perp}&=\frac{1}{2}\Delta\omega\\ A&=\frac{1}{2}\frac{\bar{\omega}^3\left|\theta_{ab}\right|^2}{\pi\hbar c^3\epsilon_0}=1/t_s\end{aligned}\right\}\tag{5.27}$$

$$\left|\theta_{ab}\right|^2=A\frac{\hbar c^3\epsilon_0}{\pi^2v^3}\tag{5.28}$$

以上诸式中 $\Delta\omega$ 是谱线半宽度，A 是爱因斯坦自发辐射系数，θ_{ab} 是电偶极跃迁矩阵元. 将以上参数代入(5.26)式，可得到

$$D_0g^2/\gamma_{\perp}=D_0\frac{c^3}{4\pi^2v^2\Delta vt_s}=\kappa\tag{5.29}$$

这就是均匀加宽的激光介质的增益公式和阈值条件.

5.2 M－B方程的定态解

本节求出单模激光器的M－B方程的定态解，由此得到激光器定态光强和频率特性.

对单模激光器，M－B方程变为

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=(-\mathrm{i}\Omega_{\lambda}-\kappa)a-\mathrm{i}\sum_{\mu}g_{\mu\lambda}^{*}\alpha_{\mu}\tag{5.30}$$

$$\frac{\mathrm{d}\alpha_\mu}{\mathrm{d}t}=(-\mathrm{i}\bar{\omega}_\mu-\gamma_\perp)\alpha_\mu+\mathrm{i}g_{\mu\lambda}d_\mu a \tag{5.31}$$

$$\frac{\mathrm{d}d_\mu}{\mathrm{d}t}=-\gamma_\parallel(d_\mu-d_0)+2\mathrm{i}(g^*_{\mu\lambda}\alpha_\mu a^*-g_{\mu\lambda}\alpha^*_\mu a) \tag{5.32}$$

由于只考虑单模,因此M-B方程中没有对λ的求和,即$\sum_\lambda(\cdots)$只有一项.

将激光光场a和原子偶极矩α_μ分别写成

$$a=\tilde{a}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{5.33}$$

$$\alpha_\mu=\tilde{\alpha}_\mu\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{5.34}$$

将(5.33)式和(5.34)式代入M-B方程(5.30),(5.31)和(5.32),则有

$$\dot{\tilde{a}}=[-\mathrm{i}(\Omega_\lambda-\omega)-\kappa]\tilde{a}-\mathrm{i}\sum_\mu g^*_{\mu\lambda}\tilde{\alpha}_\mu \tag{5.35}$$

$$\dot{\tilde{\alpha}}_\mu=[-\mathrm{i}(\bar{\omega}_\mu-\omega)-\gamma_\perp]\tilde{\alpha}_\mu+\mathrm{i}g_{\mu\lambda}d_\mu\tilde{a} \tag{5.36}$$

$$\dot{d}_\mu=-\gamma_\parallel(d_\mu-d_0)+2\mathrm{i}(g^*_{\mu\lambda}\tilde{\alpha}_\mu\tilde{a}^*-g_{\mu\lambda}\tilde{\alpha}^*_\mu\tilde{a}) \tag{5.37}$$

对于定态条件,$\dot{\tilde{a}}=0$,$\dot{\tilde{\alpha}}_\mu=0$,$\dot{d}_\mu=0$,则上述方程变为

$$\tilde{a}[\mathrm{i}(\Omega_\lambda-\omega)+\kappa]=-\mathrm{i}\sum_\mu g^*_{\mu\lambda}\tilde{\alpha}_\mu \tag{5.38}$$

$$\tilde{\alpha}_\mu[\mathrm{i}(\bar{\omega}_\mu-\omega)+\gamma_\perp]=\mathrm{i}g_{\mu\lambda}d_\mu\tilde{a} \tag{5.39}$$

$$\gamma_\parallel(d_\mu-d_0)=2\mathrm{i}(g^*_{\mu\lambda}\tilde{\alpha}_\mu\tilde{a}^*-g_{\mu\lambda}\tilde{\alpha}^*_\mu\tilde{a}) \tag{5.40}$$

由方程(5.39)得到

$$\tilde{\alpha}_\mu=\frac{\mathrm{i}g_{\mu\lambda}d_\mu\tilde{a}}{\mathrm{i}(\bar{\omega}_\mu-\omega)+\gamma_\perp} \tag{5.41}$$

将(5.41)式代入(5.40)式,则

$$\gamma_\parallel(d_\mu-d_0)=-2d_\mu|\tilde{a}|^2|g_{\mu\lambda}|^2\frac{2\gamma_\perp}{(\bar{\omega}_\mu-\omega)^2+\gamma_\perp^2} \tag{5.42}$$

其中右边的一部分与速率方程的符号对应,即

$$|g_{\mu\lambda}|^2\frac{2\gamma_\perp}{(\bar{\omega}_\mu-\omega)^2+\gamma_\perp^2}=W_{\lambda\mu} \tag{5.43}$$

利用(5.42)式和(5.43)式可得到

$$d_\mu=\frac{d_0}{1+2T_1W_{\lambda\mu}n} \tag{5.44}$$

其中用到了$T_1=1/\gamma_\parallel$,$|\tilde{a}|^2=n$(光子数).显然(5.44)式代表饱和效应.将(5.44)式代入(5.41)式,则得到单个原子的偶极矩

$$\tilde{\alpha}_\mu=\frac{\mathrm{i}g_{\mu\lambda}\tilde{a}}{\mathrm{i}(\bar{\omega}_\mu-\omega)+\gamma_\perp}\frac{d_0}{1+2T_1W_{\lambda\mu}n} \tag{5.45}$$

它反映了偶极矩(感应偶极矩)与粒子数d_0、光场$\tilde{a}$、频率谐振的关系,以及饱和效应(分母上有光子数n).同时表明感应偶极矩有实部和虚部,分

别对应色散和吸收(或增益).

将(5.45)式代入光场的方程(5.38),得到

$$\tilde{a}[\mathrm{i}(\Omega_\lambda-\omega)+\kappa]=\sum_\mu |g_{\mu\lambda}|^2\tilde{a}\frac{1}{\mathrm{i}(\bar{\omega}_\mu-\omega)+\gamma_\perp}\frac{d_0}{1+2T_1W_{\lambda\mu}n} \tag{5.46}$$

对于高于阈值的情况,激光光场 $\tilde{a}\neq 0$. 这时可将方程两边的 $\tilde{a}$ 消去. 然后令方程两边的实部与实部相等,虚部与虚部相等,可求出光强与频率特性.

由(5.46)式的实部相等,得到

$$2\kappa=d_0\sum_\mu\frac{W_{\lambda\mu}}{1+2T_1W_{\lambda\mu}n} \tag{5.47}$$

这与速率方程的结果相似. 当激光器在阈值附近工作时,光子数 n 较小,上式右边可展开,

$$2\kappa=d_0\sum_\mu W_{\lambda\mu}-d_0 2T_1 n\sum_\mu W_{\lambda\mu}^2 \tag{5.48}$$

由此得到激光的光子数

$$n=\left(d_0\sum_\mu W_{\lambda\mu}-2\kappa\right)/\left[2d_0T_1\sum_\mu W_{\lambda\mu}^2\right] \tag{5.49}$$

此式表明,定态激光器的激光光子数正比于增益与损耗之差.

将 $W_{\lambda\mu}$ 的公式(5.43)代入(5.49)

$$n=\left[d_0\sum_\mu\frac{|g_{\mu\lambda}|^2\gamma_\perp}{(\bar{\omega}_\mu-\omega)^2+\gamma_\perp^2}-\kappa\right]/d_0T_1\sum_\mu\frac{4|g_{\mu\lambda}|^2\gamma_\perp^2}{[(\bar{\omega}_\mu-\omega)^2+\gamma_\perp^2]^2} \tag{5.50}$$

对于均匀加宽的介质 $\bar{\omega}_\mu\equiv\bar{\omega}$, $\sum_\mu d_0=D_0$

$$n=\left[\frac{D_0|g|^2\gamma_\perp}{(\bar{\omega}-\omega)^2+\gamma_\perp^2}-\kappa\right]/\left\{\frac{4|g|^4D_0}{\gamma_\parallel}\frac{\gamma_\perp^2}{[(\bar{\omega}-\omega)^2+\gamma_\perp^2]^2}\right\} \tag{5.51}$$

$$n=\frac{L(\bar{\omega}-\omega)-D_t/D_0}{(4|g|^2/\gamma_\parallel\gamma_\perp)L^2(\bar{\omega}-\omega)} \tag{5.52}$$

其中用到 $\gamma_\parallel=1/T_1$, $D_t=\kappa/(|g|^2/\gamma_\perp)$

$$L(\bar{\omega}-\omega)=\frac{\gamma_\perp^2}{(\bar{\omega}-\omega)^2+\gamma_\perp^2} \tag{5.53}$$

(5.52)式与拉姆理论的结果一样.

由(5.46)式两边的虚部相等,并令 $\Omega_c=\Omega_\lambda$,则有

$$\Omega_c-\omega=-\frac{d_0}{2\gamma_\perp}\sum_\mu(\bar{\omega}_\mu-\omega)\frac{W_{\lambda\mu}}{1+2T_1W_{\lambda\mu}n} \tag{5.54}$$

对于均匀加宽的激光器,$\bar{\omega}_\mu=\bar{\omega}$,这时可将(5.54)式右边的因子提到求和号之外,然后利用(5.47)式则得到

$$\Omega_c-\omega=-\frac{\kappa}{\gamma_\perp}(\bar{\omega}-\omega) \tag{5.55}$$

$$\omega=\frac{\bar{\omega}\kappa+\Omega_c\gamma_\perp}{\kappa+\gamma_\perp} \tag{5.56}$$

其中 $\Omega_c\equiv\Omega_\lambda$. 这与拉姆激光理论的频率公式一样. 当 $\Omega_c\neq\bar{\omega}$ 时，激光频率 ω 既不等于原子频率 $\bar{\omega}$，也不等于被动腔的模频率 Ω_c. 只有当原子频率与腔的模频率相等时(可调节腔长)，即 $\bar{\omega}=\Omega_c$ 时，激光频率 ω 才等于原子频率和腔的模频率. 即

$$\omega=\bar{\omega}=\Omega_c \tag{5.57}$$

5.3 单模激光器的瞬态特性

本节研究腔模与原子频率共振的均匀加宽的单模行波激光器.

对于单程的行波激光器，

$$\dot{a}=(-\mathrm{i}\Omega_\lambda-\kappa)a-\mathrm{i}g\sum_\mu\alpha_\mu \tag{5.58}$$

$$\dot{\alpha}_\mu=(-\mathrm{i}\bar{\omega}-\gamma_\perp)\alpha_\mu+\mathrm{i}ga d_\mu \tag{5.59}$$

$$\dot{d}_\mu=-\gamma_\parallel(d_\mu-d_0)+2\mathrm{i}g(\alpha_\mu a^*-\alpha_\mu^* a) \tag{5.60}$$

当腔的模频率与原子中心频率相等时，由(5.57)式，$\Omega=\bar{\omega}=\omega$. 再令

$$a=\tilde{a}\exp[-\mathrm{i}\omega t] \tag{5.61}$$

$$\alpha_\mu=\tilde{\alpha}_\mu\exp[-\mathrm{i}\omega t] \tag{5.62}$$

代入激光方程(5.58)～(5.60)，则有

$$\dot{\tilde{a}}=-\kappa\tilde{a}-\mathrm{i}g\sum_\mu\tilde{\alpha}_\mu \tag{5.63}$$

$$\dot{\tilde{\alpha}}_\mu=-\gamma_\perp\tilde{\alpha}_\mu+\mathrm{i}g\tilde{a}d_\mu \tag{5.64}$$

$$\dot{d}_\mu=-\gamma_\parallel(d_\mu-d_0)+2\mathrm{i}g(\tilde{\alpha}_\mu\tilde{a}^*-\tilde{\alpha}_\mu^*\tilde{a}) \tag{5.65}$$

下面介绍三种等价的解法.

(1) 微扰法

在最低级近似，

$$d_\mu\approx d_0 \tag{5.66}$$

由此求出近似的原子偶极矩 $\tilde{\alpha}_\mu^{(1)}$. 再由 $\tilde{\alpha}_\mu^{(1)}$ 求出较精确的 $d_\mu^{(1)}$. 然后由 $d_\mu^{(1)}$ 再求 $\tilde{\alpha}_\mu^{(2)}$，这样我们可以用光场 $\tilde{a}$ 把原子偶极矩 $\tilde{\alpha}_\mu$ 表示出来.

注意横向弛豫速率 $\gamma_\perp$ 较大的情况.

$$|\dot{\tilde{\alpha}}_\mu|\ll|\gamma_\perp\alpha_\mu| \tag{5.67}$$

由(5.64)式得到

$$\tilde{\alpha}_\mu^{(1)}=\frac{\mathrm{i}gd_0}{\gamma_\perp}\tilde{a}(t) \tag{5.68}$$

进而考虑到 $\dot{d}_\mu\ll-\gamma_\parallel(d_\mu-d_0)$，则由(5.65)得到

$$d_\mu^{(1)}=d_0-\frac{4g^2}{\gamma_\parallel\gamma_\perp}d_0|\tilde{a}|^2 \tag{5.69}$$

再利用 $d_\mu^{(1)}$ 计算 $\tilde{\alpha}_\mu^{(2)}$，则

$$\tilde{\alpha}_\mu^{(2)}=\frac{\mathrm{i}g}{\gamma_\perp}\tilde{a}(t)\left(d_0-\frac{4g^2}{\gamma_\parallel\gamma_\perp}d_0|\tilde{a}|^2\right) \tag{5.70}$$

这个原子偶极矩就是激光器的辐射源，将(5.70)式代入光场方程，则得到

$$\dot{\tilde{a}}=-\kappa\tilde{a}+\frac{g^2D_0}{\gamma_\perp}\tilde{a}-\frac{4g^4D_0}{\gamma_\parallel\gamma_\perp^2}|\tilde{a}|^2\tilde{a} \tag{5.71}$$

(2) 假设 $\gamma_\perp\gg\kappa,\gamma_\parallel$

由原子偶极矩的方程(5.64)移项，然后两边乘 $\exp[\gamma_\perp\tau]$，再从$-\infty$到 t 积分，

$$\int_{-\infty}^{t}(\dot{\tilde{\alpha}}_\mu+\gamma_\perp\tilde{\alpha}_\mu)\mathrm{e}^{\gamma_\perp\tau}\mathrm{d}\tau=\mathrm{i}g\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{\gamma_\perp\tau}(\tilde{a}d_\mu)\mathrm{d}\tau \tag{5.72}$$

方程(5.72)左边的积分函数

$$(\dot{\tilde{\alpha}}_\mu+\gamma_\perp\tilde{\alpha}_\mu)\mathrm{e}^{\gamma_\perp\tau}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\tilde{\alpha}_\mu\mathrm{e}^{\gamma_\perp\tau}) \tag{5.73}$$

因此(5.72)式左边变为

$$(\tilde{\alpha}_\mu\mathrm{e}^{\gamma_\perp\tau})\Big|_{-\infty}^{t}=\tilde{\alpha}_\mu\mathrm{e}^{\gamma_\perp t} \tag{5.74}$$

将(5.74)式代入(5.72)式，并将 $\exp(\gamma_\perp t)$ 移到右边，得到

$$\tilde{\alpha}_\mu=\mathrm{i}g\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\gamma_\perp(t-\tau)}(\tilde{a}d_\mu)\mathrm{d}\tau \tag{5.75}$$

对于 $\gamma_\perp\gg\kappa,\gamma_\parallel$ 的情况，原子的偶极矩 $\tilde{\alpha}_\mu$ 的弛豫速率比光场 $\tilde{a}$ 和原子反转粒子数 d_μ 的弛豫速率快，即 $\tilde{\alpha}_\mu$ 的弛豫时间($T_2=1/\gamma_\perp$)短，$\tilde{\alpha}_\mu$ 可以即时地跟随 $\tilde{a}$ 和 d_μ 的变化. 或者说，在 T_2 时间内，$\tilde{a}$ 和 d_μ 的变化可以忽略. 因此可以把(5.72)式中的$(\tilde{a}d_\mu)$提到积分号之外，

$$\tilde{a}_\mu=\mathrm{i}g\tilde{a}d_\mu\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\gamma_\perp(t-\tau)}\mathrm{d}\tau=\frac{\mathrm{i}g}{\gamma_\perp}\tilde{a}d_\mu \tag{5.76}$$

此式表明，$\tilde{\alpha}_\mu$ 能瞬时地跟随光场 $\tilde{a}$ 的变化. 这就是曾经提到过的绝热近似.

(3) 协同学的伺服原理

在协同学中，考虑不同的变量往往有不同的弛豫速率. 弛豫速率快的变量可以瞬时地跟随慢弛豫速率的变量. 这样便可以消除一些快弛豫的变量. 从弛豫时间或寿命来看，就是短寿命(快弛豫)跟随长寿命(慢弛豫)，或者“长寿命”的“统治”短寿命的. 物理意义与前边的计算相同，只是在具体应用时更简明. 例如，将方程(5.64)两边除以 $\gamma_\perp$，则有

$$\frac{1}{\gamma_\perp}\dot{\tilde{\alpha}}_\mu=-\alpha_\mu+\mathrm{i}\frac{g}{\gamma_\perp}\tilde{a}d_\mu \tag{5.77}$$

$$\frac{1}{\gamma_\perp}|\dot{\tilde{\alpha}}_\mu| = T_2|\dot{\tilde{\alpha}}_\mu| \ll |\tilde{\alpha}_\mu| \tag{5.78}$$

这样(5.64)式变为

$$0 = -\gamma_\perp \tilde{\alpha}_\mu + \mathrm{i}g\tilde{a}d_\mu \tag{5.79}$$

$$\tilde{\alpha}_\mu = \mathrm{i}\frac{g}{\gamma_\perp}\tilde{a}d_\mu \tag{5.80}$$

这样求出的 $\tilde{\alpha}_\mu$ 与(5.77)式一样.(5.80)式表明,在 t 时刻的光场 $\tilde{a}(t)$ 决定该时刻的原子偶极矩 $\tilde{\alpha}_\mu$. 当 $\gamma_\perp \ll \kappa, \gamma_\parallel$ 时,可以令 $\dot{\tilde{\alpha}}_\mu = 0$,其物理意义就是原子偶极矩能即时地跟随光场的变化.

将(5.71)式代入光场方程和反转粒子数方程,则

$$\dot{\tilde{a}} = -\kappa\tilde{a} + \frac{g^2}{\gamma_\perp}\tilde{a}\sum_\mu d_\mu \tag{5.81}$$

$$\dot{d}_\mu = -\gamma_\parallel(d_\mu - d_0) - \frac{4g^2}{\gamma_\perp}|\tilde{a}|^2 d_\mu \tag{5.82}$$

方程(5.81)和(5.82)就是B类激光器($\gamma_\perp \gg \kappa, \gamma_\parallel$)的动力学方程.

进而考虑A类激光器,即 $\kappa \ll \gamma_\parallel, \gamma_\perp$. 这时原子偶极矩和反转粒子数都能瞬时地跟随光场变化,所以可用绝热近似再消除变量 d_μ,

$$\frac{1}{\gamma_\parallel}\dot{d}_\mu = T_1\dot{d}_\mu \ll d_\mu \tag{5.83}$$

这在形式上相当于取 $\dot{d}_\mu = 0$,这时(5.82)变为

$$0 = -\gamma_\parallel(d_\mu - d_0) - \frac{4g^2}{\gamma_\perp}|\tilde{a}|^2 d_\mu \tag{5.84}$$

将 $\tilde{\alpha}_\mu$ 的公式(5.80)代入上式.

$$\gamma_\parallel d_\mu = \gamma_\parallel d_0 - \frac{4g^2}{\gamma_\perp}|\tilde{a}|^2 d_\mu \tag{5.85}$$

$$d_\mu = \frac{d_0}{1 + \dfrac{4g^2}{\gamma_\parallel\gamma_\perp}|\tilde{a}|^2} \tag{5.86}$$

将(5.86)式再代入 $\tilde{\alpha}_\mu$ 的公式(5.80),则

$$\tilde{\alpha}_\mu = \mathrm{i}\frac{g}{\gamma_\perp}\frac{d_0}{1 + \dfrac{4g^2}{\gamma_\parallel\gamma_\perp}|\tilde{a}|^2}\tilde{a} \tag{5.87}$$

(5.86)和(5.87)式就是A类激光器在共振时的原子偶极矩和反转粒子数公式. 将 $d_\mu, \tilde{\alpha}_\mu$ 代入(5.81)式,则

$$\dot{\tilde{a}} = -\kappa\tilde{a} + \frac{g^2 D_0}{\gamma_\perp}\frac{1}{1 + \dfrac{4g^2}{\gamma_\parallel\gamma_\perp}|\tilde{a}|^2}\tilde{a} \tag{5.88}$$

当激光器在阈值附近工作时，$|\tilde{a}|^2$ 较小，

$$|\tilde{a}|^2 \ll \frac{\gamma_{\parallel}\gamma_{\perp}}{4g^2} \tag{5.89}$$

这时可用如下的近似：

$$d_{\mu} \approx d_0\left(1-\frac{4g^2}{\gamma_{\parallel}\gamma_{\perp}}|\tilde{a}|^2\right) \tag{5.90}$$

$$\tilde{a}_{\mu} \approx \mathrm{i}\frac{gd_0}{\gamma_{\perp}}\left(1-\frac{4g^2}{\gamma_{\parallel}\gamma_{\perp}}|\tilde{a}|^2\right)\tilde{a} \tag{5.91}$$

同样，光场的方程(5.88)变为

$$\dot{\tilde{a}} = \left(\frac{g^2 D_0}{\gamma_{\perp}} - \kappa\right)\tilde{a} - \frac{4g^4 D_0}{\gamma_{\parallel}\gamma_{\perp}^2}|\tilde{a}|^2\tilde{a} \tag{5.92}$$

$$\dot{\tilde{a}} = \alpha'\tilde{a} - \beta|\tilde{a}|^2\tilde{a} \tag{5.93}$$

$$\alpha' = G - \kappa \tag{5.94}$$

$$\beta = \frac{4g^4 D_0}{\gamma_{\parallel}\gamma_{\perp}^2} \tag{5.95}$$

(5.93)式与拉姆理论的公式一样，α' 代表净增益，β 代表自饱和效应.

方程(5.93)在形式上与质点的运动方程相似. 设质点的质量为 m，阻尼力为 γ，质点坐标为 q，外力为 $\overline{K}(q)$，则运动方程为

$$m\ddot{q} + \gamma\dot{q} = \overline{K}(q) \tag{5.96}$$

当 $m \ll \gamma$ 时称为过阻尼，这时

$$\dot{q} = \frac{1}{\gamma}\overline{K}(q) \equiv K(q) \tag{5.97}$$

$$K(q) = \alpha q - \beta q^3 \tag{5.98}$$

定义势函数 $V(q)$

$$K(q) = -\frac{\partial V(q)}{\partial q} \tag{5.99}$$

$$V(q) = -\frac{1}{2}\alpha q^2 - \frac{1}{4}\beta q^4 \tag{5.100}$$

$V(q)-q$ 的曲线见图 5.1. 图中的虚线表示 $\alpha<0$ 对应于激光的 $G<\kappa$. 即低于阈值. 图中的实现表示 $\alpha>0$，相当于激光的 $G>\kappa$，即高于阈值. 因此，图 5.1 中的虚线在形式上代表激光器在低于阈值的情况，而图中的实线代表高于阈值的情况. 由图中可知在低于阈值时，$q=0$ 是稳定的，但在高于阈值($G>\kappa$)时，$q=0$ 变得不稳定，这时有两个新的

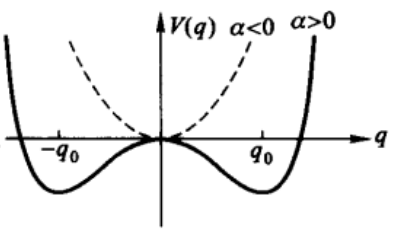


图 5.1 势函数 $V(q)-q$ 曲线

稳定解.

$$q=\pm|q_0| \tag{5.101}$$

本来当 $G<\kappa$ 时,$q=\pm|q_0|$ 的两点都应趋于 $q=0$ 点,即 $q=\pm|q_0|$ 是对称的. 一旦 $G>\kappa$,则 $\pm|q_0|$ 代表两个不同的态,即 $+|q_0|$ 和 $-|q_0|$ 不对称了. 这种现象称为对称性破缺(symmetry breaking 或 broken symmetry).

注意,在激光方程中,$|\tilde{a}|^2$ 就是光子数,由(5.93)式可得到

$$\dot{n}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tilde{a}\tilde{a}^*)=\dot{\tilde{a}}\tilde{a}^*+\tilde{a}\dot{\tilde{a}}^*=2\alpha' n-2\beta n^2 \tag{5.102}$$

定态解是

$$n=\alpha'/\beta \tag{5.103}$$

显然,(5.102)式和(5.103)式与速率方程结果相同. 但是,$\tilde{a}$ 是复数. 将 $\tilde{a}$ 写成振幅和位相部分

$$\tilde{a}=r(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi(t)} \tag{5.104}$$

其中 $r(t)$ 和 $\phi(t)$ 是实数. 将(5.104)代入(5.93),令实部和虚部分别相等,则

$$\dot{\phi}=0 \tag{5.105}$$

$$\dot{r}=\alpha' r-\beta r^3 \tag{5.106}$$

(5.105)式表明 ϕ 是一个待定常数. (5.106)的解是

$$r=\left(\frac{\alpha' h(t)}{1+\beta h(t)}\right)^{1/2} \tag{5.107}$$

$$h(t)=\frac{r_0^2}{\alpha'-\beta r_0^2}\exp\left[2\alpha'(t-t_0)\right] \tag{5.108}$$

方程(5.106)、(5.107)和(5.108)有丰富的协同学意义,许多现象都有类似的关系(见第 28 章).

5.4 非共振的单模激光器

上节讨论的是腔模与原子频率共振的情况. 若腔模的频率与原子频率不同,而且不限于行波激光器,同样可用 M-B 方程讨论激光器的瞬态特性.

单模激光器的 M-B 方程是

$$\dot{a}_\lambda=(-\mathrm{i}\Omega_\lambda-\kappa)a_\lambda-\mathrm{i}\sum_\mu g_{\mu\lambda}^*\alpha_\mu \tag{5.109}$$

$$\dot{\alpha}_\mu=(-\mathrm{i}\bar{\omega}_\mu-\gamma_\perp)\alpha_\mu+\mathrm{i}g_{\mu\lambda}a_\lambda d_\mu \tag{5.110}$$

$$\dot{d}_\mu=-\gamma_\parallel(d_\mu-d_0)+2\mathrm{i}(g_{\mu\lambda}^*\alpha_\mu a_\lambda^*-g_{\mu\lambda}\alpha_\mu^* a_\lambda) \tag{5.111}$$

$$a_\lambda=\tilde{a}_\lambda\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{5.112}$$

$$\alpha_\mu = \tilde{\alpha}_\mu e^{-i\omega t} \tag{5.113}$$

考虑 $\gamma_\perp \gg \kappa, \gamma_\parallel$，则 α_μ 能即时地跟随 a_λ 和 d_μ 的变化，这样可从 M－B 方程中消除 α_μ.

将(5.112)，(5.113)式代入(5.109)式，(5.110)和(5.11)式，并令 $\dot{\alpha}_\mu = 0$，可得到

$$\tilde{\alpha}_\mu = \frac{ig_{\mu\lambda} d_\mu \tilde{a}_\lambda}{i(\bar{\omega}_\mu - \omega) + \gamma_\perp} \tag{5.114}$$

这样得到 B 类激光器($\gamma_\perp \gg \kappa, \gamma_\parallel$)的方程

$$\dot{\tilde{a}}_\lambda = [-i(\Omega_\lambda - \omega) - \kappa_\lambda]\tilde{a}_\lambda + \sum_\mu |g_{\mu\lambda}|^2 \frac{d_\mu}{i(\bar{\omega}_\mu - \omega) + \gamma_\perp} \tilde{a}_\lambda \tag{5.115}$$

$$\dot{d}_\mu = -\gamma_\parallel (d_\mu - d_0) - 4|g_{\mu\lambda}|^2 \frac{d_\mu \gamma_\perp}{(\bar{\omega}_\mu - \omega)^2 + \gamma_\perp^2} |\tilde{a}_\lambda|^2 \tag{5.116}$$

对于 A 类激光器，$\gamma_\parallel, \gamma_\perp \gg \kappa, d_\mu$ 和 α_μ，都可即时地跟随场的变化，这样还可以从 M－B 方程中消去 d_μ，相当于取 $\dot{d}_\mu = 0$.

这样，由(5.116)式得到

$$d_\mu = \frac{d_0}{1 + \dfrac{4|g_{\mu\lambda}|^2}{\gamma_\parallel} \dfrac{\gamma_\perp}{(\bar{\omega}_\mu - \omega)^2 + \gamma_\perp^2} |\tilde{a}|^2} \tag{5.117}$$

将(5.117)式代入(5.114)式，则

$$\tilde{\alpha}_\mu = \frac{ig_{\mu\lambda}}{i(\bar{\omega}_\mu - \omega) + \gamma_\perp} \frac{d_0}{1 + \dfrac{4|g_{\mu\lambda}|^2}{\gamma_\parallel \gamma_\perp} \dfrac{\gamma_\perp}{(\bar{\omega}_\mu - \omega)^2 + \gamma_\perp^2} |\tilde{a}_\lambda|^2} \tilde{a}_\lambda \tag{5.118}$$

由此可求出宏观极化强度.

将 d_μ 的公式(5.117)代入场方程(5.115)，则

$$\dot{\tilde{a}}_\lambda = [-i(\Omega_\lambda - \omega) - \kappa_\lambda]\tilde{a}_\lambda + \sum_\mu \frac{|g_{\mu\lambda}|^2}{i(\bar{\omega}_\mu - \omega) + \gamma_\perp} \times \frac{d_0 |\tilde{a}|}{1 + \dfrac{4|g_{\mu\lambda}|^2}{\gamma_\parallel} \dfrac{\gamma_\perp}{(\bar{\omega}_\mu - \omega)^2 + \gamma_\perp^2} |\tilde{a}|^2} \tag{5.119}$$

对于均匀加宽的介质，(5.119)式变为

$$\dot{\tilde{a}}_\lambda = (-i\delta - \kappa_\lambda)\tilde{a}_\lambda + \frac{|g_{\mu\lambda}|^2 (\gamma_\perp - i\Delta) D_0}{\Delta^2 + \gamma_\perp^2 + (4|g_{\mu\lambda}|^2 \gamma_\perp / \gamma_\parallel)|\tilde{a}_\lambda|^2} \tilde{a}_\lambda \tag{5.120}$$

当激光器工作在阈值附近时，上式变为

$$\dot{\tilde{a}}_\lambda = (-i\delta - \kappa_\lambda)\tilde{a}_\lambda + |g_{\mu\lambda}|^2 \frac{(\gamma_\perp - i\bar{\Delta}) D_0}{\Delta^2 + \gamma_\perp^2} \times \left\{1 - \frac{(4|g_{\mu\lambda}|^2 \gamma_\perp / \gamma_\parallel)|\tilde{a}_\lambda|^2}{(\Delta^2 + \gamma_\perp^2)}\right\} \tilde{a}_\lambda \tag{5.121}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\delta &\equiv \Omega_\lambda - \omega \\ \Delta &= \bar{\omega}_\mu - \omega\end{aligned}\right\} \tag{5.122}$$

方程(5.121)中 $\tilde{a}_\lambda$ 仍是复数

$$\tilde{a}_\lambda = |\tilde{a}_\lambda| e^{-i\phi_\lambda} \tag{5.123}$$

由方程的实部得到

$$\frac{d}{dt}|\tilde{a}_\lambda| = -\kappa_\lambda |\tilde{a}_\lambda| + \frac{|g_{\mu\lambda}|^2 \gamma_\perp D_0}{\Delta^2+\gamma_\perp^2}|\tilde{a}_\lambda| - \frac{|g_{\mu\lambda}|^2 \gamma_\perp D_0}{\Delta^2+\gamma_\perp^2}\frac{4|g_{\mu\lambda}|^2|\tilde{a}_\lambda|^2}{(\Delta^2+\gamma_\perp^2)}\frac{\gamma_\perp}{\gamma_\parallel}|\tilde{a}_\lambda| \tag{5.124}$$

方程(5.124)中第一项是损耗项,第二项是增益项,第三项是饱和项.

光场增益 G 和阈值分别是

$$\left.\begin{aligned}G &= \frac{|g_{\mu\lambda}|^2 \gamma_\perp}{\Delta^2+\gamma_\perp^2} D_0 \\ D_t &= \kappa_\lambda \left(\frac{\Delta^2+\gamma_\perp^2}{|g_{\mu\lambda}|^2 \gamma_\perp}\right)\end{aligned}\right\} \tag{5.125}$$

显然,非共振($\Delta \neq 0$)比共振时增益低、阈值高.

若令 $\frac{d}{dt}|\tilde{a}_\lambda| = 0$,则由(5.124)可得到定态激光的光子数

$$\left.\begin{aligned}|\tilde{a}_\lambda|^2 &= n_\lambda = \alpha'/\beta' \\ \alpha' &= (G - \kappa_\lambda) \\ \beta' &= \frac{4|g_{\mu\lambda}|^4 \gamma_\perp D_0}{(\Delta^2+\gamma_\perp^2)^2}(\gamma_\perp/\gamma_\parallel)\end{aligned}\right\} \tag{5.126}$$

5.5 锁模激光器

锁模激光器可产生皮秒(10^{-12} s)甚至飞秒(10^{-15} s)的激光脉冲.

常用的主动锁模技术是对腔的损耗进行调制,调制频率 f_m 等于纵模间隔 $c/(2L)$,损耗为

$$\kappa(t) = \kappa_0\left(1 + \frac{M}{2}\cos(2\pi f_m t)\right) \tag{5.127}$$

若均匀加宽的线型中心角频率 ω_0,调制后,

$$\begin{aligned}&(E_0 \cos\omega_0 t)\left[1 + \frac{M}{2}\cos(2\pi f_m t)\right] \\ &= E_0\cos\omega_0 t + \frac{1}{4}M\cos(\omega_0 t + 2\pi f_m t) + \frac{1}{4}M\cos(\omega_0 t - 2\pi f_m t)\end{aligned} \tag{5.128}$$

光在腔内多次通过调制器，可产生 $\omega_0 \pm n2\pi f_m$ 的边带. 所有这些频率的振荡，都有相同的初位相(这里初位相都是零)，叠加后产生超短脉冲系列，见图 5.2.

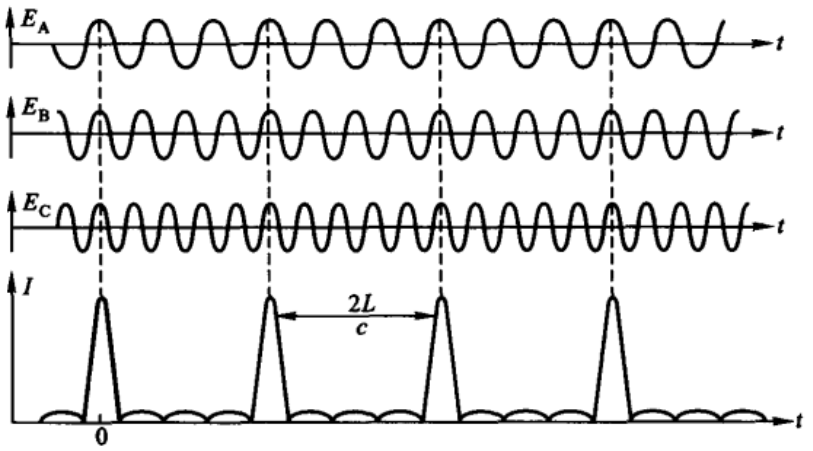


图 5.2 锁模激光示意图

将(5.127)代入场方程，则

$$\dot{a}_\lambda = (-i\omega_\lambda - \kappa_0)a_\lambda + \frac{M}{2}\kappa_0 \cos(\omega_m t)(a_{\lambda+1} + a_{\lambda-1}) + i\sum_\mu g_{\mu\lambda}\alpha_\mu \tag{5.129}$$

其中 $(a_{\lambda+1} + a_{\lambda-1})$ 是考虑到纵模 $\omega_{\lambda+1}$ 和 $\omega_{\lambda-1}$ 经调制后都可产生 ω_λ 的成分，即 $\omega_{\lambda-1} + 2\pi f_m = \omega_{\lambda+1} - 2\pi f_m = \omega_\lambda$. 这就是主动锁模的均匀加宽的 A 类激光方程. 哈肯将其中的极化强度写成

$$i\sum_\mu g_{\mu\lambda}\alpha_\mu \equiv (G_\lambda - i\psi_\lambda)a_\lambda \tag{5.130}$$

其中的 α_μ 由方程 $\dot{\alpha}_\mu = \dot{d}_\mu = 0$ 得到. 经过复杂的推导，哈肯将方程(5.129)变成谐振子方程，得到激光脉宽(注意锁模的模数是 λ_m 而 $\omega_m = 2\pi f_m$)

$$\Delta t = \left(M' + \frac{1}{2}\right)^{1/2} \Big/ (\lambda_m \omega_m) \tag{5.131}$$

M' 是正整数. Δt 最窄等于增益曲线半宽的倒数，由图 5.3 可以估算锁模的脉冲宽度和重复率. 在图 5.3(a)中，$t=0$，m 个模叠加起来对应脉冲峰值. 在稍后的时刻 t'(图 5.3(b))，相邻的纵模的位相差 $\theta = (\omega_m - \omega_1)t'/(m-1)$. 当 $\theta = \frac{2\pi}{m}$ 时(图 5.3(c))，光强为零，这时 $t' = \Delta t \approx 2\pi/(\omega_m - \omega_1) = 1/\Delta\nu$，$\Delta\nu$ 即增益曲线半宽度. 当 $\theta = 2\pi$ 时(图 5.3(d))，光强又达峰值，这时 $t' = T$，显而易见 $(\omega_m - \omega_1)T/(m-1) = 2\pi$，其中，$(\omega_m - \omega_1) \approx 2\pi mc/(2L)$，这样脉冲重复率为 $2L/c$.

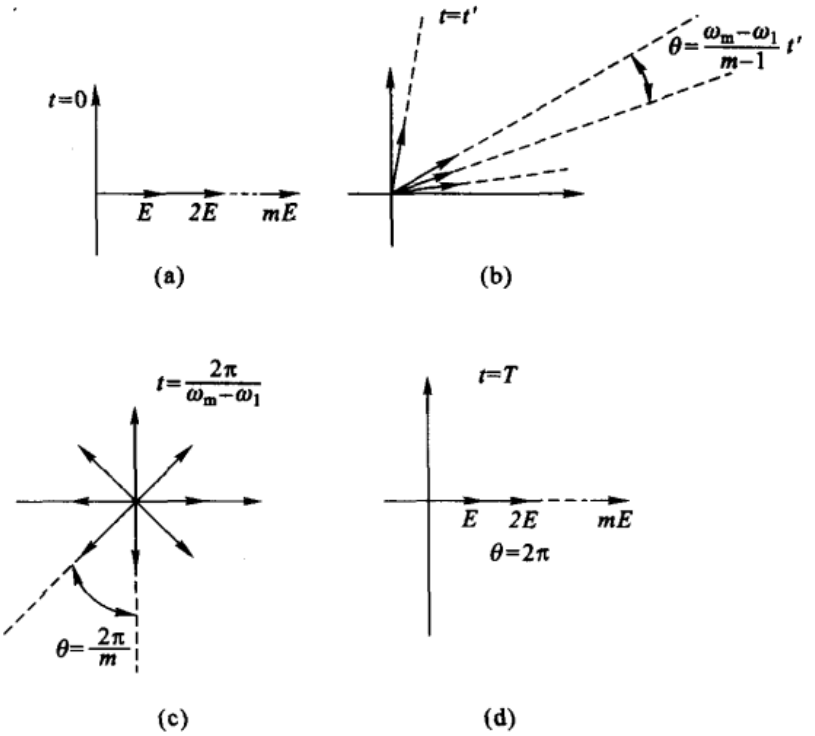


图 5.3 锁模的相位图

5.6 从半经典理论过渡到速率方程理论

本节讨论如何从激光的半经典理论过渡到速率方程理论. 这样可使速率方程的适用条件一目了然.

利用哈肯的激光方程(5.1),(5.2)和(5.3),令第 λ 个模的激光频率是 ω_λ,

$$\left.\begin{aligned} a_\lambda &= \tilde{a}_\lambda \exp\left[-\mathrm{i}\omega_\lambda t\right] \\ \alpha_\mu &= \tilde{\alpha}_\mu \exp\left[-\mathrm{i}\omega_\lambda t\right] \end{aligned}\right\} \tag{5.132}$$

代入哈肯的激光方程,则

$$\dot{\tilde{a}}_\lambda = -\mathrm{i}(\Omega_\lambda - \omega_\lambda)\tilde{a}_\lambda - \kappa\tilde{a}_\lambda - \mathrm{i}\sum_\mu g^*_{\mu\lambda}\tilde{\alpha}_\mu \tag{5.133}$$

$$\dot{\tilde{\alpha}}_\mu = -\mathrm{i}(\bar{\omega}_\mu - \omega_\lambda)\tilde{\alpha}_\mu - \gamma_\perp\tilde{\alpha}_\mu + \mathrm{i}\sum_\lambda g_{\mu\lambda}\tilde{a}_\lambda d_\mu \tag{5.134}$$

$$\dot{d}_\mu = -\gamma_\parallel(d_\mu - d_0) + 2\mathrm{i}\sum_\mu (g^*_{\mu\lambda}\tilde{\alpha}_\mu\tilde{a}^*_\lambda - g_{\mu\lambda}\tilde{\alpha}^*_\mu\tilde{a}_\lambda) \tag{5.135}$$

其中 $\tilde{a}_\lambda$ 和 $\tilde{\alpha}_\mu$ 是慢变振幅.

假设 $\gamma_\perp \gg \kappa, \gamma_\parallel$,则可将 $\tilde{\alpha}_\mu$ 绝热消除. 令(5.134)式 $\dot{\tilde{\alpha}}_\mu = 0$,有

$$\tilde{\alpha}_\mu = \sum_{\lambda'} \frac{\mathrm{i}g_{\mu\lambda'}d_\mu}{\mathrm{i}(\bar{\omega}_\mu - \omega_\lambda) + \gamma_\perp}\tilde{a}_{\lambda'} \tag{5.136}$$

将(5.136)式代入(5.133)式,得到

$$\dot{\tilde{a}}_\lambda = -\mathrm{i}(\Omega_\lambda - \omega_\lambda)\tilde{a}_\lambda - \kappa_\lambda \tilde{a}_\lambda + \sum_\mu \sum_{\lambda'} \frac{g^*_{\mu\lambda} g_{\mu\lambda'} d_\mu \tilde{a}_{\lambda'}}{\mathrm{i}(\bar{\omega}_\mu - \omega_\lambda) + \gamma_\perp} \tag{5.137}$$

再假设激光的频率与腔的模频率相等,即 $\Omega_\lambda = \omega_\lambda$,则(5.137)式变为

$$\dot{\tilde{a}}_\lambda = -\kappa_\lambda \tilde{a}_\lambda + \sum_\mu \sum_{\lambda'} \frac{g^*_{\mu\lambda} g_{\mu\lambda'} d_\mu \tilde{a}_{\lambda'}}{\mathrm{i}(\bar{\omega}_\mu - \omega_\lambda) + \gamma_\perp} \tag{5.138}$$

将(5.138)式两边乘 $\tilde{a}^*_\lambda$,

$$\dot{\tilde{a}}_\lambda \tilde{a}^*_\lambda = -\kappa_\lambda \tilde{a}_\lambda \tilde{a}^*_\lambda + \sum_\mu \sum_{\lambda'} \frac{g^*_{\mu\lambda} g_{\mu\lambda'} d_\mu \tilde{a}_{\lambda'} \tilde{a}^*_\lambda}{\mathrm{i}(\bar{\omega}_\mu - \omega_\lambda) + \gamma_\perp} \tag{5.139}$$

$$\dot{n}_\lambda = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tilde{a}_\lambda \tilde{a}^*_\lambda) = \dot{\tilde{a}}_\lambda \tilde{a}^*_\lambda + \text{c. c.}$$

$$= -2\kappa_\lambda n_\lambda + \sum_\mu \sum_{\lambda'} \left(\frac{g^*_{\mu\lambda} g_{\mu\lambda'} d_\mu \tilde{a}_{\lambda'} \tilde{a}^*_\lambda}{\mathrm{i}(\bar{\omega}_\mu - \omega_\lambda) + \gamma_\perp} + \text{c. c.} \right) \tag{5.140}$$

下面将(5.140)式对不同模的位相求平均.假定不同模的振荡的位相是无关联的,则将 $\tilde{a}_{\lambda'} \tilde{a}^*_\lambda$ 对位相求平均时,有

$$\langle \tilde{a}_{\lambda'} \tilde{a}^*_\lambda \rangle = n_\lambda \delta_{\lambda\lambda'} \tag{5.141}$$

其中 $n = \tilde{a}_\lambda \tilde{a}^*_\lambda$.将(5.141)式代入(5.142)式,有

$$\dot{n}_\lambda = -2\kappa_\lambda n_\lambda + \sum_\mu |g_{\mu\lambda}|^2 d_\mu n_\lambda \frac{2\gamma_\perp}{(\bar{\omega}_\mu - \omega_\lambda)^2 + \gamma_\perp^2} \tag{5.142}$$

引入

$$W_{\lambda\mu} = |g_{\mu\lambda}|^2 \frac{2\gamma_\perp}{(\bar{\omega}_\mu - \omega_\lambda)^2 + \gamma_\perp^2} \tag{5.143}$$

则有

$$\dot{n}_\lambda = -2\kappa_\lambda n_\lambda + \sum_\mu W_{\lambda\mu} d_\mu n_\lambda \tag{5.144}$$

其中 $W_{\lambda\mu}$ 正是速率方程中用过的跃迁速率.

同样可以求出反转粒子数方程.为此,将(5.136)式代入方程(5.135),并对位相求平均,则得到

$$\dot{d}_\mu = -\gamma_\parallel (d_\mu - d_0) - 2 \sum_\lambda W_{\lambda\mu} d_\mu n_\lambda \tag{5.145}$$

方程(5.144)和(5.145)正是速率方程.

从以上推导过程可知,速率方程的适用条件是:

(1) $\gamma_\perp \gg \kappa, \gamma_\parallel$,即只适于 B 类激光器.如红宝石,YAG,$CO_2$ 激光器等.不适于 A 类和 C 类激光器.

(2) $\omega_\lambda = \Omega_\lambda$,$\omega_\lambda$ 和 Ω_λ 分别是激光频率和腔模频率.这说明速率方程不能计算出激光频率(不能说明为什么 ω_λ 与 Ω_λ 一般并不相等).

(3) $\langle \tilde{a}_{\lambda'} \tilde{a}^*_\lambda \rangle = n_\lambda \delta_{\lambda\lambda'}$,即不同的模的振荡的位相无关.因此速率方程

不能解释锁模激光原理(锁模激光器不同的模的位相是锁定的).

习题与思考

(1) 用 $\dot{\mathscr{E}},\dot{P},\dot{D}$ 的方程(行波)计算激光器的阈值、激光频率、动态方程 $\dot{\mathscr{E}}$ 以及势函数 V.

(2) 由 $D_0 g^2/\gamma_\perp=\kappa$ 和 g^2 的定义(这里 g 是耦合因子),计算阈值.

(3) 激光器的定态光强与哪些因素有关?

(4) 激光器的腔模频率、原子跃迁频率、激光频率之间有什么关系?

(5) 什么叫绝热近似? 参数 $\gamma_\parallel,\gamma_\perp,\kappa$ 对激光器的动力学方程有什么重要影响?

(6) 激光器的等效势函数 V 在阈值上、下有什么突变? 有什么物理意义?

(7) 由公式(5.107)和(5.108)分别讨论 $\alpha'>0$ 和 $\alpha'<0$ 时,$t\to\infty$时激光光强随 t 的变化趋势,并说明物理原因.

(8) 非共振时的激光阈值、定态光子数与哪些因素有关? 与共振情况进行比较.

(9) 速率方程适用条件是什么? 为何不能解释锁模?

参 考 文 献

[1] Haken H, Sauermann H Z. Nonlinear interaction of laser modes. Phys., 1963, 173:261 - 275

[2] Haken H. Laser theory, Encyclopedia of Physics Vol. XXV/2c. Berlin: Springer, 1970. 1984

[3] 王清月,赵兴俊,向望华,飞秒染料激光器中啁啾和色散特性的实验研究,中国激光, 1989,4:46 - 48

第 6 章　拉姆的半经典激光理论

本章从麦克斯韦-布洛赫方程出发，介绍拉姆的半经典激光理论. 以均匀加宽的激光器为例，分别讨论单模振荡和多模振荡，所得到的结果都与哈肯理论一致.

在历史上，拉姆理论的最大成功是在对气体激光器的系统研究方面. 对此将在下章专门介绍.

6.1　激光器的场方程

拉姆理论同样采取以下近似条件，即二能级近似、电偶极近似、原子间没有直接作用、旋转波近似和慢变振幅近似.

对于激光器的起始振荡的过程和机理，哈肯是用自组织原理解释，拉姆则是用自洽条件解释. 所谓自洽条件，即先假定存在一个电磁场 $E'(r,t)$，这个电磁场又作用到激活介质，引起介质的极化. 该极化强度又作为麦克斯韦方程的辐射源. 自洽条件就是要求在这个循环中，产生的电磁场 $E(r,t)$ 等于开始假定的电磁场 $E'(r,t)$.

拉姆用激光器的场方程描述光场，而用光学布洛赫方程描述介质. 他把场方程分成实部与虚部，分别描述激光的场强和激光的频率特性. 前者由极化强度的虚部决定，后者由极化强度的实部决定. 这样，只要计算出极化强度，这类问题就迎刃而解了.

拉姆理论的这个框架，优点是条理分明，物理意义清楚. 然而只有对 A 类激光器，才能计算出极化强度. 在许多情况下，不可能单独计算出极化强度. 因此，不可能将拉姆处理激光器的方法生搬硬套. 对于一般的问题，应把场方程与光学布洛赫方程联系起来，而这正是麦克斯韦-布洛赫方程.

拉姆场方程的推导可参考拉姆学派的《激光物理学》一书. 在这里，由于我们是用 M－B 方程统揽全书，故直接用 M－B 方程组的场方程得到拉姆的场方程.

M－B 方程组的场方程是

$$\dot{E}_\lambda^{(+)}=(-\mathrm{i}\Omega_\lambda-\kappa_\lambda)E_\lambda^{(+)}+\frac{\mathrm{i}\Omega_\lambda}{2\varepsilon_0}P_\lambda^{(+)} \tag{6.1}$$

其中 $E_\lambda^{(+)}$ 和 $P_\lambda^{(+)}$ 是第 λ 个模的光场与极化强度的正频分量，Ω_λ 是被动腔的第 λ 个模的角频率，κ_λ 是光场损耗. 该方程的量纲为 1 形式即哈肯的场方程.

下面把下标 λ 改为 n，即讨论第 n 个模的场方程.

$$E_\lambda^{(+)}\equiv E_n^{(+)}=E_n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_n t-\mathrm{i}\phi_n} \tag{6.2}$$

$$P_\lambda^{(+)}\equiv P_n^{(+)}=P_n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_n t-\mathrm{i}\phi_n} \tag{6.3}$$

代入方程(6.1)，并令实部、虚部分别相等，便立即得到拉姆的场方程：

$$\dot{E}_n+\kappa_n E_n=-\frac{1}{2}\frac{\omega_n}{\varepsilon_0}\mathrm{Im}\ (P_n) \tag{6.4}$$

$$\omega_n+\dot{\phi}_n=\Omega_n-\frac{1}{2}\frac{\omega_n}{\varepsilon_0}\frac{1}{E_n}\mathrm{Re}\ (P_n) \tag{6.5}$$

其中右边用到了 $\omega_n\approx\Omega_n$.

用腔的 Q 值表示损耗，则

$$\kappa_n=\frac{1}{2}\frac{\omega_n}{Q_n} \tag{6.6}$$

若用极化率 χ_n 表示极化强度，

$$P_n=\varepsilon_0(\chi'_n+\mathrm{i}\chi''_n)E_n \tag{6.7}$$

$$\dot{E}_n+\frac{1}{2}\frac{\omega_n}{Q_n}E_n=-\frac{1}{2}\omega_n\chi''E_n \tag{6.8}$$

$$\omega_n+\dot{\phi}_n=\Omega_n-\frac{1}{2}\omega_n\chi'_n \tag{6.9}$$

拉姆场方程的物理意义是显而易见的：

(1) 腔内若无激活介质，则光强指数衰减，衰减常数为 $2\kappa_n$.

(2) 在定态，$\dot{E}_n=0$，由此得到阈值条件

$$-\chi''_n=1/Q_n \tag{6.10}$$

(3) 第 n 个纵模的激光频率与被动腔的频率偏离 $-\frac{1}{2}\omega_n\chi'_n$，这表明激活介质折射率(即激发之后对基质的相对折射率)

$$\eta(\omega_n)=\Omega_n/(\omega_n+\dot{\phi}_n)=\Omega_n/\left(\Omega_n-\frac{1}{2}\omega_n\chi'_n\right) \tag{6.11}$$

因为 $\omega_n\approx\Omega_n$，$\chi'_n\ll 1$，

$$\eta(\omega_n)\approx 1+\frac{1}{2}\chi'_n \tag{6.12}$$

χ'_n 反映激活原子的色散. 这里应特别指出，激光器的增益介质影响振荡频率，而在经典的吸收问题中介质影响波长. 其原因在于激光理论中

要求腔内光场满足自洽性，即往返一次的光程差必须是波长的整数倍.

6.2 增益介质的宏观极化强度的计算

本节用光学布洛赫方程计算均匀加宽的激光介质的宏观极化强度.

回想在哈肯激光理论中，方程内包含因子

$$g_{\mu\lambda}=\mathrm{i}\theta_{ab}u_{\lambda}(x_{\mu})\sqrt{\Omega_{\lambda}/(2\hbar\varepsilon_{0})} \tag{6.13}$$

其中 $\theta_{ab}\equiv-\mu_{ab}\equiv-\mu$. x_{μ} 是第 μ 个原子的位置. 对于 A 类激光器 ($\kappa\ll\gamma_{\parallel},\gamma_{\perp}$)，在解哈肯的激光方程时，原子偶极矩 α_{μ} 中出现 $|g_{\mu\lambda}|^{2}$ 和 $|g_{\mu\lambda}|^{4}$，分别含有 $u_{\lambda}^{2}(x_{\mu})=\sin^{2}k_{\lambda}x_{\mu}$，$u_{\lambda}^{4}(x_{\mu})=\sin^{4}k_{\lambda}x_{\mu}$. 在拉姆理论中也有类似问题，处理方法稍有不同.

在拉姆理论中，必须先求 ρ_{ab}，为此利用熟知的方程

$$\dot{\rho}_{ab}=-(\mathrm{i}\bar{\omega}+\gamma_{\perp})\rho_{ab}+\mathrm{i}\hbar^{-1}V_{ab}(x,t)(\rho_{aa}-\rho_{bb}) \tag{6.14}$$

$$\dot{\rho}_{aa}=\lambda_{a}-\gamma_{a}\rho_{aa}-(\mathrm{i}\hbar^{-1}V_{ab}\rho_{ba}+\mathrm{c.c.}) \tag{6.15}$$

$$\dot{\rho}_{bb}=\lambda_{b}-\gamma_{b}\rho_{bb}+(\mathrm{i}\hbar^{-1}V_{ab}\rho_{ba}+\mathrm{c.c.}) \tag{6.16}$$

当光场为零时(相当于泵浦过程)，由于泵浦过程(λ_{a} 和 λ_{b})与弛豫过程(γ_{a} 和 γ_{b})的动态平衡，反转粒子数是

$$D_{0}=N'(\lambda_{a}/\gamma_{a}-\lambda_{b}/\gamma_{b})=N'd_{0} \tag{6.17}$$

其中 N'是总的活性粒子数，这相当于均匀加宽的介质的 $D_{0}=\sum_{\mu}d_{0}=N'd_{0}$.

均匀加宽介质的极化强度是

$$P(x,t)=N'\mu[\rho_{ab}(x,t)+\rho_{ab}^{*}(x,t)] \tag{6.18}$$

将 $P(x,t)$按腔的本征模 $U_{n}(x)=\sin k_{n}x$ 展开

$$\begin{aligned}P(x,t)&=\frac{1}{2}\sum_{n}P_{n}(t)\exp[-\mathrm{i}(\omega_{n}t+\phi_{n})]U_{n}(x)+\mathrm{c.c.}\\&=N'\mu[\rho_{ab}(x,t)+\rho_{ab}^{*}(x,t)]\end{aligned} \tag{6.19}$$

将(6.19)式两边乘 $U_{n}^{*}(x)$，对 x 积分，并利用正交关系

$$\frac{1}{N_{n}}\int U_{n}^{*}(x)U_{n'}(x)\mathrm{d}x=\delta_{nn'} \tag{6.20}$$

则

$$P_{n}(t)=2N'\mu\exp[\mathrm{i}(\omega_{n}t+\phi_{n})]\frac{1}{N_{n}}\int_{0}^{L}U_{n}^{*}\rho_{ab}(x,t)\mathrm{d}x \tag{6.21}$$

为了计算 $P_{n}(t)$，必须求出 $\rho_{ab}(x,t)$. 为此，利用方程(6.14)，(6.15)和(6.16). 考虑到第 n 个模的光场的作用是

$$V_{ab}(x,t)=-\frac{1}{2}\mu E_n(t)\exp\left[-\mathrm{i}(\omega_n t+\phi_n)\right]U_n(x) \tag{6.22}$$

将(6.22)式代入(6.14)式.然后考虑 $\kappa\ll\gamma_\perp,\gamma_\parallel$ 的情况,原子变量可以即时地跟随光场变化,故可绝热消除 ρ_{ab},ρ_{aa} 和 ρ_{bb},见 5.2 节.利用(6.22)式,并且令 $\dot{\rho}_{ab}=0$,则有

$$\rho_{ab}(x,t)=-\frac{1}{2}\mathrm{i}\frac{\mu E_n}{\hbar}\exp\left[-\mathrm{i}(\omega_n t+\phi_n)\right]U_n(x)\frac{\rho_{aa}-\rho_{bb}}{\mathrm{i}(\bar{\omega}-\omega_n)+\gamma_\perp} \tag{6.23}$$

将 $\rho_{ab}(x,t)$ 代入 $\dot{\rho}_{aa}$ 和 $\dot{\rho}_{bb}$ 的公式(6.15)和(6.16),

$$\dot{\rho}_{aa}=\lambda_a-\gamma_a\rho_{aa}-R(\rho_{aa}-\rho_{bb}) \tag{6.24}$$

$$\dot{\rho}_{bb}=\lambda_b-\gamma_b\rho_{bb}+R(\rho_{aa}-\rho_{bb}) \tag{6.25}$$

$$\begin{aligned}R&\equiv\frac{1}{2}\left(\frac{\mu E_n}{\hbar}\right)^2|U_n(x)|^2\frac{\gamma_\perp}{(\bar{\omega}-\omega_n)^2+\gamma_\perp^2}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{\mu E_n}{\hbar}\right)^2|U_n(x)|^2\frac{1}{\gamma_\perp}\mathscr{L}(\bar{\omega}-\omega_n)\end{aligned} \tag{6.26}$$

$$\mathscr{L}(\bar{\omega}-\omega_n)=\frac{\gamma_\perp^2}{(\bar{\omega}-\omega_n)^2+\gamma_\perp^2} \tag{6.27}$$

方程(6.25)主要物理过程见图 6.1.从(6.26)式可知,R 就是受激辐射速率,相当于哈肯理论中的 $W_{\lambda\mu}n_\lambda$,见(5.144)式.

令 $\dot{\rho}_{aa}-\dot{\rho}_{bb}=0$,则有

$$d=(\rho_{aa}-\rho_{bb})=\frac{d_0}{1+\frac{R}{R_s}} \tag{6.28}$$

$$R_s=\gamma_a\gamma_b/(2\gamma_{ab}) \tag{6.29}$$

$$\gamma_{ab}=\frac{1}{2}(\gamma_a+\gamma_b) \tag{6.30}$$

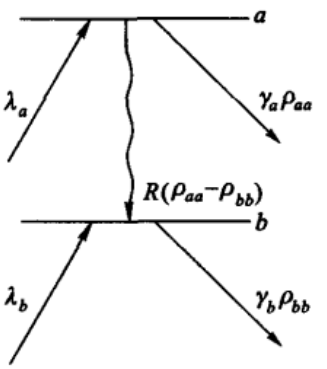


图 6.1 拉姆激光理论的二能级模型

(6.28)式表明:(1)$|E_n|^2=0$ 时,反转粒子数(d_0)仅由泵浦和弛豫过程决定.(2)$|E_n|^2$ 增大,则反转粒子数减少,导致增益饱和.(3)R_s 是饱和参数,当 $R=R_s$ 时,反转降到零场时的一半.(4)由于 $R\propto\sin^2 k_n x$,故反转的空间分布与 x 有关,呈驻波形式.在波节处 $R=0$,反转粒子数最多,而在波峰处的 R 大,反转粒子数最少.这种现象就是著名的反转密度的空间烧孔效应.

将(6.28)代入(6.23),再将 ρ_{ab} 代入 $P_n(t)$ 公式(6.21),则

$$P_n(t)=-\left(\frac{\mu E_n}{\hbar}\right)\mu\frac{(\bar{\omega}-\omega_n)+\mathrm{i}\gamma_\perp}{(\bar{\omega}-\omega_n)^2+\gamma_\perp^2}\frac{1}{N_\mu}\int_0^L\frac{|U_n(x)|^2D_0}{1+R(x)/R_s}\mathrm{d}x \tag{6.31}$$

(6.31)式与哈肯理论结果(5.118)式相似. 在平均场近似下(见下节),则拉姆与哈肯的极化强度公式相同.

6.3 单模激光器

把极化强度的公式代入场方程,可讨论单模激光器的阈值、光强和频率特性等.

6.3.1 线性近似

当激光器在阈值附近工作时,光强很弱,

$$R/R_s \ll 1 \tag{6.32}$$

这时,极化强度的公式(6.31)变为

$$P_n(t) \approx -\left(\frac{\mu}{\hbar}\right)\mu \bar{D} E_n(t) \frac{(\bar{\omega}-\omega_n)+\mathrm{i}\gamma_\perp}{(\bar{\omega}-\omega_n)^2+\gamma_\perp^2} \tag{6.33}$$

$$\begin{aligned}\bar{D} &= \frac{1}{N_n}\int_0^L |U_n(x)|^2 D(x,t)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{N_n}\int_0^L \frac{1}{2} D(x,t)\mathrm{d}x - \frac{1}{N_n}\int_0^L \frac{1}{2} D(x,t)\cos(2k_n x)\mathrm{d}x \\ &\approx \frac{1}{L}\int_0^L D(x,t)\,\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{6.34}$$

其中将$\sin^2 k_n x$展开,并且在(6.34)式的第二项中,考虑到反转粒子数密度的烧孔效应很小,$D(x,t)$在一个波长内的变化可忽略. 因此$D(x,t)$随x的变化比$\cos(2k_n x)$随x的变化小,故把$D(x,t)$提到积分号之外. 再考虑到$k_n = n\pi/L$,第二项积分为零. 实际上这是平均场近似. 若$f(x)$和$g(x)$随x的变化慢,则对x平均时,

$$\overline{f(x)g(x)} \equiv \frac{1}{L}\int_0^L f(x)g(x)\mathrm{d}x \approx \overline{f(x)}\ \overline{g(x)} \tag{6.35}$$

在(6.34)式即相当于

$$\begin{aligned}\bar{D} &= \overline{|U_n(x)|^2 D(x,t)} \approx \overline{|U_n(x)|^2}\ \overline{D(x,t)} \\ &= \frac{1}{N_n}\int_0^L |U_n(x)|^2 \mathrm{d}x \frac{1}{N_n}\int_0^L D(x,t)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{L}\int_0^L D(x,t)\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{6.36}$$

其中用到了$N_n = \sqrt{L/2}$,$\overline{\sin^2 kx} = 1/2$.

将极化强度的线性近似公式(6.33)代入场方程,

$$\dot{E}_n = -\frac{1}{2}\frac{\omega_n}{Q_n}E_n + \frac{1}{2}\frac{\omega_n}{\varepsilon_0}\left(\frac{\mu^2 E_n}{\hbar}\right)\bar{D}\ \frac{\gamma_\perp}{(\bar{\omega}-\omega_n)^2+\gamma_\perp^2} \tag{6.37}$$

在阈值条件：$\dot{E}_n=0$，$\bar{D}=\bar{D}_t$，由上式

$$\bar{D}_t=\frac{1}{Q_n}\left(\frac{\varepsilon_0\hbar}{\mu^2}\right)\frac{1}{\gamma_\perp}[(\omega-\omega_n)^2+\gamma_\perp^2] \tag{6.38}$$

共振时，$\bar{\omega}=\omega_n$，阈值变为

$$\bar{D}'_t=\frac{1}{Q_n}\frac{\varepsilon_0\hbar}{\mu^2}\gamma_\perp \tag{6.39}$$

考虑到 $A_s=\frac{1}{t_s}=\bar{\omega}^3\mu^2/(\pi c^3\varepsilon_0\hbar)$，$Q_n=\omega_nL/[c(1-R)]$，$\gamma_\perp=\pi\Delta\nu$，代入上式，

$$\bar{D}'_t=\frac{4\pi^2\nu^2\Delta\nu t_s}{c^2}\left(\frac{1-R}{L}\right) \tag{6.40}$$

将 $P_n(t)$公式(6.33)代入频率公式(6.9)，则

$$\omega_n=\Omega_n+\frac{1}{2}\frac{\omega_n}{\varepsilon_0}\left(\frac{\mu^2}{\hbar}\right)\bar{D}\,\frac{(\bar{\omega}-\omega_n)}{(\bar{\omega}-\omega_n)^2+\gamma_\perp^2} \tag{6.41}$$

在接近阈值时，$\bar{D}\approx\bar{D}_t$，再利用(6.38)式，则

$$\begin{aligned}\omega_n&=\Omega_n+\frac{1}{2}\frac{\omega_n}{Q_n\gamma_\perp}(\bar{\omega}-\omega_n)\\&=\Omega_n+S(\bar{\omega}-\omega_n)\end{aligned} \tag{6.42}$$

$$S\equiv\frac{1}{2}\frac{\omega_n}{Q_n\gamma_\perp} \tag{6.43}$$

再考虑到 $\gamma_\perp=\frac{1}{2}\Delta\omega$，$\omega_n/Q_n=\Delta\omega_n$，则

$$S=\Delta\omega_n/\Delta\omega \tag{6.44}$$

即 S 是第 n 个模的线宽与原子线宽之比.

$$\omega_n=\frac{\Omega_n+S\bar{\omega}}{1+S} \tag{6.45}$$

此式表明第 n 个模的激光频率 ω_n 不等于 Ω_n 和 $\bar{\omega}$，而是 Ω_n 和 $\bar{\omega}$ 的按权重的平均，权重分别是 1 和 S. 当 $\bar{\omega}>\Omega_n$ 时，$\omega_n>\Omega_n$；当 $\bar{\omega}<\Omega_n$ 时，则 $\omega_n<\Omega_n$，即激光频率 ω_n 是被动腔频率 Ω_n 向原子中心频率牵引. 这种现象称为频率牵引效应，见图 6.2.



图 6.2 频率牵引示意图

6.3.2 三阶极化理论

利用展开式

$$(1+R/R_s)^{-1}\approx 1-R/R_s \tag{6.46}$$

则由(6.31)可得到三阶极化强度公式(相当于把 $P_n(t)$ 展开到 E_n^3). 注意，这时求(6.31)式的积分，用到

$$|U_n|^4=\frac{1}{4}(1-\cos 2k_nx)^2=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2k_nx+\frac{1}{8}\cos 4k_nx \tag{6.47}$$

在平均场近似下，$D(x,t)$ 随 x 的变化比 $\cos 2k_nx$ 和 $\cos 4k_nx$ 的变化慢，与(6.36)式相似，可得到

$$\begin{aligned}P_n(t)&=P_n^{(1)}(t)+P_n^{(3)}(t)\\&=-\left(\frac{\mu E_n}{\hbar}\right)\mu\bar{D}\,\frac{(\bar{\omega}-\omega_n)+\mathrm{i}\gamma_\perp}{(\bar{\omega}-\omega_n)^2+\gamma_\perp^2}\left[1-\frac{3}{2}\frac{\gamma_{ab}\gamma_\perp I_n}{(\bar{\omega}-\omega_n)^2+\gamma_\perp^2}\right]\end{aligned} \tag{6.48}$$

其中量纲为 1 的光强是

$$I_n\equiv\frac{1}{2}\left(\frac{\mu E_n}{\hbar}\right)^2\frac{1}{\gamma_a\gamma_b} \tag{6.49}$$

将三阶极化强度(6.48)式代入场方程，则

$$\dot{E}_n=E_n(\alpha_n-\beta_nI_n) \tag{6.50}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\alpha_n&=F_1\mathscr{L}(\bar{\omega}-\omega_n)-\frac{1}{2}\omega_n/Q_n\\\beta_n&=F_3\mathscr{L}^2(\bar{\omega}-\omega_n)\end{aligned}\right\} \tag{6.51}$$

$$\left.\begin{aligned}F_1&=\frac{1}{2}\frac{\omega_n}{\varepsilon_0}\frac{\mu^2}{\hbar\gamma_\perp}\bar{D}\\F_3&=\left(\frac{3}{2}\frac{\gamma_{ab}}{\gamma_\perp}\right)F_1\\\mathscr{L}(\bar{\omega}-\omega_n)&\equiv\frac{\gamma_\perp^2}{(\bar{\omega}-\omega_n)^2+\gamma_\perp^2}\end{aligned}\right\} \tag{6.52}$$

与哈肯理论相似，令 $\dot{E}_n=0$，则得到定态光强

$$I_n=\alpha_n/\beta_n=\frac{\mathscr{L}(\bar{\omega}-\omega_n)-(\bar{D}_t/\bar{D})}{\frac{3}{2}(\gamma_{ab}/\gamma_\perp)\mathscr{L}^2(\bar{\omega}-\omega_n)} \tag{6.53}$$

与哈肯的结果一样. 分母中常数因子的区别，是由于对反转粒子数求平均的步骤的微小区别. 图 6.3 表示激光光强与 $(D_t/\bar{D})$ 和 $(\bar{\omega}-\omega_n)=\Delta\Omega$ 的关系. 显然，腔模与原

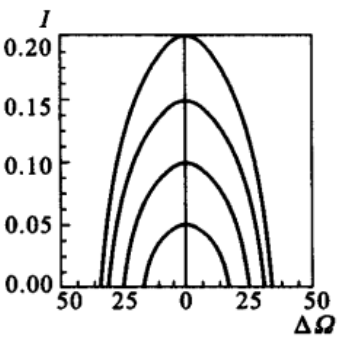


图 6.3 均匀加宽的激光器的光强与频率的关系

子共振时($\bar{\omega}=\omega_n$)激光最强.

共振时的定态光强为 I'_n

$$I'_n=\frac{2\gamma_\perp}{3\gamma_{ab}}(\overline{D}-\overline{D}_t)/\overline{D} \tag{6.54}$$

考虑到在阈值附近时(6.54)的分母中 $\overline{D}\approx D_t$

$$I'_n\approx\frac{2\gamma_\perp}{3\gamma_{ab}}\left(\frac{\overline{D}}{D_t}-1\right) \tag{6.55}$$

这是在激光原理中熟知的.

将极化强度 $P_n(t)$的公式(6.48)代入频率公式(6.5),则得到

$$\omega_n=\Omega_n+\sigma_n-\rho_n I_n \tag{6.56}$$

$$\sigma_n\equiv F_1\mathscr{L}(\bar{\omega}-\omega_n)(\bar{\omega}-\omega_n)/\gamma_\perp \tag{6.57}$$

$$\rho_n\equiv F_3\mathscr{L}^2(\bar{\omega}-\omega_n)(\bar{\omega}-\omega_n)/\gamma_\perp \tag{6.58}$$

其中 σ_n 代表频率牵引,$(-\rho_n I_n)$代表频率推移. 或者把 σ_n,ρ_n 代回(6.56)式,

$$\begin{aligned}\omega_n=\Omega_n-\bar{\omega}\left\{\frac{1}{\gamma_\perp}F_1\mathscr{L}(\bar{\omega}-\omega_n)-\frac{1}{\gamma_\perp}F_3\mathscr{L}^2(\bar{\omega}-\omega_n)I_n\right\}-\\ \omega_n\left\{\frac{1}{\gamma_\perp}F_1\mathscr{L}(\bar{\omega}-\omega_n)-\frac{1}{\gamma_\perp}F_3\mathscr{L}^2(\bar{\omega}-\omega_n)I_n\right\}\end{aligned} \tag{6.59}$$

令

$$S'=\frac{1}{\gamma_\perp}[F_1\mathscr{L}(\bar{\omega}-\omega_n)-F_3\mathscr{L}^2(\bar{\omega}-\omega_n)I_n] \tag{6.60}$$

则(6.59)式变为

$$\omega_n=\frac{\Omega_n+S'\bar{\omega}}{1+S'} \tag{6.61}$$

由于在定态时

$$\alpha_n=\beta_n I_n \tag{6.62}$$

利用(6.62),(6.52)式,则

$$S'=\omega_n/(2\gamma_\perp Q_n)=S \tag{6.63}$$

与(6.43)式一样. 即(6.61)式与(6.45)式一样. 回顾在第5章中,哈肯理论只给出(6.45)式,而未计算 σ_n 和 ρ_n,但与拉姆理论的频率公式相同.

由以上介绍可知,对于均匀加宽的单模激光器:

(1) 反转程度越高,激光输出越强.

(2) 共振时($\bar{\omega}=\omega_n$)激光强度最强.

(3) 光场公式 $\dot{E}_n=E_n(\alpha_n-\beta_n I_n)$反映了线性增益($\alpha_n E_n$)和饱和效应($-\beta_n E_n I_n$).

(4) 存在频率牵引与频率推移效应. 一般说激光频率 ω_n 不同于腔模

或原子频率. 只有 $\bar{\omega}=\Omega_n$ 时，才有 $\omega_n=\bar{\omega}=\Omega_n$.

(5) 拉姆与哈肯的半经典理论是等价的.

6.4 多模激光器

本节先计算多模情况的宏观极化强度，然后给出多模的光场方程和频率方程.

多模光场与二能级原子作用时，光场、极化强度和相互作用哈密顿量分别是

$$\left.\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\sum_n E_n \exp\left[-\mathrm{i}(\omega_n t+\phi_n)\right]U_n(z)+\text{c. c.} \\ P &= \frac{1}{2}\sum_n P_n \exp\left[-\mathrm{i}(\omega_n t+\phi_n)\right]U_n(z)+\text{c. c.} \\ &= N'\mu(\rho_{ab}+\rho_{ba}) \\ V_{ab} &= -\frac{1}{2}\sum_n \mu E_n \exp\left[-\mathrm{i}(\omega_n t+\phi_n)\right]U_n(z) \end{aligned}\right\} \tag{6.64}$$

由 $\dot{\rho}_{ab}$ 方程得到

$$\rho_{ab}=-\mathrm{i}\hbar^{-1}\int_{-\infty}^{t}\exp\left[-(\mathrm{i}\bar{\omega}+\gamma_\perp)(t-t')\right]\times V_{ab}(t')(\rho_{aa}-\rho_{bb})\,\mathrm{d}t' \tag{6.65}$$

将(6.64)式中的 V_{ab} 代入上式，则有

$$\rho_{ab}=-\frac{1}{2}\mathrm{i}\hbar^{-1}\sum_n \mu E_n \exp\left[-\mathrm{i}(\omega_n t+\phi_n)\right]U_n(z)\times\frac{\rho_{aa}-\rho_{bb}}{\mathrm{i}(\bar{\omega}-\omega_n)+\gamma_\perp} \tag{6.66}$$

将(6.66)式代入 $\dot{\rho}_{aa}$，$\dot{\rho}_{bb}$ 的方程(6.16)，(6.17)式，则

$$\left.\begin{aligned} \dot{\rho}_{aa} &= \lambda_a-\gamma_a\rho_{aa}-R(\rho_{aa}-\rho_{bb}) \\ \dot{\rho}_{bb} &= \lambda_b-\gamma_b\rho_{bb}+R(\rho_{aa}-\rho_{bb}) \end{aligned}\right\} \tag{6.67}$$

其中 R 是多模光场引起的受激跃迁速率，M 个模的总的受激跃迁速率为

$$R=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{M}\left(\frac{\mu E_m}{\hbar}\right)^2|U_m|^2\gamma_\perp^{-1}\mathscr{L}^{-1}(\bar{\omega}-\omega_n) \tag{6.68}$$

即 M 个不同频率的光场都引起受激辐射，从而都使 ρ_{aa} 减少，使 ρ_{bb} 增加.

在定态条件，$\dot{\rho}_{aa}=\dot{\rho}_{bb}=0$，由(6.67)式有

$$\rho_{aa}-\rho_{bb}=\frac{d(z)}{1+R/R_s} \tag{6.69}$$

将(6.69)式代入(6.66)式，则

$$\rho_{ab}=-\frac{1}{2}\mathrm{i}\frac{\mu}{\hbar}\sum_n E_n\exp\left[-\mathrm{i}(\omega_n t+\phi_n)\right]U_n(z)\frac{d(z)}{\mathrm{i}(\bar{\omega}-\omega_n)+\gamma_\perp}\times \frac{1}{1+R/R_s} \tag{6.70}$$

代入极化强度公式 $P=N'\mu(\rho_{ab}+\rho_{ab}^*)$，则

$$P=-\frac{1}{2}\mathrm{i}\left(\frac{\mu^2}{\hbar}\right)N'\sum_n E_n\exp\left[-\mathrm{i}(\omega_n t+\phi_n)\right]U_n(z)\times \frac{1}{\mathrm{i}(\bar{\omega}-\omega_n)+\gamma_\perp}\frac{1}{1+\dfrac{R}{R_s}}+\text{c. c.}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_n P_n^{(+)}\exp\left[-\mathrm{i}(\omega_n t+\phi_n)\right]U_n(z)+\text{c. c.} \tag{6.71}$$

将上式两边乘 $U_n^*(z)$，从 0 到 L 积分，利用 $U_n(z)$ 的正交条件，则得到

$$P_n(t)=-\left(\frac{\mu E_n}{\hbar}\right)\mu\frac{(\bar{\omega}-\omega_n)+\mathrm{i}\gamma_\perp}{(\bar{\omega}-\omega_n)^2+\gamma_\perp^2}\frac{1}{N_n}\int_0^L D(z)|U_n(z)|^2\times \frac{1}{1+R/R_s}\mathrm{d}z \tag{6.72}$$

显然，此式与单模情况的公式(6.33)相似，只是(6.72)式中的 R 由多模的受激辐射速率(6.68)决定.

利用近似公式 $(1+R/R_s)^{-1}\approx 1-R/R_s$，则有

$$P_n(t)=-\left(\frac{\mu^2 E_n}{\hbar}\right)\frac{(\bar{\omega}-\omega_n)+\mathrm{i}\gamma_\perp}{(\bar{\omega}-\omega_n)^2+\gamma_\perp^2}\frac{1}{N_n}\int_0^L D(z)|U_n(z)|^2\times\left(1-\frac{R}{R_s}\right)\mathrm{d}z$$

$$=-\left(\frac{\mu^2 E_n}{\hbar}\right)\frac{(\bar{\omega}-\omega_n)+\mathrm{i}\gamma_\perp}{(\bar{\omega}-\omega_n)^2+\gamma_\perp^2}\times \left\{\frac{1}{N_n}\int_0^L D(z)\,|U_n(z)|^2\mathrm{d}z-\frac{1}{N_n R_s}\int_0^L D(z)\,|U_n(z)|^2\times \frac{1}{2}\sum_{m=1}^N\left(\frac{\mu E_n}{\hbar}\right)^2|U_m(z)|^2\frac{1}{\gamma_\perp}\mathscr{L}(\bar{\omega}-\omega_n)\mathrm{d}z\right\} \tag{6.73}$$

其中大括号内第一项即 $\overline{D}$，第二项可分为两部分：在求和号 $\sum_{m=1}^{M}(\cdots)$ 中，有 $m=n$ 的一项 R_n，而其余的 $m\neq n$，

$$P_n(t)=-\left(\frac{\mu^2 E_n}{\hbar}\right)\frac{(\bar{\omega}-\omega_n)+\mathrm{i}\gamma_\perp}{(\bar{\omega}-\omega_n)^2+\gamma_\perp^2}\times \left\{\overline{D}-\frac{1}{N_n}\int_0^L D(z)\frac{R_n}{R_s}|U_n(z)|^2\mathrm{d}z-\frac{1}{N_n R_s}\int_0^L D(z)\frac{1}{2}\sum_{m\neq n}^{M}\left(\frac{\mu E_m}{\hbar}\right)^2\times\right.$$

$$|U_m|^2|U_n|^2\frac{1}{\gamma_\perp}\mathscr{L}(\bar{\omega}-\omega_m)\Big\}\mathrm{d}z \tag{6.74}$$

$$R_n\equiv\frac{1}{2}\left(\frac{\mu E_n}{\hbar}\right)^2|U_n|^2\frac{1}{\gamma_\perp}\mathscr{L}(\bar{\omega}-\omega_m) \tag{6.75}$$

将(6.74)式与单模情况比较,(6.74)式中的第一、第二项就是单模情况的极化强度,这两项给出场方程中的 α_n,$\beta_n I_n$,而(6.74)式中第三项代表不同的模之间的耦合与相互影响.

将(6.74)式代入拉姆的场方程

$$\begin{aligned}\dot{E}_n&=\alpha_n E_n-\beta_n I_n E_n-\sum_{m\neq n}\theta_{nm}E_nE_m^2\\&\equiv\alpha_n E_n-\beta'_n E_n^3-\sum_{m\neq n}\theta_{nm}E_nE_m^2\end{aligned} \tag{6.76}$$

其中的 θ_{nm} 称为交叉饱和系数,它来自 $P_n(t)$ 的第三项. θ_{nm} 代表其他的模($m\neq n$)对第 n 个模产生的饱和效应.

另外,在(6.76)式中

$$\beta'_n=\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{\hbar^2\gamma_a\gamma_b}\beta_n \tag{6.77}$$

$$\begin{aligned}\theta_{nm}=&\frac{1}{4}\frac{\omega}{\epsilon_0}\frac{\mu^4}{\hbar^3\gamma_\perp^2 R_s}\mathscr{L}(\bar{\omega}-\omega_n)\mathscr{L}(\bar{\omega}-\omega_n)\times\\&\frac{1}{N_n}\int_0^L D(z)\,|U_m(z)|^2\,|U_n(z)|^2\mathrm{d}z\end{aligned} \tag{6.78}$$

其中

$$\begin{aligned}&\frac{1}{N_n}\int_0^L D(z)\,|U_m(z)|^2\,|U_n(z)|^2\mathrm{d}z\\=&\int_0^L D(z)\sin^2(k_m z)\sin(k_n z)\mathrm{d}z\\=&\frac{1}{4}\frac{1}{N_n}\int_0^L D(z)\{-\cos 2k_m z-\cos 2k_n z-\\&\frac{1}{2}\cos 2(k_m+k_n)z+\frac{1}{2}\cos 2(k_m-k_n)z\}\mathrm{d}z\\\approx&\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{L}\int_0^L D(z)\mathrm{d}z\right\}+\left\{\frac{1}{4L}\int_0^L D(z)\cos 2(k_m-k_n)z\,\mathrm{d}z\right\}\end{aligned} \tag{6.79}$$

令这两项分别为

$$\left.\begin{aligned}\bar{D}(z)&=\frac{1}{L}\int_0^L D(z)\mathrm{d}z\\D_{2(m-n)}&=\frac{1}{L}\int_0^L D(z)\cos 2(k_m-k_n)z\,\mathrm{d}z\end{aligned}\right\} \tag{6.80}$$

将(6.79),(6.80)式及 $R_s=(\gamma_a\gamma_b)/(2\gamma_{ab})$ 代入 θ_{nm},则

$$\theta_{nm}=\left(\frac{1}{2}\frac{\omega}{\varepsilon_0}\right)\left(\frac{\mu^4}{\hbar^3}\right)\frac{\gamma_{ab}}{\gamma_\perp^2\gamma_a\gamma_b}\mathcal{L}(\bar{\omega}-\omega_m)\mathcal{L}(\bar{\omega}-\omega_n)\times\frac{1}{2}\left[\bar{D}(z)+\frac{1}{2}D_{2(m-n)}\right] \tag{6.81}$$

将 m 和 n 交换则有 θ_{nm}

$$\theta_{mn}\approx\theta_{nm} \tag{6.82}$$

(6.81)式表明，两个模的频率越接近，则 $D_{2(m-n)}$ 就越大，θ_{nm} 越大，两个模之间的影响越大. 另外，与两个模(两个频率)对应的洛伦兹函数的重叠 $\mathcal{L}(\bar{\omega}-\omega_m)\mathcal{L}(\bar{\omega}-\omega_n)$ 越大，θ_{nm} 也越大，模之间的影响越大. 反之，模之间的互相影响则较小.

同理可得到多模振荡的激光器的频率方程

$$\omega_n+\dot{\phi}=\Omega_n+\sigma_n-\rho_n I_n-\sum_{m\neq n}^{M}\tau_{nm}E_m^2 \tag{6.83}$$

$$\tau_{nm}=\left(\frac{\bar{\omega}-\omega_n}{\gamma_\perp}\right)\theta_{nm} \tag{6.84}$$

其中 σ_n 和 ρ_n 与单模公式一样，而 τ_{nm} 代表其他模($m\neq n$)对第 n 个模产生的频率推移系数.

6.5 双模激光器

对于两个模振荡的激光器，第一个模的光场振幅是 E_1，θ_{nm} 中 $n=1$，$m\neq n$，只有 $m=2$.

$$\dot{E}_1=E_1(\alpha_1-\beta'_1E_1^2-\theta_{12}E_2^2) \tag{6.85}$$

$$\dot{E}_2=E_2(\alpha_2-\beta'_2E_2^2-\theta_{21}E_1^2) \tag{6.86}$$

频率方程为

$$\omega_1+\dot{\phi}_1=\Omega_1+\sigma_1-\rho_1I_1-\tau_{12}E_2^2 \tag{6.87}$$

$$\omega_2+\dot{\phi}_2=\Omega_2+\sigma_2-\rho_2I_2-\tau_{21}E_1^2 \tag{6.88}$$

下边分析两个模之间的竞争和稳定性. 为了简单，令 $\theta=\theta_{12}\approx\theta_{21}$，场方程变为

$$\dot{E}_1=\alpha_1E_1-\beta'_1E_1^3-\theta E_1E_2^2 \tag{6.89}$$

$$\dot{E}_2=\alpha_2E_2-\beta'_2E_2^3-\theta E_2E_1^2 \tag{6.90}$$

令

$$x=E_1^2,\quad y=E_2^2 \tag{6.91}$$

$$\frac{1}{2}\dot{x}=(\alpha_1-\beta'_1x-\theta y)x \tag{6.92}$$

$$\frac{1}{2}\dot{y}=(\alpha_2-\beta'_2y-\theta x)y \tag{6.93}$$

定态条件是 $\dot{x}=\dot{y}=0$，即

$$(\alpha_1-\beta'_1 x-\theta y)x=0 \tag{6.94}$$

$$(\alpha_2-\beta'_2 y-\theta x)y=0 \tag{6.95}$$

因为只有 $x\geqslant 0$ 和 $y\geqslant 0$ 才有意义，所以(6.94)和(6.95)式只有四种情况：

(1) $y=0, x=\alpha_1/\beta'_1$(只有第 1 模振荡).

(2) $x=0, y=\alpha_2/\beta'_2$(只有第 2 模振荡).

(3) $x=0, y=0$ (两个模都不振荡).

(4) $x\neq 0, y\neq 0$ (两个模都振荡).

对于 $x\neq 0, y\neq 0$ 的情况，x 和 y 的值由直线 L_1 和 L_2 在第一象限的交点决定，这里两条直线的方程为

$$\alpha_1-\beta'_1 x-\theta y=0, \quad (\text{直线 } L_1) \tag{6.96}$$

$$\alpha_2-\beta'_2 y-\theta x=0, \quad (\text{直线 } L_2) \tag{6.97}$$

下面用位相图来讨论解的稳定性. 以 x—y 平面内第一象限的一点 $x(t), y(t)$ 代表在 t 时刻的激光工作状态. 该点的轨迹即代表状态的演化. 当 $t\to\infty$ 时，若 (x, y) 趋向一个固定点，则这个点就是由定态方程得到的解.

对于 $\dot{x}\neq 0, \dot{y}\neq 0$ 的情况，初始态为 (x_0, y_0)，(x, y) 从 (x_0, y_0) 开始演化. 考虑状态 $(\bar{x}, \bar{y})$，若与 $(\bar{x}, \bar{y})$ 邻近的所有的曲线都趋向于 $(\bar{x}, \bar{y})$，则该解 $(\bar{x}, \bar{y})$ 是稳定的. 反之，如果与 $(\bar{x}, \bar{y})$ 邻近的曲线都散开，则解 $(\bar{x}, \bar{y})$ 是不稳定的.

由(6.92)和(6.93)式可知，$y(x)$ 曲线斜率为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{y}{x}\frac{(\alpha_2-\theta x-\beta'_2 y)}{(\alpha_1-\theta y-\beta'_1 x)} \tag{6.98}$$

由于在 L_1 直线上 $(\alpha_1-\beta'_1 x-\theta y)=0$，所以 $y(x)$ 与 L_1 相交时的斜率为无穷大. 同理，$y(x)$ 与 L_2 相交时的斜率为零.

(1) 若第 1 个模比第 2 个模的增益高，但 L_1 和 L_2 在第 Ⅰ 象限没有交点，例如 $\alpha_1=1, \alpha_2=0.4, \beta_1=\beta_2=2, \theta=1$，见图 6.4. 解 $y=0, x\neq 0$ 是稳定的.

(2) 弱耦合，$\theta^2<\beta_1\beta_2$. 如图 6.5 所示，$\theta^2<\beta_1\beta_2$，这时两个模之间的耦合很弱. 这时，解 $x\neq 0, y\neq 0$ 是稳定的，两个模都振荡，且与两个模的初始条件无关.

(3) 强耦合，$\theta^2>\beta_1\beta_2$，这时，有两个解都是稳定的，从图 6.6 中可以看出 $x\neq 0, y\neq 0$ 的解不稳定，而 $x=0, y\neq 0$ 或 $x\neq 0, y=0$ 是稳定的. 但究竟哪个模振荡取决于初始条件. 在这个例子中，以 $y=x$ 的直线为界，

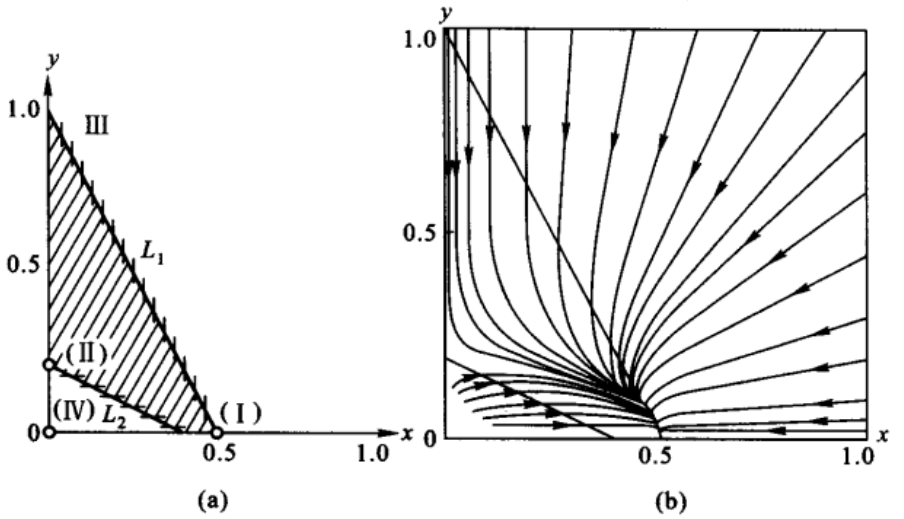


图 6.4 双模竞争($\alpha_1=1,\alpha_2=0.4,\beta_1=\beta_2=2,\theta=1$)

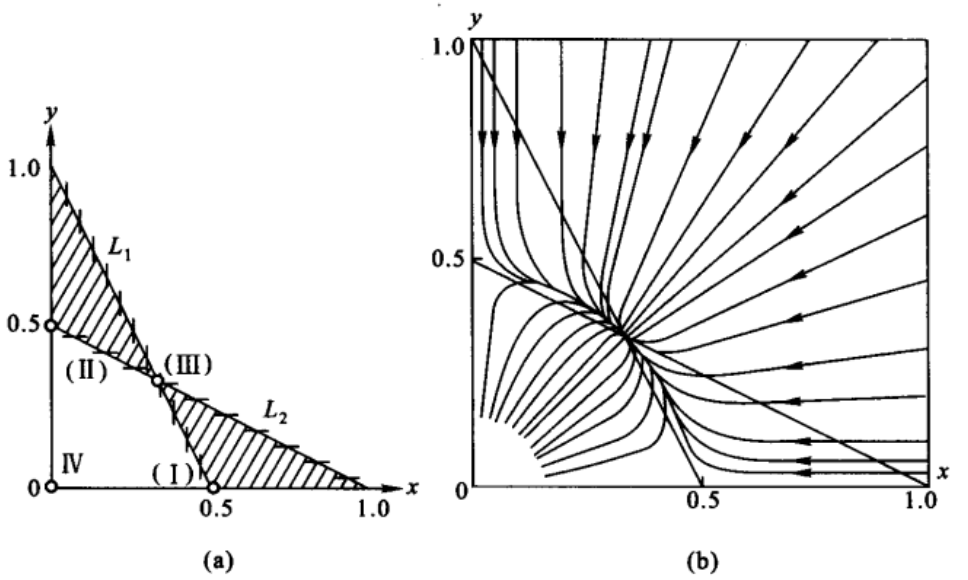


图 6.5 两个模都在阈值之上,且二者耦合较弱($\alpha_1=\alpha_2=1,\beta_1=\beta_2=2,\theta=1$)

初始条件在下方,只有第 1 个模振荡,由于强耦合,抑制了第 2 个模,反之,只有第 2 个模振荡.

多模激光的竞争很像“物竞天择”、“优胜劣汰”、“自然淘汰”的达尔文原理,而选模技术正像人工选择.

两个模的竞争很像一个花盆栽两棵花:(1)若两棵花的消耗一样,但对养料的吸收(增益)不同,只能有一棵花生长、成活.(2)若两棵花的消耗、吸收能力一样,而且竞争较弱(例如花盆、间距大),两棵花都能正常生长.(3)若两棵花竞争很强(例如花盆小、间距小),同时若二者消耗、吸收

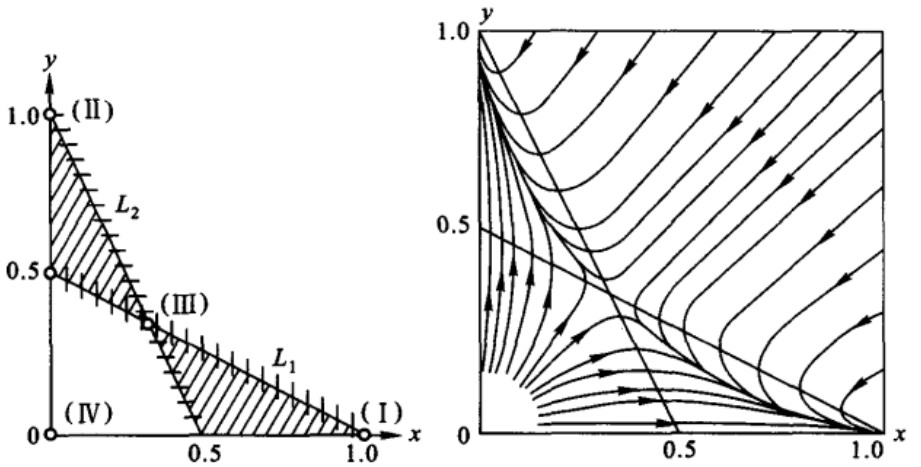


图 6.6 两个模的强耦合($\alpha_1=\alpha_2=1,\beta_1=\beta_2=1,\theta=2$)

都一样,则只有起初较壮的一棵能正常生长.

习题与思考

(1) 试推导自洽方程

$$\dot{E}_n+\frac{1}{2}\frac{\omega}{Q_n}E_n=-\frac{1}{2}\frac{\omega}{\varepsilon_0}\mathrm{Im}\ (P_n)$$

$$\omega_n+\dot{\phi}_n=\Omega_n-\frac{1}{2}\frac{\omega}{\varepsilon_0}E_n^{-1}\mathrm{Re}\ (P_n)$$

并说明所作的每一步近似.将 E,P 分别写成

$$E(z,t)=\sum_n E_n(t)\cos\ (\omega_n t+\phi_n)U_n(z)$$

$$P(z,t)=\sum_n [C_n(t)\cos\ (\omega_n t+\phi_n)+S_n(t)\sin\ (\omega_n t+\phi_n)]U_n(z)$$

其中系数 C_n,S_n 与复数极化强度的关系:

$$P_n(t)=C_n(t)+\mathrm{i}S_n(t)$$

注意 $C_n=\mathrm{Re}\ (P_n)$与光场同位相,$S_n=\mathrm{Im}\ (P_n)$与光场的位相是正交的.

(2) 在 $P_n(t)=-\frac{\mu^2}{\hbar}E_n\frac{(\bar{\omega}-\omega_n)+\mathrm{i}\gamma_\perp}{(\bar{\omega}-\omega_n)^2+\gamma_\perp^2}\frac{1}{N_n}\int_0^L\frac{|U_n(x)|^2D(x)}{1+R(z)/R_s}\mathrm{d}x$ 式中,使用行波光场与二能级原子作用,计算 $P_n(t)$,即证明行波时

$$P_n(t)=-\mathrm{i}\frac{\mu^2\overline{D}}{\hbar\gamma_\perp}E_n\left(1-\mathrm{i}\frac{\bar{\omega}-\omega_n}{\gamma_\perp}\right)\frac{\gamma_\perp^2}{(\bar{\omega}-\omega_n)^2+\gamma_\perp^2(1+2I_n\gamma_{ab}/\gamma_\perp)}$$

参 考 文 献

[1] Lamb J W E. Theory of optical maser oscillators. In: Proceedings of the Interna-

tional School of Physics, Course XXXI, 78, sec. 3, 1964

[2] Lamb J W E. Theory of optical maser oscillators. In: Quantum optics and electronics. New York: Gordon and Breach, 1965. 331 - 381.

[3] Lax M. Statistical physics, phase transitions and superfluidity. New York: Brandeis University Summer Institute in Theoretical Physics. 1966.

第 7 章　气体激光器

气体原子运动的多普勒效应导致非均匀加宽，本章首先介绍非均匀加宽的特点和气体激光器的频率烧孔效应的机理，然后介绍气体激光器的半经典理论.

7.1　多普勒效应引起的非均匀加宽

本节简单介绍气体原子运动的多普勒效应引起的非均匀加宽的特点和增益饱和的一般特点.

7.1.1　高斯线型

设静止原子辐射的中心频率为 ν_0，原子沿 z 方向运动的速度分量为 v，则在运动原子的前方接收到的频率

$$\nu=\nu_0(1+v/c) \tag{7.1}$$

$$v=c(\nu-\nu_0)/\nu_0 \tag{7.2}$$

因此对不同速度的原子，探测器接收到的频率不同．通常气体原子按速度的分布服从麦克斯韦分布律，

$$W(v)=N\sqrt{\frac{M}{2\pi k_B T}}\exp\left[-\frac{Mv^2}{2k_B T}\right]=\exp\left[\frac{-Mc^2(\nu-\nu_0)^2}{2k_B T\nu_0^2}\right] \tag{7.3}$$

k_B 是玻耳兹曼常量. 光强正比于发光原子数

$$I=I_0\exp\left[\frac{-Mc^2(\nu-\nu_0)^2}{2k_B T\nu_0^2}\right] \tag{7.4}$$

由此可求出谱线的半极大点之间的总宽度.

$$\Delta\nu_D=2\nu_0\left(\frac{2k_B T\ln 2}{Mc^2}\right)^{1/2} \tag{7.5}$$

令 N'_0 是阿伏伽德罗常量，m 是原子的原子量(或分子的分子量)，

$$m=N'_0 M \tag{7.6}$$

代入 $\Delta\nu_D$，可得到

$$\Delta\nu_D=7.162\times10^{-7}\left(\frac{T}{m}\right)^{1/2}\nu_0 \tag{7.7}$$

将 $\Delta\nu_D$ 的公式(7.5)代入光强公式(7.4)，可知线型函数是高斯函数

$$g=C\exp\left[-\left(\frac{\nu-\nu_0}{\Delta\nu_D}\right)^2 4\ln 2\right] \tag{7.8}$$

考虑到 $\nu_0 \gg \Delta\nu_D$，并利用积分公式 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$，则可求出归一化常数 C. 这样线型函数为

$$g(\nu)=\frac{2\sqrt{\ln 2}}{\Delta\nu_D\sqrt{\pi}}\exp\left[-\left(\frac{\nu-\nu_0}{\Delta\nu_D}\right)^2 4\ln 2\right] \tag{7.9}$$

7.1.2 非均匀加宽介质增益饱和特点(行波)

由以上分析可知，对不同速度的原子，探测器接收到的频率不同. 反之，频率为 ν_s 的光与气体原子作用时，速度不同的原子“接收”到的光频率则不同. 这样，只有特定速度的一组原子才可能与该光束发生共振或近共振作用. 若气体原子处于吸收的状态(未形成反转)，则只有特定速度的原子才能吸收这种频率的光. 若气体原子处于粒子数反转的状态，只有特定速度的原子才能放大该频率的光(如图 7.1(a)).

在典型情况下，多普勒宽度 $\Delta\nu_D$ 远大于原子的自然线宽 $\Delta\nu_N$. 这样，频率为 ν_s 的光束与非均匀加宽的介质作用时，只消耗特定速度的激发态原子，对其他速度的原子几乎没有作用. 这样在增益饱和曲线上，只对特定频率发生增益饱和，即增益曲线凹陷，凹陷的宽度等于原子的自然线宽 $\Delta\nu_N$. 与此相反，频率为 ν_s 的光，会使均匀加宽的整个增益曲线“下降”(如图 7.1(b)).

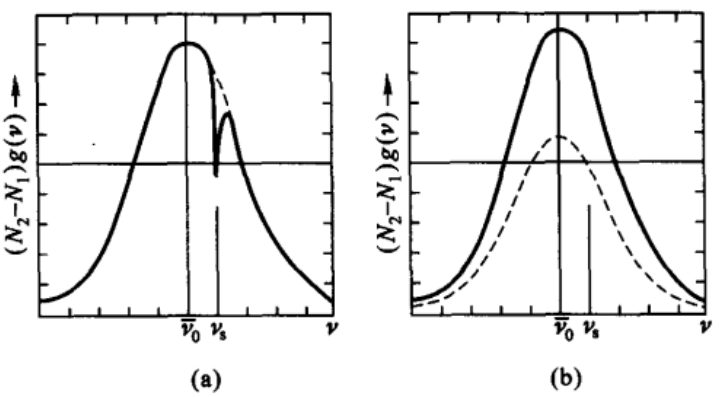


图 7.1 非均匀加宽介质增益饱和特点

$\tilde{\nu}_0$ 为原子中心频率；ν_s 为强场信号频率. ν 为检测信号频率

(a)非均匀加宽的增益饱和(行波) (b)均匀加宽的增益饱和

7.2 驻波产生的烧孔效应与拉姆凹陷

一般的气体激光器常采用驻波腔，光在腔内来回反射. 设单模激光频

率为 ω，原子沿腔的轴向的速度为 $\pm v$，这样向 $+z$ 方向传播的光与速度为 $+v$ 的原子发生共振作用的条件是

$$\omega(1-v/c)=\bar{\omega}_0 \tag{7.10}$$

这种作用使速度为 $(+v)$ 的激发态原子数减少，导致增益饱和. 而同样频率 (ω) 的光经过反射后向 $-z$ 方向传播时，它与速度为 $-v$ 的原子发生共振作用，使速度为 $-v$ 的激发态原子数减少，也导致增益饱和. 这样，单一频率的光在腔内来回反射时，使速度为 $\pm v$ 的激发态原子数减少，在 $N(v)-v$ 曲线上，有两个“下陷”，分别对应横坐标的 $\pm v$ 位置，如图 7.2(a)所示.

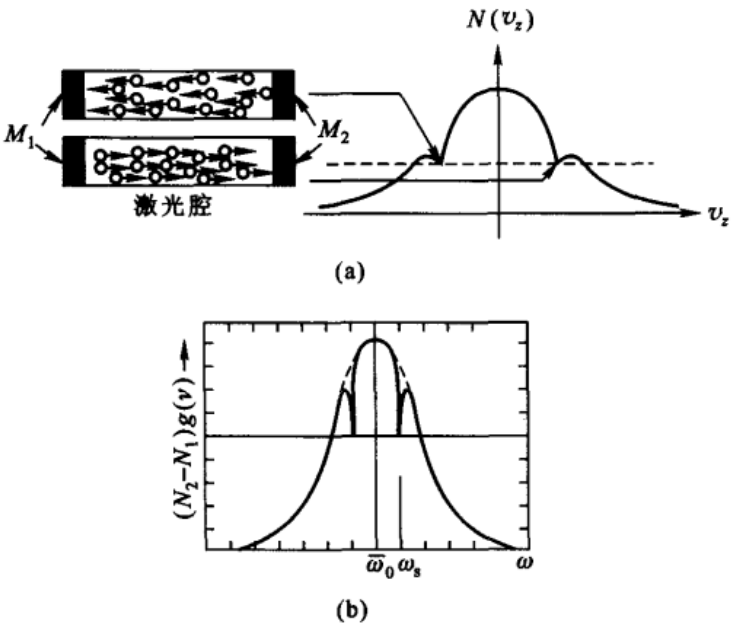


图 7.2 单一频率的驻波激光与速度为 $\pm v\neq 0$ 的原子的作用，对称地烧两个孔

这时，若用一个检测光——频率可调谐而沿腔的轴向 $+z$ 方向传播，测量非均匀加宽的介质对该检测光的增益. 速度为 $\pm v$ 的原子都可能与该检测光发生共振作用，条件是检测光的频率应调谐到 ω^+ 和 ω^-

$$\left.\begin{aligned}\omega^+(1-v/c)&=\bar{\omega}_0\\ \omega^-(1+v/c)&=\bar{\omega}_0\end{aligned}\right\} \tag{7.11}$$

因此，在用检测光测量到的增益曲线上，在两个频率 $\omega^{\pm}$ 上发生饱和，见图 7.2(b). 这种现象称为增益曲线上的“频率烧孔”现象. 一般“烧”两个孔. 由于 $|v|\ll c$，由(7.11)式得

$$\left.\begin{aligned}\omega^+&\approx\bar{\omega}_0+\bar{\omega}_0 v/c\\ \omega^-&\approx\bar{\omega}_0-\omega_0 v/c\end{aligned}\right\} \tag{7.12}$$

所以这两个孔是对称地分布在增益曲线上.

显然,对于速度为零的原子,$v=0$,两个孔重合,或者说只烧一个孔,如图 7.3 所示.

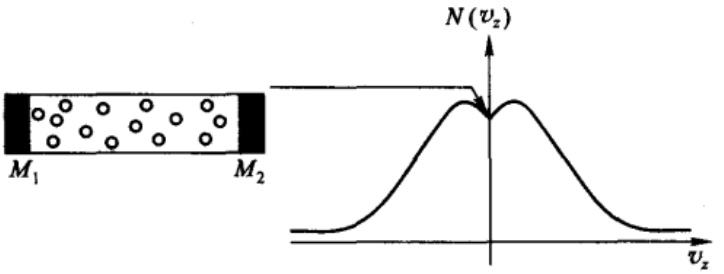


图 7.3 单频率驻波与 $v=0$ 的原子作用(烧一个孔)

前已指出,烧的孔的宽度等于原子的自然线宽 $\Delta\nu_N$,由于在定态工作时,激光增益等于损耗,所以烧的孔的底部应在增益曲线上 $G=\kappa$ 的位置(图 7.2(b)中的水平线).孔的面积越大,即消耗的激发态原子数越多,激光越强.因此,激光器的输出功率就越高.

在驻波腔的情况,由图 7.2 和图 7.3 可知,两个孔的面积之和大于一个孔的面积,因此烧一个孔的情况,产生的激光最弱.设想对驻波腔气体激光器的腔长进行精细的微调,便会使激光频率有微小的连续的变化.当激光的频率被调节到只与速度为零的原子发生共振作用时,这时(对应烧一个孔)对激光有贡献的激发态原子数恰恰最少(一个孔的面积小).因此,在激光输出的激光功率与频率的曲线上,这时必然对应激光功率的极小值.

反之,当激光的频率被调到不等于原子中心频率时($\omega\neq\bar{\omega}_0$)则可以与速度为 $\pm v$ 的激发态原子作用,即对应烧两个孔.而两个孔的面积大于一个孔的面积,所以在激光光强的 $I-\omega$ 曲线上,$\omega=\bar{\omega}_0$ 处对应光强或功率极小值.

驻波腔气体激光器的激光光强与频率的关系曲线上,在 $\omega=\bar{\omega}_0$ 处是极小点.这种效应称为拉姆凹陷.它由拉姆从理论上预言,而后得到实验证明,并在稳频等技术中有重要应用.图 7.4 是波长 $\lambda=1.15\ \mu m$ 的 He-Ne 激光器的拉姆凹陷的实验结果.纵坐标是激光功率,横坐标对应腔长的微调.

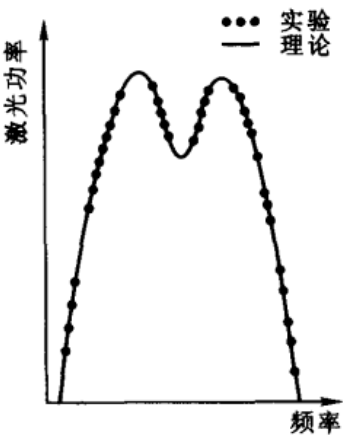


图 7.4 $\lambda=1.15\ \mu m$ 的 He-Ne 激光器的拉姆凹陷

读者可根据同样的机理说明气体吸收介质在驻波腔内的吸收曲线.这时,激光频率调谐到原子中心频率($\omega=\bar{\omega}_0$)时,吸收最

弱，即透射或输出光在 $\omega=\bar{\omega}_0$ 时有极大点，这就是反拉姆凹陷. 此外，不论是对气体增益介质或吸收介质，都可以分别或综合考虑多模（多频率）的情况. 也可以分析行波激光与气体的作用.

7.3 拉姆的气体激光半经典理论

拉姆的半经典的激光理论的最大的贡献是对气体激光器的深入研究. 本节结合气体激光器的物理图像，介绍一阶极化强度的理论.

7.3.1 气体激光介质的极化强度

对于驻波腔的气体激光器，光场是驻波形式的 $E(z,t)$. 由于原子的运动，使得有关物理量是 z,v,t 的函数，例如 $\rho_{ab}(z,v,t)$ 等. 考虑到这时

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}+v\frac{\partial}{\partial z} \tag{7.13}$$

光学布洛赫方程变为

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial}{\partial t}+v\frac{\partial}{\partial z}\right)\rho(z,v,t)\\
&=-(\mathrm{i}\omega+\gamma_\perp)\rho_{ab}+\frac{\mathrm{i}}{\hbar}V_{ab}(z,t)(\rho_{aa}-\rho_{bb})\\
&\left(\frac{\partial}{\partial t}+v\frac{\partial}{\partial z}\right)\rho_{aa}(z,v,t)\\
&=\lambda'_a-\gamma_a\rho_{aa}-\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}V_{ab}\rho_{ba}+\mathrm{c.c}\right\}\\
&\left(\frac{\partial}{\partial t}+v\frac{\partial}{\partial z}\right)\rho_{bb}(z,v,t)\\
&=\lambda'_b-\gamma_b\rho_{bb}+\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}V_{ab}\rho_{ba}+\mathrm{c.c}\right\}
\end{aligned}\right\} \tag{7.14}$$

由这几个方程可以计算气体介质的极化强度. 然而计算过程冗长而复杂，我们另辟蹊径.

我们的出发点是：

（1）把驻波看成两个行波，它们与速度为 v 的原子作用，相当于静止原子与频率为 $\omega^{\pm}$ 的两个行波作用

$$\omega_n^+=\omega_n+kv,\quad \omega^-=\omega_n-kv \tag{7.15}$$

（2）气体原子按速率的分布率为 $W(v)$.

（3）行波的 $|U_n(z)|=|\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}|=1$.

这样，只要在(6.31)式中取 $|U_n(z)|=1$，便得到一个行波激光引起的介质极化强度

$$P_n(t)=-\left(\frac{\mu^2 E}{\hbar}\right)\frac{D}{\mathrm{i}(\bar{\omega}-\omega_n)+\gamma_\perp}\frac{1}{1+R/R_s} \tag{7.16}$$

$$R=\frac{1}{2}\left(\frac{\mu E}{\hbar}\right)^2\frac{1}{\gamma_\perp}\mathscr{L}(\bar{\omega}-\omega_n)=\frac{1}{2}\left(\frac{\mu E}{\hbar}\right)^2\frac{\gamma_\perp}{(\bar{\omega}-\omega_n)^2+\gamma_\perp^2} \tag{7.17}$$

这是静止原子介质的极化强度. 推广到气体介质时，只需做如下的代换

$$\left.\begin{aligned}&\omega_n\to(\omega_n+kv)\\&\bar{D}\to\bar{D}W(v)\\&E\to-\frac{\mathrm{i}}{2}E\end{aligned}\right\} \tag{7.18}$$

其中 $E\sin kz=[E/(2\mathrm{i})](\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz})$，光场出现因子 1/2. 这样考虑到两个行波后则得到

$$R(v)=\frac{1}{8}\left(\frac{\mu E_n}{\hbar}\right)^2\frac{1}{\gamma_\perp}[\mathscr{L}(\bar{\omega}-\omega_n-kv)+\mathscr{L}(\bar{\omega}-\omega_n+kv)] \tag{7.19}$$

$$\rho_{aa}-\rho_{bb}=\frac{\bar{D}W(v)}{1+R(v)/R_s} \tag{7.20}$$

$$P_n(t)=-\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{\mu^2 E_n}{\hbar}\right)\bar{D}\int_{-\infty}^{\infty}W(v)\left[\frac{1}{\mathrm{i}(\bar{\omega}-\omega_n-kv)+\gamma_\perp}+\frac{1}{\mathrm{i}(\bar{\omega}-\omega_n+kv)+\gamma_\perp}\right]\frac{1}{1+R(v)/R_s}\mathrm{d}v \tag{7.21}$$

其中对速度 v 的积分是考虑到不同速度的原子的贡献.

7.3.2 一阶极化强度

令 $R=0$，则得到一阶极化强度. 利用公式

$$W(v)=\frac{1}{\sqrt{\pi}u}\exp[-(v/u)^2] \tag{7.22}$$

其中 u 是气体原子的最可几速度，

$$u=(2k_B T/M) \tag{7.23}$$

$$P_n^{(1)}(t)=-\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{\mu^2 E_n}{\hbar}\right)\bar{D}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}u}\mathrm{e}^{-(v/u)^2}\left[\frac{1}{\mathrm{i}(\bar{\omega}-\omega_n-kv)+\gamma_\perp}+\frac{1}{\mathrm{i}(\bar{\omega}-\omega_n+kv)+\gamma_\perp}\right]\mathrm{d}v \tag{7.24}$$

其中两项的积分相等，所以

$$P_n^{(1)}(t)=-\left(\frac{\mu E_n}{\hbar}\right)\frac{\bar{D}}{ku}\times\left\{\mathrm{i}\frac{k}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-(v/u)^2}\frac{1}{\mathrm{i}(\bar{\omega}-\omega_n+kv)+\gamma_\perp}\right\}\mathrm{d}v$$

$$=-\left(\frac{\mu^2 E_n}{\hbar}\right)\frac{D}{ku}Z[\mathrm{i}(\bar{\omega}-\omega_n)+\gamma_\perp] \tag{7.25}$$

其中 Z 称为等离子体色散函数，它定义为

$$Z(y)=\frac{\mathrm{i}k}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-(v/u)^2}\frac{1}{y+\mathrm{i}kv}\mathrm{d}v \tag{7.26}$$

很容易把 $Z(y)$ 变成另一种有用的形式. 注意到

$$\frac{1}{y+kv}=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-(y+\mathrm{i}kv)\tau}\mathrm{d}\tau \tag{7.27}$$

其中考虑到了 y 有衰减因子，$\mathrm{e}^{-y\tau}\Big|_{\tau\to\infty}=0$ 将(7.27)式代入(7.26)式，则

$$Z(y)=\frac{\mathrm{i}k}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-(v/u)^2}\mathrm{d}v\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-(y+\mathrm{i}kv)\tau}\mathrm{d}\tau \tag{7.28}$$

或者

$$\begin{aligned}Z(y)&=\frac{\mathrm{i}k}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-y\tau}\mathrm{d}\tau\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{4}k^2\tau^2u^2\right)}\mathrm{e}^{-\left(\frac{v}{u}+\frac{1}{2}\mathrm{i}k\tau u\right)^2}\mathrm{d}v\\&=\frac{\mathrm{i}k}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-y\tau}\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{4}k^2\tau^2u^2\right)}\mathrm{d}\tau\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\left(\frac{v}{u}+\frac{1}{2}\mathrm{i}k\tau u\right)^2}\mathrm{d}v\end{aligned} \tag{7.29}$$

其中最后一个积分是 $u\sqrt{\pi}$，所以

$$\begin{aligned}Z(y)&=\mathrm{i}ku\int_0^{\infty}\exp\left[-y\tau-\frac{1}{4}(ku)^2\tau^2\right]\mathrm{d}\tau\\&=\mathrm{i}ku\mathrm{e}^{y^2/(k^2u^2)}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\left[\frac{1}{2}ku\tau+y/(ku)\right]^2}\mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{7.30}$$

为了求出积分，令 $x=\frac{1}{2}ku+\frac{y}{ku}$，$\mathrm{d}\tau=\frac{2}{ku}\mathrm{d}x$，则有

$$\begin{aligned}Z(y)&=2\mathrm{i}\mathrm{e}^{y^2/(k^2u^2)}\int_{y/(ku)}^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\\&=2\mathrm{i}\mathrm{e}^{y^2/(k^2u^2)}\left\{\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x-\int_0^{y/(ku)}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right\}\end{aligned} \tag{7.31}$$

其中大括号内第一个积分为$\sqrt{\pi}/2$，再考虑气体激光器的典型情况 $\Delta\omega_D\gg\gamma_\perp$，即

$$\Delta\omega_D=(2\sqrt{\ln 2})(ku)\gg\gamma_\perp \tag{7.32}$$

$$\frac{y}{ku}=\frac{\mathrm{i}(\bar{\omega}-\omega_n)+\gamma_\perp}{ku}\approx\frac{\mathrm{i}(\bar{\omega}-\omega_n)}{ku} \tag{7.33}$$

再做代换

$$\mathrm{i}x\to x,\quad \xi=\frac{\bar{\omega}_n-\bar{\omega}}{ku} \tag{7.34}$$

将(7.33)和(7.34)式代入(7.31)式，则

$$Z(y)=\exp(-\xi^2)\left[\mathrm{i}\sqrt{\pi}-2\int_0^{\xi}\exp(x^2)\mathrm{d}x\right] \tag{7.35}$$

将枯燥的计算公式(7.35)代入(7.25)式,得到有趣的结果

$$P_n^{(1)}(t)=-\left(\frac{\mu^2 E_n}{\hbar}\right)\frac{\overline{D}}{ku}\exp[-(\bar{\omega}-\omega_n)^2/(ku)^2][\mathrm{i}\sqrt{\pi}-2\int_0^{\xi}\exp(x^2)\mathrm{d}x] \tag{7.36}$$

其实部代表色散,虚部影响激光增益.

7.3.3 单模气体激光器的阈值与频率

将极化强度 $P_n^{(1)}(t)$ 代入拉姆的场方程和频率方程,

$$\dot{E}_n=-\frac{1}{2}\frac{\omega}{Q_n}E_n-\frac{1}{2}\frac{\omega}{\varepsilon_0}\mathrm{Im}P_n^{(1)} \tag{7.37}$$

$$\omega_n+\dot{\phi}_n=\Omega_n-\frac{1}{2}\frac{\omega}{\varepsilon_0}\frac{1}{E_n}\mathrm{Re}P_n^{(1)} \tag{7.38}$$

由(7.37)式得到气体激光器的小信号净增益

$$\begin{aligned}\alpha_n&=\exp[-(\bar{\omega}-\omega_n)^2/(ku)^2]F_1-\kappa_n\\ F_1&=\frac{1}{2}\omega\sqrt{\pi}[\mu^2/(\varepsilon_0\hbar ku)]\overline{D}\end{aligned} \tag{7.39}$$

由 $\dot{E}_n=0$ 或 $\alpha_n=0$,得到阈值

$$D_c=\frac{\varepsilon_0}{Q_n\mu^2}\frac{ku\hbar}{\sqrt{\pi}\exp[-(\bar{\omega}-\omega_n)^2/(ku)^2]} \tag{7.40}$$

在共振条件,$\bar{\omega}-\omega_n=0$,并注意 $\Delta\omega_D=2\sqrt{\ln 2}(ku)$

$$D_c=\frac{\varepsilon_0}{Q_n}\frac{\hbar\Delta\omega_D}{2\sqrt{\ln 2}\sqrt{\pi}\mu^2} \tag{7.41}$$

请注意,运动原子的激光器阈值与静止原子的激光器阈值之比值与 $\frac{\Delta\omega_D}{\Delta\omega_N}$ 成比例.这是因为在整个非均匀加宽的线型的频率范围内,只有大约 $\frac{\Delta\omega_N}{\Delta\omega_D}$ 的原子参加激光作用.

由(7.38)式容易得到

$$\omega_n+\dot{\phi}=\Omega_n+\sigma_n \tag{7.42}$$

其中 σ_n 即线性的频率牵引系数,

$$\sigma_n=-2\exp(-\xi^2)\int_0^{\xi}\exp(x^2)F_1\mathrm{d}x \tag{7.43}$$

其中 ξ 和 F_1 见式(7.34)和(7.39).显然,共振时 $\bar{\omega}=\omega_n$,$\xi=0$,$\sigma_n=0$.

还可证明，在相反的极限条件 $\gamma_\perp \gg ku$，则由(7.25)式得到均匀加宽的激光器结果. 这正是最可几速度 $u\approx 0$ 即静止原子的激光器特点.

7.4 气体激光器的三阶极化理论

三阶极化理论，是指极化强度展开到 E_n^3. 为此，在(7.21)式中取

$$[1+R(v)/R_s]^{-1}\approx 1-R(v)/R_s \tag{7.44}$$

经过计算，得到

$$P_n^{(3)}=\frac{1}{8}\left(\frac{\sqrt{\pi}\,\bar{D}\mu^4\gamma_{ab}}{\hbar^3 ku\gamma_\perp\gamma_a\gamma_b}\right)E_n^3\exp[-(\bar{\omega}-\omega_n)^2/(ku)^2]$$
$$\times\left\{\frac{\bar{\omega}-\omega_n}{\gamma_\perp}\mathscr{L}(\bar{\omega}-\omega_n)+\mathrm{i}[1+\mathscr{L}(\bar{\omega}-\omega_n)]\right\} \tag{7.45}$$

$$P_n=P_n^{(1)}+P_n^{(3)} \tag{7.46}$$

将(7.46)、(7.36)及(7.45)代入拉姆方程，有

$$\dot{E}_n=\alpha_n E_n-\beta_n I_n E_n \tag{7.47}$$

$$\omega_n+\dot{\phi}_n=\Omega_n+\sigma_n-\rho_n I_n \tag{7.48}$$

其中 α_n,σ_n 由 $P_n^{(1)}$ 决定，β_n,ρ_n 由 $P_n^{(3)}$ 决定，而

$$I_n=\frac{1}{2}(\mu E_n/\hbar)^2[1/(\gamma_a\gamma_b)] \tag{7.49}$$

α_n,σ_n 见(7.39)，(7.43)式，β_n,ρ_n 分别为

$$\left.\begin{aligned}\beta_n&=[1+\mathscr{L}(\bar{\omega}-\omega_n)]F_3\\ \rho_n&=[(\bar{\omega}-\omega_n)/\gamma_\perp]\mathscr{L}(\bar{\omega}-\omega_n)F_3\\ F_3&=\frac{1}{4}(\gamma_{ab}/\gamma_\perp)F_1\end{aligned}\right\} \tag{7.50}$$

F_1 见(7.39)式. 为了求定态光强，令 $\dot{E}_n=0$，得

$$I_n=\alpha_n/\beta_n=4\,\frac{1-\exp[(\bar{\omega}-\omega_n)^2/(ku)]}{(\gamma_{ab}/\gamma_\perp)[1+\mathscr{L}(\bar{\omega}-\omega_n)]}(D_c/\bar{D}) \tag{7.51}$$

由(7.51)式可知：(1)$D_c/\bar{D}$ 越大，激光光强越大. (2)$\bar{\omega}=\omega_n$ 时，$\mathscr{L}(\bar{\omega}-\omega_n)$ 极大，I_n 极小，这正是拉姆凹陷，见图 7.4. (3)由 $\left.\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}\omega_n^2}\right|_{\bar{\omega}-\omega}=0$，得到 $\bar{\omega}=\omega_n$ 处光强极小的条件，结果表明 $\bar{D}/D_c>[1+(\gamma_\perp/(ku)]$. 实验发现 $\bar{D}/D_c\approx 1.1$ 即观察到极小点.

最后讨论增益饱和公式. 当 $\gamma_\perp\ll(\bar{\omega}-\omega_n)\ll ku$ 时，小信号增益是 $G_0=F_1$，由(7.47)式

$$G=F_1-\beta_n I_n\approx F_1-F_3 I_n$$

$$=F_1\left(1-\frac{F_3}{F_1}I_n\right) \tag{7.52}$$

将(7.50)式中的 F_3/F_1 代入上式，则

$$G=G_0\left[1-\frac{1}{2}\frac{I_n}{I_s}\right]\approx G_0\frac{1}{\sqrt{1+\frac{I_n}{I_s}}} \tag{7.53}$$

其中 $I_s=(2\gamma_\perp)/\gamma_{ab}$ 这是激光原理中熟知的.

关于气体激光器的多模问题以及环形激光器、塞曼激光器等，可参考有关专著.

习题与思考

(1) 单模光场引起的非均匀介质的烧孔效应的原因是什么？孔的宽度、深度是多少？

(2) 多模驻波的频率烧孔有什么特点？

(3) 讨论驻波腔内既有增益介质又有吸收介质(非均匀加宽)时的频率烧孔.

(4) 为什么拉姆凹陷效应可用于稳频？

(5) 非均匀加宽介质的极化强度有何特点？

(6) 总结气体激光半经典理论的结果与意义.

参 考 文 献

[1] Bennet W R. Hole burning effects in a He-Ne optical maser. Phys. Rev. ,1926, 126:580 - 590.

[2] Allen L,Jones D G C. Principles of gas lasers. London:Butterworths,1967.

[3] Bennet W R. Brandeis University Summer Institute in Theoretical Physies. New York:Gordon and Breach,1971.

[4] Bloom A L. Gas Laser. New York:John Wiley & Sons,1986.

[5] Garrett C G B. Gas Lasers. New York:Mcgraw-Hill Book Co. ,1967.

第 8 章　瞬态相干作用

激光与物质的作用时间若短于物质的弛豫时间，它们的作用称为瞬态相干作用. 本章用麦克斯韦-布洛赫方程处理典型的瞬态相干作用，包括拉比振荡、光学章动和光子回声.

8.1　瞬态相干作用概念

在前面研究的光与物质的作用中，光泵过程通常是非相干光与物质的作用. 激光器的工作过程主要是相干光与物质的作用. 用激光进行的不少实验，也都属于相干光与物质的作用.

相干光与物质的作用可分为定态作用与瞬态相干作用.

在定态作用中，光场、介质极化强度和粒子数都不随时间变化（$\dot{E}=\dot{P}=\dot{D}=0$）. 或者，$E$，$P$ 和 D 随时间的变化远小于衰减过程（$\gamma_{\parallel}$ 和 $\gamma_{\perp}$）的影响，称为“准定态”作用. 它们的特点是激光与物质作用的时间远大于弛豫时间，即

$$\Delta t \gg T_1, T_2 \tag{8.1}$$

例如固体和液体中的弛豫时间 $T_1, T_2 \leqslant 10^{-9}\,\mathrm{s}$，所以只要作用时间远大于纳秒，就属于定态或准定态作用.

然而，低压气体的原子弛豫时间却可以相当长，不难使激光与物质作用时间小于弛豫时间. 特别是锁模激光器出现后，更可使激光与物质作用时间非常短. 若激光与物质的作用时间远小于弛豫时间，就称为瞬态相干作用（有时简称相干作用），其条件是

$$\Delta t \ll T_1, T_2 \tag{8.2}$$

众所周知，纵向弛豫时间 $T_1=1/\gamma_{\parallel}$ 表征粒子数的衰减，横向弛豫时间 $T_2=1/\gamma_{\parallel}$ 表征原子偶极矩或极化强度的衰减. 假定原子偶极矩同位相排列，则经过 T_2 的时间后位相变得混乱，故称 T_2 为“解相时间”（见 8.5 节）. 如果激光与物质作用时间 $\Delta t \ll T_1, T_2$，则激发态粒子数来不及衰减，原子偶极矩或介质极化强度也来不及衰减. 这意味着在相干作用过程中，偶极振荡或极化强度可看成“无限持续的正弦振荡”即理想的相干振荡.

脉宽 $\Delta t \ll T_1, T_2$ 的激光脉冲称为相干脉冲. 用相干脉冲对原子进行

激发称为相干激发.

这里特别注意 T_1 和 T_2 的定义和意义.

$$T_1=1/\gamma_{\parallel} \tag{8.3}$$

$$T_2=1/\gamma_{\perp} \tag{8.4}$$

$$T_2^{-1}=(1/T'_2)+(1/T^*) \tag{8.5}$$

其中 T'_2 是均匀加宽过程的横向弛豫时间,它直接影响原子偶极矩的衰减. T_2^* 是非均匀加宽的横向弛豫时间. T_2 是总的横向弛豫时间. 另外,激光与物质的作用时间 Δt 可以是超短脉冲激光的脉宽,也可以是连续激光与物质作用,但用特殊的技术使二者发生短时间的近共振作用(例如用脉冲电场在短时间内使原子能级移动).

瞬态相干作用的应用包括研究原子或分子的弛豫过程、激发态能量转移、新的相干辐射机理(超辐射)、用激光研究化学反应以及生物过程. 更重要的超快速光电子元件或技术也利用瞬态相干作用.

研究瞬态相干作用的理论工具仍是麦克斯韦-布洛赫方程,只是令布洛赫方程中 $\gamma_{\parallel}=\gamma_{\perp}=0$ 或 $T_1\to\infty$, $T_2\to\infty$. 一般说光场和极化强度都是时间和空间的函数,应该用麦克斯韦方程描述场随时间的变化以及传播效应(空间变化). 但是,如果与激光发生瞬态相干作用的物质是"薄样品",则可忽略光场随时间和空间的变化,即把光场看成常数. 这种近似称为"薄样品近似".

最后指出,在定态作用中,可以由 $\dot{P}=\dot{D}=0$ 求出极化强度 P 与光场的关系,而且在时刻 t 的极化强度 $P(t)$ 由该时刻的光场 $E(t)$ 决定. 反之亦然. 然而在瞬态相干作用中, $\dot{P}\neq 0$, $\dot{D}\neq 0$,不可能求出 P 与 E 的显函数关系,在 t 时刻的极化强度 $P(t)$ 不只取决于 t 时刻的光场,还与 t 时刻以前的光场有关,即有记忆效应. 在下面几节中将看到, $u(t)$, $v(t)$ 或 $P(t)$ 取决于从 $-\infty$ 到 t 时刻的光场的积分值 $\theta(t)$,

$$\theta(t)=\frac{\mu}{\hbar}\int_{-\infty}^{t}E(z,t')\,\mathrm{d}t' \tag{8.6}$$

而光场的慢振幅的 $E(z,t)$—t 曲线下的面积称为光脉冲的面积

$$A=\frac{\mu}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}E(z,t')\,\mathrm{d}t' \tag{8.7}$$

研究瞬态相干作用,往往就是求原子的电偶极矩和反转粒子数与 θ 的关系,即计算 $u(\theta)$, $v(\theta)$, $w(\theta)$.

8.2 瞬态相干作用的麦克斯韦-布洛赫方程

上节已指出,瞬态相干作用时 $\Delta t\ll T_1, T_2$,所以光学布洛赫方程中取

$\gamma_{\parallel}=\gamma_{\perp}=0$，$T_1\to\infty$，$T_2\to\infty$再考虑到极化强度 P 与 u 和 v 的关系

$$P(t)=N'\mu(u-\mathrm{i}v) \tag{8.8}$$

将有传播效应的麦克斯韦方程写成实部和虚部，注意 $E=E\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(t)}$，则得到常用的描述瞬态相干作用的麦克斯韦-布洛赫方程

$$\frac{\partial E}{\partial z}+\frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t}=\frac{c\mu_0\omega}{2}(N'\mu v) \tag{8.9}$$

$$E\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}+\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)=-\frac{c\mu_0\omega}{2}(N'\mu u) \tag{8.10}$$

$$\dot{u}=-(\bar{\omega}-\omega)v-u/T_2 \tag{8.11}$$

$$\dot{v}=(\bar{\omega}-\omega)u+\frac{\mu E}{\hbar}w-v/T_2 \tag{8.12}$$

$$\dot{w}=-\frac{\mu E}{\hbar}v-(w-w_0)/T_1 \tag{8.13}$$

光学布洛赫方程(8.11)～(8.13)的几何图像见图 3.3.

8.3 拉比振荡

本节介绍拉比振荡理论与实验.

8.3.1 拉比振荡的解

假定矩形光脉冲的光场为 E_0，脉宽为 δt，则

$$\theta(t)=\frac{\mu E_0}{\hbar}t,\quad 0<t\leqslant\delta t \tag{8.14}$$

$$A=\frac{\mu E_0}{\hbar}\delta t \tag{8.15}$$

在薄样品近似下，略去光场传播效应. 利用光学布洛赫方程(8.11)～(8.13)，令 $E=E_0$，则

$$\dot{u}+(\bar{\omega}-\omega)v=0 \tag{8.16}$$

$$v-(\bar{\omega}-\omega)u-\frac{\mu E_0}{\hbar}w=0 \tag{8.17}$$

$$\dot{w}+\frac{\mu E_0}{\hbar}v=0 \tag{8.18}$$

对(8.17)式求 t 的导数，并将 $\dot{u}$，$\dot{w}$ 的公式(8.16)和(8.18)代入，则

$$\ddot{v}+\Omega_{\mathrm{R}}^2v=0 \tag{8.19}$$

$$\Omega_{\mathrm{R}}=\sqrt{\left(\frac{\mu E_0}{\hbar}\right)^2+(\bar{\omega}-\omega)^2} \tag{8.20}$$

注意初条件 $v(0)=0$，则方程(8.19)的解为

$$v=C_1\sin(\Omega_R t) \tag{8.21}$$

将 v 分别代入(8.16)式和(8.18)式，积分，则

$$u=C_1\frac{(\bar{\omega}-\omega)}{\Omega_R}[\cos(\Omega_R t)-1] \tag{8.22}$$

$$w=C_1\frac{\mu E_0}{\hbar}\frac{1}{\Omega_R}[\cos(\Omega_R t)-1]+w(0) \tag{8.23}$$

为确定系数 C_1，将 u,v,w 的表达式(8.21)～(8.23)式代回 v 的方程(8.17)，则在 $t=0$ 时有

$$\left.\begin{aligned} C_1\Omega_R&=w(0)\left(\frac{\mu E_0}{\hbar}\right)\\ C_1&=\frac{\mu E_0}{\hbar}\frac{w(0)}{\Omega_R}\end{aligned}\right\} \tag{8.24}$$

$$\Omega'_R=\left|\frac{\mu E_0}{\hbar}\right| \tag{8.25}$$

Ω_R 和 Ω'_R 分别是非共振及共振时的拉比频率. 这样就得到了方程的解

$$\left.\begin{aligned} u&=w(0)\frac{(\bar{\omega}-\omega)\Omega'_R}{\Omega_R^2}[\cos(\Omega_R t)-1]\\ v&=w(0)\frac{\Omega'_R}{\Omega_R}\sin(\Omega_R t)\\ w&=w(0)\left\{1+\left(\frac{\Omega'_R}{\Omega_R}\right)^2[\cos(\Omega_R t)-1]\right\}\end{aligned}\right\} \tag{8.26}$$

特别当共振时，$\bar{\omega}=\omega$，解变为

$$\left.\begin{aligned} u&=0\\ v&=w_0\sin\Omega'_R t\\ w&=w_0\cos\Omega'_R t\end{aligned}\right\} \tag{8.27}$$

显然，由(8.26)式可知，反转粒子数随时间 t 周期性振荡，称为拉比振荡. 下节将看到 v 以 $\sin(\Omega'_R t)$ 振荡就是光学章动.

8.3.2 二能级粒子数的振荡

假设在初始时刻全部粒子在上能级，即 $w(0)=1$，在共振时

$$w=\cos(\Omega'_R t),\quad w(0)=1 \tag{8.28}$$

由于

$$\left.\begin{aligned} |c_a|^2-|c_b|^2&=w=\cos\Omega'_R t\\ |c_a|^2+|c_b|^2&=1\end{aligned}\right. \tag{8.29}$$

容易得到

$$\left.\begin{aligned}|c_a|^2&=\cos\left(\frac{1}{2}\Omega'_{\mathrm{R}}t\right)=\cos\left(\frac{\mu E_0}{2\hbar}t\right)\\|c_b|^2&=\sin\left(\frac{1}{2}\Omega'_{\mathrm{R}}t\right)=\sin\left(\left|\frac{\mu E_0}{2\hbar}\right|t\right)\end{aligned}\right\}\tag{8.30}$$

对于非共振情况，当 $w(0)=1$ 时，可得到

$$\begin{aligned}w&=1+\left(\frac{\Omega'_{\mathrm{R}}}{\Omega_{\mathrm{R}}}\right)[\cos(\Omega_{\mathrm{R}}t)-1]\\|c_a|^2&=1-\left(\frac{\Omega'_{\mathrm{R}}}{\Omega_{\mathrm{R}}}\right)\sin^2\left(\frac{1}{2}\Omega_{\mathrm{R}}t\right)\\|c_b|^2&=\left(\frac{\Omega'_{\mathrm{R}}}{\Omega_{\mathrm{R}}}\right)\sin^2\left(\frac{1}{2}\Omega_{\mathrm{R}}t\right)\end{aligned}\tag{8.31}$$

图 8.1 表示在拉比振荡中，上、下能级上粒子数随时间的变化，特别注意，在共振时，粒子数可由全部在上能级（$w=1$）变为全部在下能级. 非共振的情况则不然.

拉比振荡的几何图像可用图 3.3 说明. 即布洛赫矢量绕 β 轴转动时，w 周期振荡.

图 8.2 所示的是拉比振荡的实验曲线. 荧光强度正比于激发态粒子数。

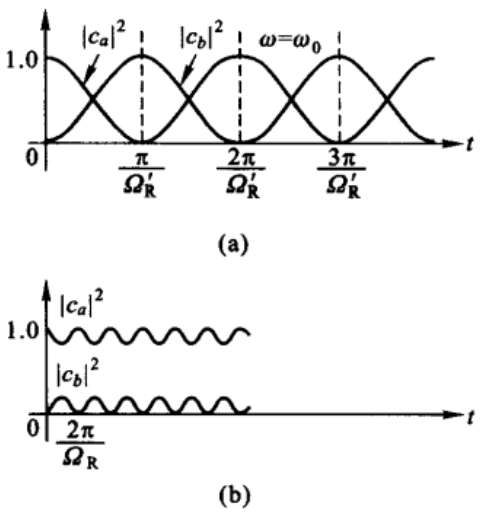


图 8.1 拉比振荡
(a)共振 (b)非共振

图 8.1 的理论曲线与图 8.2 的实验曲线似乎“有矛盾”，前者在 $t=0$ 时，c_a 最大；后者在 $t=0$ 时，$c_a=0$。这是因为(8.31)式和图 8.1 的前提条件假定在初始时刻全部粒子都在上能级，即 $|c_a(0)|^2=1$；而在实验中，在初始时刻，全部粒子都在下能级，即 $|c_a(0)|^2=0$。激发态粒子数正比于 $|c_a|^2$。在实验中，初始时刻的激发态粒子数为 0，即 $c_a(0)=0$，故荧光光强为零。图 8.2 表明，荧光强度呈周期性变化，即代表 $|c_a|^2$ 周期性变化，变化频率由拉比频率 Ω_{R} 或泵浦脉冲面积 $\Omega_{\mathrm{R}}t=\frac{\mu E_0}{\hbar}t$ 决定。

为了在实验上能观察到拉比振荡，应有条件

$$T_1,T_2\gg\Delta t>|\hbar/\mu E_0|\tag{8.32}$$

其中 $\Delta t\ll T_1,T_2$ 是瞬态相干作用条件；而 $\Delta t>|\hbar/\mu E_0|$ 可保证在作用时

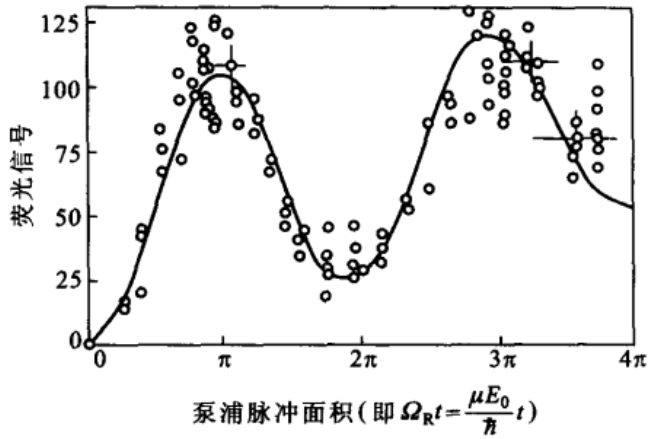


图 8.2 拉比振荡实验

间 Δt 内有一个或多个周期振荡.

8.4 光学章动

光学章动是突然加一个激光脉冲照射二能级的原子或分子,原子交替地吸收和再发射出激光.从几何图像来看,$\dot{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{B}$,在非旋转坐标系中,转轴 $\boldsymbol{\beta}$ 绕第三个轴旋转,布洛赫矢量又绕 $\boldsymbol{\beta}$ 轴而章动.这样使布洛赫矢量的横向分量 u 和 v 周期性地变化,由此导致光学章动.

前面求出在矩形光脉冲作用下的布洛赫矢量的两个横向分量,即(8.26)式,

$$\left.\begin{aligned} u(t)&=w(0)\frac{\Omega'_R(\bar{\omega}-\omega)}{\Omega_R}[\cos(\Omega_R t)-1]\\ v(t)&=w(0)\frac{\Omega'_R}{\Omega_R}\sin(\Omega_R t)\end{aligned}\right\} \tag{8.33}$$

对于非均匀加宽介质(气体),假定近共振激发,$(\bar{\omega}-\omega)\approx 0$,$u\approx 0$.考虑到原子的运动以及原子按速度的分布,则

$$\begin{aligned}\langle v\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\pi}\delta\omega_D}\int_{-\infty}^{\infty} v e^{-(\Delta/\delta\omega_D)^2}\,d\Delta\\ \Delta&=\bar{\omega}-\omega+kv\end{aligned} \tag{8.34}$$

再假定激光的谱线宽度远小于气体介质的多普勒宽度 $\delta\omega_D$,则其中积分号内的指数是慢变函数(非均匀加宽的包络线随频率变化慢),可提到积分号之外.将(8.33)中的 $v(t)$ 代入则

$$\langle v\rangle=\frac{2w(0)}{\sqrt{\pi}\delta\omega_D}\left|\frac{\mu E_0}{\hbar}\right| e^{-[\Delta/(\delta\omega_D)]^2}\times$$

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin\left\{\left[\left(\frac{\mu E_0}{\hbar}\right)^2+\Delta^2\right]^{1/2}t\right\}}{\left[\left(\frac{\mu E_0}{\hbar}\right)^2+\Delta^2\right]}\mathrm{d}\Delta$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}w(0)}{\delta\omega_D}\left|\frac{\mu E_0}{\hbar}\right|\mathrm{e}^{-[\Delta/(\delta\omega_D)]^2}\mathrm{J}_0\left(\left|\frac{\mu E_0}{\hbar}\right|t\right) \tag{8.35}$$

其中 $\mathrm{J}_0\left(\left|\frac{\mu E_0}{\hbar}t\right|\right)$是贝塞尔函数，$\delta\omega_D$ 是多普勒加宽的线宽.

由于激光与介质的瞬态相干作用，二能级系统发生极化$\langle v\rangle$，而$\langle v\rangle$又作为辐射源，$\langle v\rangle$辐射的信号就是光学章动的光信号. 由于这里考虑的是矩形脉冲(E_0 不随 t 变化)，而且进而假定是薄样品，则光学章动信号 E_s 是

$$\frac{\mathrm{d}E_s}{\mathrm{d}z}=\frac{c\mu_0\omega}{2}N'\mu\langle v\rangle$$

$$E_s=\frac{c\mu_0\omega}{2}LN'\mu\langle v\rangle \tag{8.36}$$

$$=\frac{c\mu_0\omega}{2}LN'\frac{\sqrt{\pi}}{\delta\omega_D}\left|\frac{\mu E_0}{\hbar}\right|w(0)\mathrm{e}^{-[\Delta/(\delta\omega_D)]^2}\mathrm{J}_0\left(\left|\frac{\mu E_0}{\hbar}\right|t\right)$$

再考虑到 E_s 是慢变振幅，再考虑到 v 按 $T=T_1=T_2$ 衰减的修正，则

$$E_s=\frac{c\mu_0\omega}{2}LN'\frac{\sqrt{\pi}}{\delta\omega_D}\left|\frac{\mu E_0}{\hbar}\right|w(0)L\mathrm{e}^{-[\Delta/(\delta\omega_D)]^2}\times$$

$$\mathrm{e}^{-t/T}\mathrm{J}_0\left(\left|\frac{\mu E_0}{\hbar}\right|t\right)\cos(\omega t-kz) \tag{8.37}$$

其中 L 是样品长度.

由计算结果(8.37)式可知：(1)当矩形光脉冲突然终止后，光学信号的慢变振幅按时间 t 的变化频率近似为 $\left|\frac{\mu E_0}{\hbar}\right|$. (2)光学章动信号按弛豫时间指数衰减(激光作用之后 $E_0=0$，光学章动信号衰减). (3)光学章动信号光强正比于入射光强 E_0^2 和样品长度的平方 L^2.

图 8.3 所示的是光学章动的实验结果，样品为 $^{13}CH_3F$，^{13}C 是碳原子同位素. 该实验采用了斯塔克技术. 用连续激光照射样品，分子与激

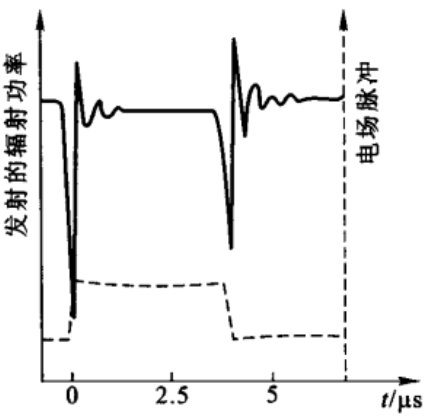


图 8.3 $^{13}CH_3F$ 的光学章动效应

光比较远离共振. 突然加一个直流电脉冲，能级发生斯塔克位移，发生近共振作用. 图中的曲线是从样品透射的光信号. 突然发生瞬态相干作用时，章动光强以角频率 $|\mu E_0/\hbar|$ 调制，$t \ll T_1, T_2$ 时，则指数衰减；当 $t \gg T_1, T_2$ 时，则是定态作用.

8.5 光子回声的机理

本节介绍光子回声的概念和几何图像，下节进行定量计算

8.5.1 π 脉冲

由拉比振荡的研究可知，当光脉冲面积 $\frac{|\mu E_0|}{\hbar}\Delta t = \pi$ 时，w 可以从 $+1$变到-1，或者相反. 按照光学布洛赫方程的矢量模型，就是布洛赫矢量旋转了 π 角. 面积等于 π 的脉冲叫 π 脉冲

$$\frac{|\mu E_0|}{\hbar}\Delta t = \pi \tag{8.38}$$

如果光脉冲面积为 $\pi/2$，则称为 $\pi/2$ 脉冲. 以此类推，还有 2π 脉冲等.

8.5.2 光子回声示意图与几何图像

图 8.4 所示的是光子回声的示意图. 其中从时刻 0 到 t_1 是 $\frac{\pi}{2}$ 脉冲，t_2 到 t_3 是 π 脉冲，在时刻 t_4 的脉冲是光子回声，其物理过程是先用面积为 $\pi/2$ 的光脉冲作用于非均匀加宽的介质，经过时间 τ 之后再加 π 脉冲. 那么，经过时间 t 之后，介质发射出相干辐射脉冲. 这就是光子回声. 这相当于 $\pi/2$ 脉冲经过了时间 τ，用 π 脉冲使原来的 $\pi/2$ 脉冲又经过 τ 的时间而“回来”了.

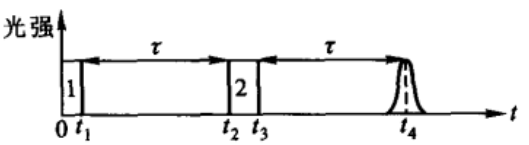


图 8.4 光子回声示意图

用光学布洛赫方程的矢量模型很容易说明光子回声的机理，如图 8.5 所示，为了简单，考虑非均匀加宽的介质中的 3 个原子，其频率分别为

$$\left.\begin{aligned} \bar{\omega}_1 &= \bar{\omega}_0 - \Delta\omega \\ \bar{\omega}_2 &= \bar{\omega}_0 \\ \bar{\omega}_3 &= \bar{\omega}_0 + \Delta\omega, \quad \Delta\omega > 0 \end{aligned}\right\} \tag{8.39}$$

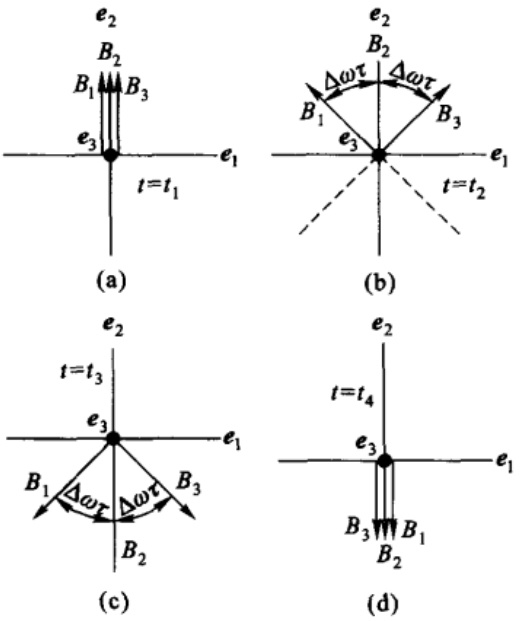


图 8.5 光子回声的几何图像

设初始条件 $w(0)=+1$，即原子都在激发态.

(1) 加 $\pi/2$ 脉冲时，假定 $\dfrac{|\mu E_0|}{\hbar}\gg\Delta\omega$，则转轴 $\boldsymbol{\beta}$ 在 $-\boldsymbol{e}_1$ 方向，即

$$\boldsymbol{\beta}\approx\left(-\frac{\mu E_0}{\hbar},0,0\right) \tag{8.40}$$

布洛赫矢量的初始值 $\boldsymbol{B}(0)=w(0)=+1$，沿 $\boldsymbol{e}_3$，即 $\boldsymbol{B}(0)$ 垂直纸面指向外边. 加 $\pi/2$ 脉冲，按右手定则即 $\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{B}(0)$，布洛赫矢量 $\boldsymbol{B}$，绕 $-\boldsymbol{e}_1$ 轴按右手螺旋定则转到 $+\boldsymbol{e}_2$ 的方向，如图 8.5(a)所示.

(2) 自由衰减，$\pi/2$ 脉冲过去之后，与介质作用的光场为零，这时 $\left(-\dfrac{\mu E_0}{\hbar}\right)=0$，3 个原子的布洛赫矢量的旋转轴分别为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}_1&=(0,0,-\Delta\omega)\\ \boldsymbol{\beta}_2&=(0,0,0)\\ \boldsymbol{\beta}_3&=(0,0,+\Delta\omega)\end{aligned}\right\} \tag{8.41}$$

即 $\boldsymbol{\beta}_1$ 沿 $-\boldsymbol{e}_3$，垂直纸面指向里边；$\boldsymbol{B}_1$ 从 $+\boldsymbol{e}_2$ 方向围绕 $-\boldsymbol{e}_3$ 轴旋转($\Delta\omega\tau$)角；$\boldsymbol{B}_2$ 不旋转(转角为 $\boldsymbol{\beta}_2$ 轴的长度 $|\boldsymbol{\beta}_2|=0$)；$\boldsymbol{B}_3$ 绕 $+\boldsymbol{e}_3$ 轴旋转($\Delta\omega\tau$)角，如图 8.5(b)所示.

(3) 加 π 脉冲. 这时，$\boldsymbol{B}_1$，$\boldsymbol{B}_2$ 和 $\boldsymbol{B}_3$ 的转轴都近似为

$$\boldsymbol{\beta}=\left(-\frac{\mu E_0}{\hbar},0,0\right) \tag{8.42}$$

$\frac{\mu E_0}{\hbar} \gg \Delta\omega$，即转轴在$-\boldsymbol{e}_1$方向. 3个原子的布洛赫矢量都绕$+\boldsymbol{e}_1$轴旋转$\pi$角，如图8.5(c)所示.

(4) 光子回声信号. π脉冲作用之后，光场$E=0$，这时是自由衰减. 3个原子的布洛赫矢量$\boldsymbol{B}_1$，$\boldsymbol{B}_2$和$\boldsymbol{B}_3$的转轴由(8.41)式表示. 经过时间τ，$\boldsymbol{B}_1$绕$-\boldsymbol{e}_3$轴旋转$(\Delta\omega\tau)$角；$\boldsymbol{B}_2$不动；$\boldsymbol{B}_3$则绕$\boldsymbol{e}_3$轴转$(\Delta\omega\tau)$. 这样，三个布洛赫矢量都沿$-\boldsymbol{e}_3$方向，如图8.5(d). 特别注意，这时3个原子的偶极矩又恢复到相同的位相，都是极大值. 这时介质的宏观极化强度又恢复到极大，它辐射的光信号就是光子回声.

应特别注意，这时每个原子的偶极子都是自发辐射，但它们都是同位相地辐射出光. 这是相干的自发辐射，与受激辐射机理不同.

最后简单总结如下：

(1) $\pi/2$光脉冲使非均匀加宽介质的原子或分子的偶极矩变成同位相，极化强度极大.

(2) 然后偶极矩位相趋向混乱(弛豫过程). 按照横向弛豫时间T_2的定义，经过时间T_2，则偶极矩位相几乎完全混乱，极化强度几乎为零(实际上衰减到1/e). 因此T_2叫“解相时间”(dephasing time). 但是，$\pi/2$脉冲作用后，经过时间$\tau \ll T_2$就加一个π脉冲.

(3) 由π脉冲的作用，以及再经过时间τ的弛豫过程，偶极矩的位相又相同了. 因此，在光子回声产生的整个物理过程中，π脉冲起着“拨乱反正”的作用.

(4) 光子回声对π脉冲的延迟时间，恰好等于π脉冲与$\pi/2$脉冲的时间间隔.

(5) 光子回声是相干自发辐射.

(6) 只有非均匀加宽的介质才可能产生光子回声. 由于$\pi/2$和π脉冲与介质的作用时间，以及$\pi/2$和π脉冲间隔，都远小于T_1，T_2，所以这属于瞬态相干作用.

光子回声的一个形象的比喻是一种赛跑游戏：发令枪一响，运动员从同一起跑线迈右脚起跑(位相一样). 起跑后，拉开了距离，位相混乱了. 若发令员再鸣枪命令他们向回跑，经过相同时间，又都回到起跑线，位相又相同了.

8.6 光子回声的计算

本节用光学布洛赫方程计算光子回声. 基本思路是把$\pi/2$脉冲或π

脉冲作用看成光学章动，把 $\pi/2$ 与 π 脉冲之间的过程以及 π 脉冲之后的过程看成自由衰减. 为此，必须首先给出有衰减的光学章动公式和自由衰减公式，再用这些公式计算光子回声.

8.6.1 有衰减的光学章动公式

包含衰减项的光学布洛赫方程一般没有解析解，但在假定 $T_1=T_2=T$ 时，可得到解析解

$$u(t)=u^0+\mathrm{e}^{-t/T}\left\{u(0)-\Delta[v(0)-v^0]\frac{\sin(\Omega_R t)}{\Omega_R}+\Delta\left[\Delta u(0)+\frac{\mu E}{\hbar}w(0)-v^0/T\right]\frac{\cos(\Omega_R t)-1}{\Omega_R^2}-u^0\right\} \tag{8.43}$$

$$v(t)=v^0+\mathrm{e}^{-t/T}\{[v(0)-v^0]\cos(\Omega_R t)+\left[\Delta u(0)+\frac{\mu E}{\hbar}w(0)-v^0/T\right]\frac{\sin\Omega_R t}{\Omega_R}\} \tag{8.44}$$

$$w(t)=w^0+\mathrm{e}^{-t/T}\left\{w(0)-w_0-\frac{\mu E}{\hbar}[v(0)-v^0]\frac{\sin\Omega_R t}{\Omega_R}+\frac{\mu E}{\hbar}\left[\Delta u(0)+\frac{\mu E}{\hbar}w(0)-v^0/T\right]\frac{\cos\Omega_R t}{\Omega_R^2}+T\frac{\mu E}{\hbar}v^0\right\} \tag{8.45}$$

其中 $u(0)$，$v(0)$，$w(0)$ 最初值，w_0 是零场时的粒子数差(对应 d_0 或 D_0)，而 u^0，v^0 和 w^0 则是定态解，见第 3 章(3.113)、(3.114)和(3.115)式.

8.6.2 自由衰减

假设 $t\geqslant t_0$ 时 $E=0$，$t<t_0$ 时 $E=E_0$，这相当于激发突然停止. 当 $t>t_0$ 时，且略去衰减项，则光学布洛赫方程为

$$\dot{u}=-\Delta v,\quad \dot{v}=\Delta u,\quad \dot{w}=0 \tag{8.46}$$

$$\ddot{u}=-\Delta\dot{v}=-\Delta^2 u \tag{8.47}$$

$$u=C_1\cos(\Delta t)+C_2\sin(\Delta t) \tag{8.48}$$

$$v=-\dot{u}/\Delta=C_1\sin(\Delta t)-C_2\cos(\Delta t) \tag{8.49}$$

由初始条件 $u=u(0)$ 和 $v=v(0)$，则

$$\left.\begin{aligned}u&=u(0)\cos(\Delta t)-v(0)\sin(\Delta t)\\v&=u(0)\sin(\Delta t)+v(0)\cos(\Delta t)\\w&=w_0\end{aligned}\right\} \tag{8.50}$$

再考虑衰减项的影响，u 和 v 按 e^{-t/T_2} 衰减，w 按 e^{-t/T_1} 衰减，并且注意用斯塔克开关技术使原子与激光的作用突然终止，由于斯塔克效应引起的能级移动为($\Delta\omega_{21}$)，则(8.50)式中的 Δ 都变为

$$\Delta\to\Delta'\equiv\Delta+(\Delta\omega_{21})$$

(8.50)式变为

$$\left.\begin{aligned} u&=[u(0)\cos\Delta' t-v(0)\sin\Delta' t]e^{-t/T_2}\\ v&=[u(0)\sin\Delta' t+v(0)\cos\Delta' t]e^{-t/T_2}\\ w&=w^0+[w(0)-w^0]e^{-t/T_1}\end{aligned}\right\} \tag{8.51}$$

下面用章动公式和自由衰减公式计算光子回声.

8.6.3 光子回声的计算

参考图 8.4 中的各个阶段，分别计算.

(1) $0<t<t_1$，加 $\pi/2$ 脉冲. 由于 $t_1\ll T_1, T_2$，可用初值为 $B=(0,0,w(0))$的光学章动公式(8.26)式得出

$$\left.\begin{aligned} u(t_1)&=\Delta\frac{w(0)}{\Omega_R}\Omega'_R(\cos\theta_{10}-1)\\ v(t_1)&=\frac{\Omega'_R}{\Omega_R}w(0)\sin\theta_{10}\\ w(t_1)&=w(0)+\left(\frac{\Omega'_R}{\Omega_R}\right)^2 w(0)(\cos\theta_{10}-1)\end{aligned}\right\} \tag{8.52}$$

其中 $\theta_{10}=\Omega_R t_1$

(2) $t_1<t<t_2$，自由衰减. 利用(8.52)作为初始条件代入(8.51)式，则

$$\left.\begin{aligned} u(t_2)&=[u(t_1)\cos\Delta'(t_2-t_1)-\\ &\qquad v(t_1)\sin\Delta'(t_2-t_1)]e^{-(t_2-t_1)/T_2}\\ v(t_2)&=[u(t_1)\sin\Delta'(t_2-t_1)+\\ &\qquad v(t_1)\cos\Delta'(t_2-t_1)]e^{-(t_2-t_1)/T_2}\\ w(t_2)&=w(t_1)e^{-(t_2-t_1)/T_1}\end{aligned}\right\} \tag{8.53}$$

其中考虑到 $w^0=0$.

(3) $t_2<t<t_3$，加 π 脉冲. 利用光学章动公式(8.43)，(8.44)和(8.45)，并令 $T\to\infty$(相干作用)$w^0=0$，以上面的 $u(t_2)$、$v(t_2)$和 $w(t_2)$为初始条件，

$$\boldsymbol{B}(t_2)=(u(t_2),v(t_2),w(t_2)) \tag{8.54}$$

$$\left.\begin{aligned}
u(t_3)&=u(t_2)-\Delta\frac{1}{\Omega_R}v(t_2)\sin\theta_{32}-\\
&\quad 2\Delta\frac{1}{\Omega_R^2}[\Delta u(t_2)+\Omega'_R w(t_2)]\sin^2(\theta_{32}/2)\\
v(t_3)&=v(t_2)\cos\theta_{32}-\\
&\quad \frac{1}{\Omega_R}[\Delta u(t_2)+\Omega'_R w(t_2)]\sin\theta_{32}\\
w(t_3)&=w(t_2)-\frac{\Omega'_R}{\Omega_R}v(t_2)\sin\theta_{32}-\\
&\quad 2\frac{\Omega'_R}{\Omega_R^2}[\Delta u(t_2)+\Omega'_R w(t_2)]\sin^2(\theta_{32}/2)
\end{aligned}\right\}\tag{8.55}$$

注意这时 $u(t_2)\neq 0, v(t_2)\neq 0$，绝对不可用初条件为 $\boldsymbol{B}=(0,0,w(0))$ 的光学章动公式(8.26).

(4) $t>t_3$，自由衰减. 由(8.51)式，得出

$$\left.\begin{aligned}
u(t)&=[u(t_3)\cos\Delta'(t-t_3)-\\
&\quad v(t_3)\sin\Delta'(t-t_3)]e^{-(t-t_3)/T_2}\\
v(t)&=[v(t_3)\sin\Delta'(t-t_3)+\\
&\quad v(t_3)\cos\Delta'(t-t_3)]e^{-(t-t_3)/T_2}\\
w(t)&=w(t_3)e^{-(t-t_3)/T_1}
\end{aligned}\right\}\tag{8.56}$$

将 $u(t_2)$，$v(t_2)$ 和 $w(t_2)$ 代入 $u(t_3)$、$v(t_3)$ 和 $w(t_3)$，再代入(8.56)式，并引入时间

$$2\tau=t_3+(t_2-t_1)\tag{8.57}$$

则 u,v 中包含因子 $\cos\Delta'(t-2\tau)$ 和 $\sin\Delta'(t-2\tau)$. 由光子回声的定性考虑，在 $t=2\tau$ 时出现光子回声，即 $\sin\Delta'(t-2\tau)=0$，故在 u 和 v 中去掉 $\sin\Delta'(t-2\tau)$. 对介质的速度分布函数求平均得到

$$\left.\begin{aligned}
\langle v\rangle&=\frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta\omega_D}\int_{-\infty}^{\infty}v\exp\left[-\left(\frac{\Delta}{\Delta\delta\omega_D}\right)^2\right]d\Delta\\
&=-w(0)\left(\frac{\mu E}{\hbar}\right)^2 e^{-t/T_2}\cos[(\Delta\omega_{21})(t-2\tau)]\times\\
&\quad\left[\frac{1}{\Omega_R^3}\sin\theta_{10}\sin^2\left(\frac{1}{2}\theta_{32}\right)\cos\Delta'(t-2\tau)\right]
\end{aligned}\right\}\tag{8.58}$$

其中〈…〉代表对多普勒效应求平均. 对薄样品，得到光子回声信号

$$\begin{aligned}
E&=\frac{1}{2}LN'c\mu_0\mu w\langle v\rangle\\
&=\frac{1}{2}LN'c\mu_0\mu w(0)\omega(\Omega'_R)^3 e^{-t'/T_2}\cos\Delta(t-2\tau)\times
\end{aligned}$$

$$\left[\frac{1}{\Omega_R^3}\sin\theta_{10}\sin^2\frac{1}{2}\theta_{32}\cos\Delta'(t-2\tau)\right] \tag{8.59}$$

其中 Ω_R 和 Ω'_R 是拉比频率，θ_{10} 和 θ_{32} 分别是第一和第二个脉冲的面积，$(\Delta\omega_{21})$是斯塔克位移.

由(8.59)式可知：

(1) $t=2\tau$ 时出现光子回声.

(2) $\theta_{10}=\pi/2$，$\theta_{32}=\pi$ 时光子回声最强.

习题与思考

(1) 详细讨论拉比振荡的几何图像.

(2) 贝塞尔函数在光学章动公式中有何含义？

(3) 详细讨论 $w(0)=+1$ 时的光子回声几何图像.

(4) 光子回声的理论计算的思路如何？所得结果有哪些物理意义？

参 考 文 献

[1] McCall S L, Hahn E L. Self-induced transparency. Phys. Rev., 1969, 183: 457 - 460.

[2] Lamb G L. Analytical description of ultrashort optical pulse propagation in a resonant medium. Rev. Mod. Phys., 1971, 43: 99 - 105.

[3] Gibbs H M. Peak amplification and breakup of a coherent optical pulse in a simple atomic absorber. Phys. Rev. Letters, 1970, 24: 638 - 642.

[4] Allen L, Eberly J H. Optical resonance and two-level atoms. New York: Wiley, 1975.

[5] Hopf F A. "Amplifier Theory", in high energy lasers and their applications. Massachusetts: Addison-Wesley, Reading, 1974.

[6] Elgin J N. Li F L. Propagation effects in three levels systems. Optics Communication, 1982, 43: 355 - 360.

[7] 王润文. 光与二能级原子系统相互作用方程的解析解. 激光, 1982, 4: 3 - 8.

[8] 甘子钊，张国祯. 半导体中光的相干传播理论(Ⅰ). 物理学报. 1981, 7: 24 - 32.

[9] 甘子钊，张国祯. 半导体中光的相干传播理论(Ⅱ). 物理学报. 1981, 8: 41 - 55.

[10] 甘子钊，张国祯. 半导体中光的相干传播理论(Ⅲ). 物理学报. 1981, 8: 56 - 66.

第 9 章　光学孤立子

在第 8 章中研究的拉比振荡等，属于定态光脉冲的相干作用，光脉冲是矩形的，在脉宽内光场 E 是常数. 光子回声是非定态光脉冲与薄样品的相干作用. 它们都不涉及光脉冲的传播效应. 本章研究非定态光脉冲（E 是 t 的函数）的传播问题，其中最有趣的问题便是光学孤立子. 首先介绍孤立子的概念，然后研究“自感透明”的孤立子问题，最后重点介绍光纤中的孤立子与孤立子激光器.

9.1　孤立子的概念

孤立子的早期概念称为孤立波. 1834 年，英国的造船工程师罗素发现了一个奇妙的现象：两匹马拉着的船在运河中前进，当船突然停止时，有一巨大的水峰离开船头而快速前进，并保持形状不变. 罗素称之为孤立波. 1895 年科特维格和德弗雷斯为解释一维的浅水波，提出了著名的 KdV 方程（Kortweg - de Vries 方程），该方程有一个解就是孤立波的形式. 1965 年美国数学家克鲁斯卡尔（Kruskal）等首次提出了孤立子（soliton）的名称. 1976 年，拉姆从理论上证明，激光与二能级原子的一种相干作用——自感透明，是典型的光学孤立子现象. 有人证明短脉冲在光纤中也能以孤立子的形式传播.

简单说，孤立子是能量或物质特定的传播形式，它们以特定的形状和速度传播，而且在孤立子相互碰撞之后各自保持自己的形状和速度不变.

现在知道，有几种典型的孤立子现象，可以用非线性方程描述. 最有代表性的三类方程是：

（1）KdV 方程.

（2）正弦-高登方程（sine - Gordon 方程），例如光学中的自感透明.

（3）非线性薛定谔方程，例如光纤中的孤立子.

孤立子产生的机理是色散与非线性两种因素制约的结果. 色散效应使一个脉冲波形散开，因为该波形的不同频率成分（傅氏分量）传播速度不同；非线性效应使脉冲的前沿变慢、后沿变快. 二者互相制约，可能使波形保持不变. 光学孤立子便是光的色散与光的非线性效应互相制约的结果.

图 9.1 所示的是两个光学孤立子碰撞的计算机绘图. 图中的孤立子 a 和 b 传播速度不同,都沿 z 方向传播. 经过一定时间,二者碰撞,发生作用. 但是碰撞之后,仍各自保持自己的形状不变,即 a' 与 a 形状相同,b' 与 b 形状相同.

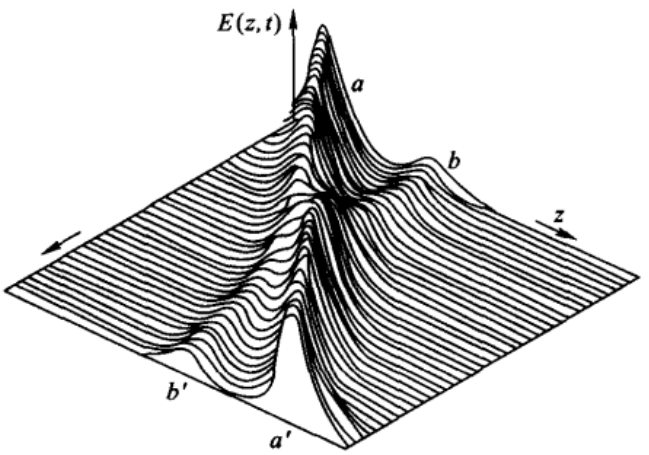


图 9.1 两个孤立子碰撞后各自形状不变

孤立子也是在物理学、力学、生物学中广泛存在的. 孤立子引人注目的应用,就是利用孤立子的光纤通信.

9.2 自感透明的定性描述

当足够强的、有适当波形的激光脉冲通过共振吸收的二能级介质时,吸收为零,好像是透明的. 这种现象就称为自感透明(self - induced transparency),记为 SIT. 它与饱和吸收现象决然不同:

(1) 自感透明是相干作用,饱和吸收是非相干作用(后者仅由粒子数差决定).

(2) 自感透明的脉冲形状是双曲正割的、面积为 2π 的脉冲,简称"2πh - s"(2π hyperbolic secant)脉冲,而饱和吸收时,脉冲形状没有这种性质.

(3) 在自感透明现象中,一个面积较大的脉冲会分裂为若干小脉冲,而饱和吸收现象中却不发生脉冲的分裂.

(4) 在自感透明现象中,光脉冲在吸收介质中的传播速度 v 可以比相速度 c/n 低得多(例如可以低三个数量级).

由此也可以看出,相干作用与非相干作用的根本区别. 自感透明是相干作用的一个奇妙的例子.

自感透明与第 8 章讲过的光子回声的条件有相似之处，也有重大区别：二者都是非定态脉冲与二能级原子的作用，因此它们的布洛赫方程 $u(t)$，$v(t)$，$w(t)$ 是一样的. 但是，光子回声是光脉冲与薄样品的作用，所以在光子回声理论中完全不考虑传播效应（见(8.9)式）；而自感透明是光脉冲与厚样品的作用，这时必须用麦克斯韦方程来解决脉冲的传播问题.

自感透明现象可以用 π 脉冲的概念来解释. 若初始时 $w_0=-1$，即粒子数都在下能级，π 脉冲使之变为 $w_0=+1$. 反之，若初始时 $w_0=+1$，则 π 脉冲使之变为观 $w_0=-1$. 我们可以把一个 2π 脉冲看成 2 个 π 脉冲：即把前半部分看成一个 π 脉冲，后半部分也看成一个 π 脉冲. 当 2π 脉冲进入 $w_0=-1$ 的吸收介质时，前半部分的 π 脉冲使 $w_0=-1$ 变为 $w_0=+1$；后半部分的 π 脉冲，又使 $w_0=+1$ 恢复为 $w_0=-1$. 这就意味着，前半部分的 π 脉冲的能量被吸收，由于后半部分 π 脉冲的作用，处在上能级（$w_0=+1$）的粒子发生相干辐射，被吸收的能量又被完全取出来. 这样介质就呈现为透明的，而且由于 2π 脉冲与吸收介质交换能量（前半部分的能量叠加在后半部分之后），使得脉冲的传播速度（指波峰的速度）远小于相速度.

从理论上看，由于自感透明是非定态脉冲与“厚样品”的作用，光场 $E(z,t)$ 随 z 和 t 变化，必须研究传播效应. 因此，应该用如下的麦克斯韦-布洛赫方程描述，

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}&=-\Delta\omega v\\ \frac{\partial v}{\partial t}&=\Delta\omega u+\frac{\mu E}{\hbar}w\\ \frac{\partial w}{\partial t}&=-\frac{\mu E}{\hbar}v\end{aligned}\tag{9.1}$$

$$\frac{\partial E}{\partial z}+\frac{n}{c}\frac{\partial E}{\partial t}=\left(\frac{c\mu_0\omega}{2n}N'\mu\right)\int_{-\infty}^{\infty}v(\Delta\omega,z,t)g(\Delta\omega)\mathrm{d}(\Delta\omega)\tag{9.2}$$

其中 $g(\Delta\omega)$ 是介质的非均匀加宽的线型，假定光的角频率 ω 与原子跃迁的角频率 $\bar{\omega}$ 相等，则失谐量仅是由非均匀加宽引起的. 不同原子的失谐量 $\Delta\omega$ 往往不同. 把 $\Delta\omega$ 看成连续变量. u，v 和 $E(z,t)$ 都是慢振幅，略去了 $E(z,t)$ 的下标 0. 此外，这里的光学布洛赫方程去掉了弛豫项.

在 9.3 节中利用这 4 个方程证明面积定理，在 9.4 节中用这 4 个方程证明自感透明是面积为 2π 的双曲正割脉冲.

9.3 面积定理及其含义

面积定理是光脉冲在介质中传播的理论核心. 这个定理表示光脉冲

在介质中传播时，脉冲的面积随传播距离的变化规律. 这是光的吸收指数衰减的比尔(Beer)定律的推广. 由面积定理，可以预言和说明短脉冲传播的奇妙效应——在吸收介质中可以无损耗地传播，大面积的脉冲分裂为小的脉冲，以及脉冲宽度的压缩等. 本节首先求出非定态光脉冲的布洛赫方程的解，然后利用此共振解和非共振的自由振荡的解证明面积定理，最后用面积定理说明短脉冲传播的特点.

9.3.1 布洛赫方程的共振解

由(9.1)式，我们知道在共振作用时，布洛赫方程是

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}&=0\\ \frac{\partial v}{\partial t}&=\frac{\mu}{\hbar}Ew\\ \frac{\partial w}{\partial t}&=-\frac{\mu}{\hbar}Ev\end{aligned}\right\} \tag{9.3}$$

而且我们曾证明，对于定态脉冲(E 不随 z 和 t 变化)，方程(9.3)的解就是(8.27)式，即

$$\left.\begin{aligned}u&=0\\ v&=w_0\sin\left(\frac{\mu}{\hbar}E_0t\right)\\ w&=w_0\cos\left(\frac{\mu}{\hbar}E_0t\right)\end{aligned}\right\} \tag{9.4}$$

其中的解 w 就是拉比振荡，v 就代表光学章动.

现在证明，当光脉冲的电场是 t 和 z 的函数即光场为 $E(z,t)$ 时，方程(9.3)的解的形式与(9.4)式相似，但是其中定态脉冲的 $\left(\frac{\mu}{\hbar}E_0t\right)$ 要用非定态脉冲 $\theta(z,t)$ 代替，$\theta(z,t)=\frac{\mu}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}E(z,t')\mathrm{d}t'$.

对于共振作用 $\Delta\omega=0$，假定初始时粒子数差是 w_0，并且在初始时没有极化. 即

$$u(0,z,-\infty)=v(0,z,-\infty)=0$$

由方程(9.3)，可知 $u(0,z,t)=0$，并且

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(u^2+w^2)&=2v\frac{\partial v}{\partial t}+2w\frac{\partial w}{\partial t}\\ &=\frac{2\mu}{\hbar}E(vw-vw)=0\end{aligned}$$

$$v^2+w^2=w_0^2$$

这实际上就是共振作用时布洛赫矢量长度不变($u^2+v^2+w^2=u_0^2+v_0^2+w_0^2$).

将结果代入布洛赫方程的$\frac{\partial w}{\partial t}$,则

$$\frac{\partial w}{\partial t}=-\frac{\mu}{\hbar}E\sqrt{w_0^2-w^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{w_0^2-w^2}}=-\frac{\mu}{\hbar}E\,\mathrm{d}t$$

从$-\infty$到t积分,则有

$$\left.\begin{aligned}
&-\arccos\frac{w}{w_0}\Big|_{w_0}^{w}=-\arccos\frac{w}{w_0}=-\frac{\mu}{\hbar}\int_{-\infty}^{t}E(z,t')\mathrm{d}t'\\
&w(0,z,t)=w_0\cos\left[\frac{\mu}{\hbar}\int_{-\infty}^{t}E(z',t)\mathrm{d}t'\right]\\
&\qquad=w_0\cos\theta(z,t)\\
&v=\sqrt{w_0^2-w_0^2\cos\theta}=w_0\sin\theta(z,t)
\end{aligned}\right\}\tag{9.5}$$

(9.4)和(9.5)式就是研究光子回声时曾得到的方程(8.52)的特例. 当E不随t变化时,$\theta(z,t)\to\frac{\mu}{\hbar}E_0t$,(9.4),(9.5)式变为(8.27)式.

为了证明面积定理,还需要用到非共振时的自由衰减公式,在讨论光子回声时曾经证明:若$t\geqslant t_0$时,$E(z,t)=0$,则当$t>t_0$时,布洛赫方程的解为(8.50),即

$$\left.\begin{aligned}
u&=u(0)\cos\Delta(t-t_0)-v(0)\sin\Delta(t-t_0)\\
v&=u(0)\sin\Delta(t-t_0)+v(0)\cos\Delta(t-t_0)\\
w&=w_0
\end{aligned}\right\}\tag{9.6}$$

由于上式对任意一点z都适用,所以当考虑到如下关系后,

$$\Delta=\Delta\omega=\bar{\omega}-\omega$$

$$u(0)=u_0\equiv u(\Delta\omega,z,t_0)$$

$$v(0)=v_0\equiv v(\Delta\omega,z,t_0)$$

(9.6)式变为

$$\left.\begin{aligned}
u(\Delta\omega,z,t)&=u_0\cos\left[\Delta\omega(t-t_0)\right]-v_0\sin\left[\Delta\omega(t-t_0)\right]\\
v(\Delta\omega,z,t)&=u_0\sin\left[\Delta\omega(t-t_0)\right]+v_0\cos\left[\Delta\omega(t-t_0)\right]\\
w(\Delta\omega,z,t)&=w(\Delta\omega,z,t_0)
\end{aligned}\right\}\tag{9.7}$$

9.3.2 面积定理

根据面积的定义,将面积对z求微商,

$$A(z)\equiv\lim_{t\to\infty}\theta(z,t)=\frac{\mu}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}E(z,t')\mathrm{d}t' \tag{9.8}$$

$$\frac{\mathrm{d}A(z)}{\mathrm{d}z}=\lim_{t\to\infty}\frac{\mu}{\hbar}\int_{-\infty}^{t}\frac{\partial}{\partial z}E(z,t')\mathrm{d}t' \tag{9.9}$$

利用麦克斯韦方程(8.25)代替(9.9)式中的$\partial E/\partial z$,则

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}A(z)}{\mathrm{d}z}&=\lim_{t\to\infty}\frac{\mu}{\hbar}\int_{-\infty}^{t}\left\{\frac{c\mu_0\omega}{2n}N'\mu\langle v\rangle-\frac{n}{c}\frac{\partial E}{\partial t}\right\}\mathrm{d}t'\\&=\lim_{t\to\infty}\left\{\frac{-n\mu}{c\hbar}[E(z,t)-E(z,-\infty)]\right.\\&\quad\left.+\frac{c\mu\omega}{2n\hbar}N'\mu^2\int_{-\infty}^{\infty}g(\Delta\omega)\cdot\int_{-\infty}^{t}v(\Delta\omega,z,t')\mathrm{d}t'\mathrm{d}(\Delta\omega)\right\}\end{aligned} \tag{9.10}$$

考虑到$E(z,+\infty)=E(z,-\infty)=0$,并且利用$\frac{\partial u}{\partial t}=-(\Delta\omega)v$,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}z}&=-\frac{c\mu_0\omega}{2n\hbar}(N'\mu^2)\lim_{t\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(\Delta\omega)}{\Delta\omega}\times\int_{-\infty}^{t}\frac{\partial u(\Delta\omega,z,t')}{\partial t'}\mathrm{d}t'\mathrm{d}(\Delta\omega)\\&=-\frac{c\mu_0\omega}{2n\hbar}(N'\mu^2)\lim_{t\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(\Delta\omega)}{\Delta\omega}\times[u(\Delta\omega,z,t)\\&\quad-u(\Delta\omega,z,-\infty)]\mathrm{d}(\Delta\omega)\\&=-\frac{c\mu_0\omega}{2n\hbar}(N'\mu^2)\lim_{t\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(\Delta\omega)}{\Delta\omega}u(\Delta\omega,z,t)\mathrm{d}(\Delta\omega)\end{aligned} \tag{9.11}$$

其中用到$u(\Delta\omega,z,t)=0$.

下面选择一个时刻t_0,使得$t\geqslant t_0$时$E(z,t)=0$,所以可利用自由衰减的公式,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}z}=&-\frac{c\mu_0\omega}{2n\hbar}N\mu^2\lim_{t\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(\Delta\omega)}{\Delta\omega}\\&\times\{u(\Delta\omega,z,t)\cos[\Delta\omega(t-t_0)-v(\Delta\omega,z,t_0)]\\&\times\sin[\Delta\omega(t-t_0)]\}\mathrm{d}(\Delta\omega)\end{aligned} \tag{9.12}$$

这里要特别注意:

(1) $u(\Delta\omega,z,t_0)$是$\Delta\omega$的奇函数;

(2) $v(\Delta\omega,z,t_0)$是$\Delta\omega$的偶函数;

(3) $w(\Delta\omega,z,t_0)$是$\Delta\omega$的偶函数.

这是怎样知道的呢?从定性的考虑,我们在研究光与二能级原子的定态作用时,曾求出极化强度,已经知道,$\mathrm{Re}(P)$是$(\bar{\omega}-\omega)$的奇函数,$\mathrm{Im}(P)$是$(\bar{\omega}-\omega)$的偶函数,D也是$(\bar{\omega}-\omega)$的偶函数.由于定态作用的$u\propto\mathrm{Re}(P)$,$v\propto\mathrm{Im}(P)$,$w\propto D$,所以定态作用的u是$\Delta\omega$的奇函数,而v和w是$\Delta\omega$的

偶函数. 人们自然由此设想，在相干作用时，u,v,w 的奇、偶性是否还与定态作用时一样呢？假定 u,v,w 仍保持这种奇、偶性，代入布洛赫方程，发现果然没有矛盾. 从定量的计算来看，在 9.4 节中我们求解出 u,v,w，也发现相干作用时，u 确实是 $\Delta\omega$ 的奇函数，v 和 w 是 $\Delta\omega$ 的偶函数，见(9.66)，(9.67)和(9.68)式.

现在再回到方程(9.12)，由于 $\cos[\Delta\omega(t-t_0)]$ 是振荡的，$g(\Delta\omega)$ 在 $\Delta\omega\approx 0$ 时较尖锐，所以在方程(9.12)中积分主要来自 $\Delta\omega\approx 0$ 的贡献. 因此可把 $u(\Delta\omega,z,t_0)$ 在 $\Delta\omega\approx 0$ 处展开(注意 u 是 $\Delta\omega$ 的奇函数，展开后只有 $\Delta\omega$ 的奇次项)

$$u(\Delta\omega,z,t_0)\approx a_1\Delta\omega+a_2(\Delta\omega)^2 \tag{9.13}$$

所以方程(9.12)中含 $u(\Delta\omega,z,t_0)$ 的积分变为

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(\Delta\omega)}{\Delta\omega}u(\Delta\omega,z,t_0)\cos[\Delta\omega(t-t_0)]\mathrm{d}(\Delta\omega)\\&=\lim_{t\to\infty}\frac{g(0)a_1\sin[\Delta\omega(t-t_0)]}{(t-t_0)}\Big|_{-\infty}^{\infty}=0\end{aligned} \tag{9.14}$$

同理，由于 $u(\Delta\omega,z,t_0)$ 是 $\Delta\omega$ 的偶函数

$$\begin{aligned}&g(\Delta\omega)v(\Delta\omega,z,t_0)\approx v(0,z,t_0)g(0)\\&\times\lim_{t\to\infty}\frac{g(\Delta\omega)}{\Delta\omega}v(\Delta\omega,z,t)\sin[\Delta\omega(t-t_0)]\mathrm{d}(\Delta\omega)\\&=g(0)v(0,z,t)\lim_{t\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin[\Delta\omega(t-t_0)]}{\Delta\omega}\mathrm{d}(\Delta\omega)\end{aligned} \tag{9.15}$$

将(9.14)，(9.15)式代入(9.12)式，则

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}z}=\frac{c\mu_0\omega}{2n\hbar}N'\mu^2g(0)v(0,z,t)\times\lim_{t\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin[\Delta\omega(t-t_0)]}{\Delta\omega}\mathrm{d}(\Delta\omega) \tag{9.16}$$

由图 9.2 可知方程(9.16)的积分函数是 δ 函数

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}=\pi\delta(\omega) \tag{9.17}$$

再利用(9.5)式，可知方程(9.16)中的 $v(0,z,t_0)$ 可表示为

$$\begin{aligned}v(0,z,t_0)&=w_0\sin\theta(z,t_0)\\&=w_0\sin A\end{aligned} \tag{9.18}$$

其中考虑到了 $t\geqslant t_0$ 时

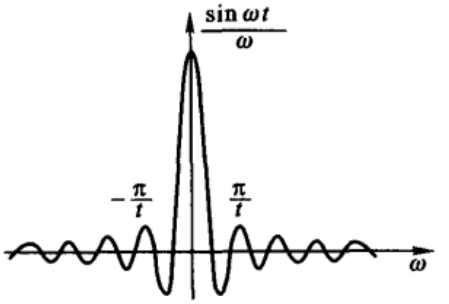


图 9.2 当 $t\to\infty$ 时，$\left(\frac{\sin\omega t}{\omega}\right)$ 是 δ 函数

$$E=0$$

$$\theta=\frac{\mu}{\hbar}\int_{-\infty}^{t}E(z,t')\mathrm{d}t'=\frac{\mu}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}E(z,t')\mathrm{d}t'$$

将(9.17)和(9.18)式代入方程(9.16),注意共振时 $\Delta\omega=0$,则

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}z}=\frac{1}{2}w_0\alpha\sin A \tag{9.19}$$

$$\alpha=\frac{\omega\pi\mu_0 N'\mu^2 c}{n\hbar}g(0) \tag{9.20}$$

对于吸收介质,假定初始时全部粒子在低能级,$w_0=-1$,

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}z}=-\frac{1}{2}\alpha\sin A,\quad w_0=-1\quad(\text{吸收}) \tag{9.21}$$

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}z}=+\frac{1}{2}\alpha\sin A,\quad w_0=1\quad(\text{全反转}) \tag{9.22}$$

(9.20)式的 α 正是小信号共振吸收系数.

9.3.3 面积定理的含义

(1) 面积定理是比尔定律的推广

对于吸收介质,当光脉冲很弱时(脉冲面积很小).

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}z}=-\frac{\alpha}{2}\sin A\approx-\frac{\alpha}{2}A \tag{9.23}$$

$$A(z)=A(0)\mathrm{e}^{-(\alpha/2)z} \tag{9.24}$$

脉冲能量指数衰减,即

$$E^2(z)=E^2(0)\mathrm{e}^{-\alpha z} \tag{9.25}$$

或者 $I(z)=I(0)\mathrm{e}^{-\alpha z}$. 这就是光的吸收的比尔定律.

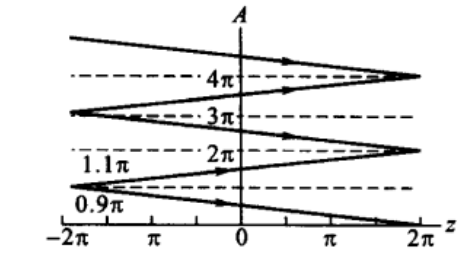
(2) 脉冲压缩

当 $A=m\pi$ 时(m 是整数),脉冲面积不变

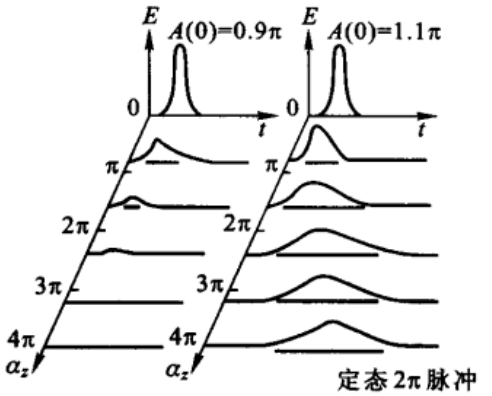
$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}z}=-\frac{\alpha}{2}\sin m\pi=0 \tag{9.26}$$

但是,对吸收介质,m 为奇数时,脉冲是不稳定的,只有 m 为偶数时,脉冲才是"稳定"的,图 9.3(a)表明,短脉冲在吸收介质中传播时,其面积将趋向于最接近的 π 的偶数倍. 例如:$A(0)=1.1\pi$ 的脉冲趋向 2π,然后保持面积不变,且 $A(0)=0.9\pi$ 的脉冲趋向零.

从图 9.3(b)还看到,$A(0)=1.1\pi$ 的脉冲在传播中脉宽变宽了,这是因为光脉冲不可能从吸收介质中提取能量,因此,$A(0)=1.1\pi$ 的脉冲在趋向 2π 时,只有依靠脉冲变宽来增加面积. 更有意义的情况是 $A(0)=3\pi$ 的脉冲,它在趋向 2π 脉冲时,脉宽变窄而峰值增加. 1971 年,Gibbs 等的实验证实了这种脉冲压缩.



(a)



(b)

图 9.3 面积定理

(3) 2π 脉冲的无损耗传播

由于脉冲面积就是布洛赫矢量的转动角度，所以 2π 脉冲使布洛赫矢量严格恢复到原来的位置. 若初始时 $w_0=-1$(粒子全部在下能级)，在 2π 脉冲作用下，粒子分布从 $w_0=-1$ 又回到 $w_0=-1$，吸收介质并不可能从光脉冲得到能量. 若初始条件为 u_0, v_0, w_0(共振时 $u_0=0$)，在 2π 脉冲作用下，粒子数恢复为 w_0，偶极矩则又恢复为 v_0，所以偶极矩也不可能从光脉冲得到能量. 这说明，从理论上讲，2π 光脉冲在二能级吸收介质中的损耗为零. 若用于数字式通信，这种光通信的损耗为零，因此可实现超远距离光通信.

(4) 光脉冲在增益介质中的传播

光脉冲在增益介质中沿 z 传播时，相当于光脉冲在吸收介质中沿 $-z$ 方向传播.

例如，$w_0=1$ 时，在形式上可写成

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}z}&=\frac{\alpha}{2}\sin A\\ \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}(-z)}&=-\frac{\alpha}{2}\sin A\end{aligned}\right\}\tag{9.27}$$

因此在图 9.3 中，沿 $-z$ 方向看图，就表示光脉冲在增益介质中的传播规律. 这时，π 的偶数倍的脉冲是不稳定的. π 的奇数倍的脉冲是稳定的. 例如：$A(0)=1.9\pi$ 的脉冲在增益介质中传播时面积变为 π.

(5) 脉冲的分裂

最后还应指出，面积定理并不能区分 2π，4π，6π 等脉冲. 进一步的研究表明，在吸收介质中，只有 2π 脉冲是稳定的，而 4π，6π 等脉冲都是不稳定的. 4π，6π 等脉冲，在吸收介质中传播时分别分裂为两个 2π 脉冲和 3 个 2π 脉冲，见图 9.4 和图 9.5. 用计算机求解 M－B 方程得到的脉冲分裂情况与实验一致.

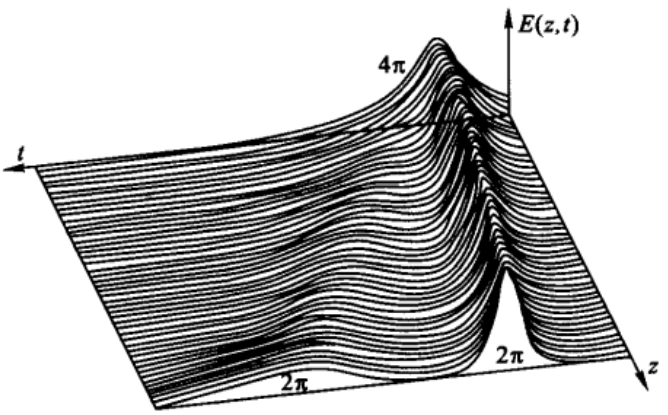


图 9.4 4π 脉冲分裂为两个 2π 脉冲(计算机模拟)

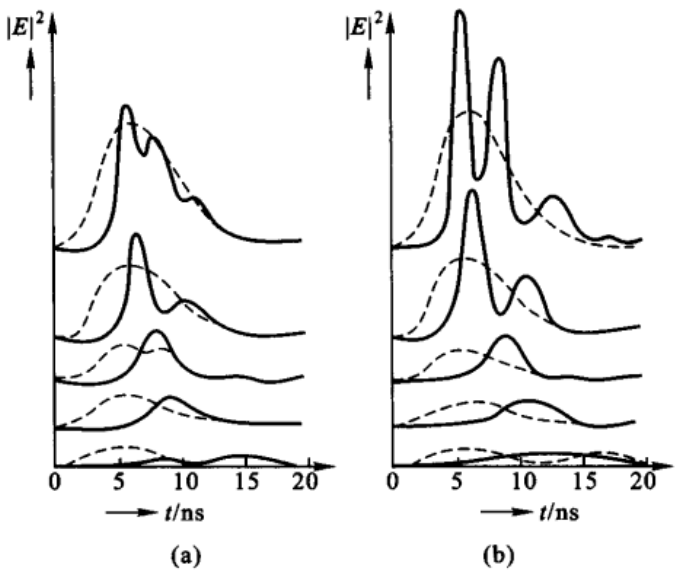


图 9.5 汞激光脉冲在铷蒸气中的自感透明引起的脉冲分裂. 虚线是输入脉冲，是现实输出脉冲

(a)试验结果 (b)理论计算结果

(6) 零 π 脉冲或零面积脉冲

光脉冲面积可以是正值、负值和零. 但是零 π 脉冲并不分裂为 2π 脉冲和 −2π 脉冲. 零 π 脉冲是稳定的，可看成 2π 与 −2π 脉冲的束缚态，如图 9.6 所示. 有人由此推测，基本粒子的稳定性也可能用类似的非线性作用解释.

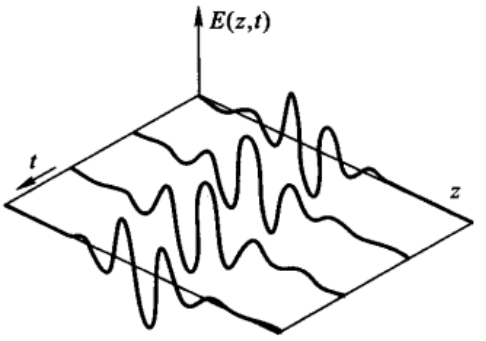


图 9.6 零 π 脉冲不分裂

9.4 2π 双曲正割脉冲

为说明自感透明的脉冲形状以及脉冲之间的“碰撞”，必须求解 M-B 方程. 本节首先证明 SIT 脉冲是 2π 面积的双曲正割脉冲，然后说明两个 2π 脉冲对撞后的形状不变.

9.4.1 u, v, w 的分解

我们还是从麦克斯韦-布洛赫方程出发，

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\Delta\omega v$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\Delta\omega u+\frac{\mu E}{\hbar}\omega$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}=-\frac{\mu E}{\hbar}v$$

$$\frac{\partial E}{\partial z}+\frac{n}{c}\frac{\partial E}{\partial t}=\left(\frac{c\mu_0\omega}{2n}N'\mu\right)\times\int_{-\infty}^{\infty}v(\Delta\omega,z,t)g(\Delta\omega)\mathrm{d}(\Delta\omega) \tag{9.28}$$

$$\xi=t-z/v \tag{9.29}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}&=\frac{\partial}{\partial\xi}\\ \frac{\partial}{\partial z}&=\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}=-\frac{1}{V}\frac{\partial}{\partial\xi}\end{aligned}\right\} \tag{9.30}$$

方程(9.28)变为

$$\left[\frac{\partial}{\partial z}+\frac{n}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right]E=\left[-\frac{1}{V}+\frac{n}{c}\right]\frac{\partial}{\partial\xi}E$$

$$=\left(\frac{c\mu_0\omega}{2n}N'\mu\right)\int_{-\infty}^{\infty}v(\Delta\omega,\xi)g(\Delta\omega)\mathrm{d}(\Delta\omega) \tag{9.31}$$

为了求解 M－B 方程，这里采用一个技巧. 令

$$v(\Delta\omega,z,t)=v(\Delta\omega,\xi)=v(0,\xi)f(\Delta\omega) \tag{9.32}$$

这样就可以求出 M－B 方程的解析解. 按(9.32)式将 $v(\Delta\omega,\xi)$ 分解为两个因子相乘，不只是分离变量的数学技巧，而是有一定的物理原因的. (9.32)式反映了这样的事实：不同频率($\Delta\omega=\bar{\omega}-\omega$ 不同)的原子对光场的响应是一样的(都是 $v(0,\xi)$)，但是不同频率的原子对极化强度 $v(\Delta\omega,\xi)$ 的贡献的振幅不同，这个振幅就是 $f(\Delta\omega)$. 如果考虑到共振时 $\Delta\omega=0$，(9.32)式变为

$$v(0,\xi)=v(0,\xi)f(0) \tag{9.33}$$

所以

$$f(0)=1 \tag{9.34}$$

因此(9.32)式也可以解释为：非共振作用的原子对光场的响应，等于共振作用的原子对光场的响应乘以与失谐量有关的函数 $f(\Delta\omega)$.

将 $E=E(\xi)$ 和 $v=v(\Delta\omega,\xi)=v(0,\xi)f(\Delta\omega)$ 代入麦克斯韦方程，(9.31)式变为

$$\left[-\frac{1}{V}+\frac{n}{c}\right]\dot{E}=\left[\frac{c\mu_0\omega}{2n}N'\mu\right]v(0,\xi)\times\int_{-\infty}^{\infty}g(\Delta\omega)f(\Delta\omega)\mathrm{d}(\Delta\omega) \tag{9.35}$$

$$a\dot{E}=-v(0,\xi) \tag{9.36}$$

$$a=-\left[-\frac{1}{V}+\frac{n}{c}\right]\Big/\left\{\left[\frac{c\mu_0\omega}{2n}N'\mu\right]F\right\} \tag{9.37}$$

$$F\equiv\int_{-\infty}^{\infty}g(\Delta\omega)f(\Delta\omega)\mathrm{d}(\Delta\omega) \tag{9.38}$$

利用(9.30)和(9.36)式，可把布洛赫方程 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 和 $\frac{\partial w}{\partial t}$ 写为

$$\begin{aligned}\dot{u}&=\frac{\partial u}{\partial\xi}=-(\Delta\omega)v(\Delta\omega,\xi)\\&=-(\Delta\omega)f(\Delta\omega)v(0,\xi)\\&=(\Delta\omega)af(\Delta\omega)\dot{E}\end{aligned} \tag{9.39}$$

$$\dot{w}=-\frac{\mu}{\hbar}Ev(\Delta\omega,\xi)=\left(\frac{\mu}{\hbar}\right)af(\Delta\omega)\dot{E} \tag{9.40}$$

这样，利用 $v(\Delta\omega,\xi)=v(0,\xi)f(\Delta\omega)$ 把 M－B 方程变为(9.36)，(9.39)和(9.40)式的形式，其中的 $\dot{E},\dot{u},\dot{w}$ 是对 ξ 求导数.

9.4.2 M－B 方程的求解

为了对方程(9.36)，(9.39)和(9.40)进行积分，我们选取如下的初始条件

$$\lim_{\xi\to\infty}u(\Delta\omega,\xi)=\lim_{\xi\to\infty}v(\Delta\omega,\xi)=\lim_{\zeta\to\infty}E(\xi)=0 \tag{9.41}$$

$$\lim_{\xi\to-\infty}w(\Delta\omega,\xi)=w_0 \tag{9.42}$$

这些初始条件表明，在初始时（相当于 $t\to-\infty$）没有极化，粒子数的分布是 $w_0=\pm1$.

利用这些初始条件，可对(9.39)和(9.40)式两边积分

$$\int_{-\infty}^{\xi}\frac{\partial u}{\partial\xi}\mathrm{d}\xi=u(\Delta\omega,\xi)=(\Delta\omega)af(\Delta\omega)E(\xi) \tag{9.43}$$

$$\int_{-\infty}^{\xi}\frac{\partial w}{\partial\xi}\mathrm{d}\xi=w(\Delta\omega,\xi)-w_0=\frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\hbar}\right)af(\Delta\omega)E^2(\xi) \tag{9.44}$$

在(9.44)式中用到了 $E\dot{E}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}[E^2(\xi)]$. 注意，(9.43)和(9.44)式表明，$u(\Delta\omega,\xi)$和 $w(\Delta\omega,\xi)$也包含因子 $f(\Delta\omega)$.

共振时

$$\left.\begin{aligned}\Delta\omega&=0\\ \frac{\partial u}{\partial\xi}&=0\\ u(0,\xi)&=0\end{aligned}\right\} \tag{9.45}$$

$u(0,\xi)=0$ 表明共振时的布洛赫矢量(u,v,w)是在(v,w)平面内. 利用共振作用时布洛赫矢量的长度不变即，$u^2+v^2+w^2=1$，我们可求出 v 和 w：

$$v(0,\xi)=w_0\sin\theta(\xi) \tag{9.46}$$

$$w(0,\xi)=w_0\cos\theta(\xi) \tag{9.47}$$

这就是前面得到的共振解(9.4)和(9.5).

注意共振时 $f(0)=1$，(9.44)式变为

$$w(0,\xi)-w_0=\frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\hbar}\right)aE^2(\xi) \tag{9.48}$$

再利用(9.47)式，则由(9.48)式得到光场平方 $E^2(\xi)$：

$$\begin{aligned}aE^2(\xi)&=2\left(\frac{\mu}{\hbar}\right)^{-1}[w(0,\xi)-w_0]\\ &=2\left(\frac{\mu}{\hbar}\right)^{-1}w_0[\cos\theta(\xi)-1]\end{aligned} \tag{9.49}$$

对吸收介质 $w_0=-1$，(9.49)式变为

$$aE^2(\xi)=2\left(\frac{\mu}{\hbar}\right)^{-1}(1-\cos\theta)=4\left(\frac{\mu}{\hbar}\right)^{-1}\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{9.50}$$

这样可将(9.50)式两边开方

$$\sqrt{a}E(\xi)=2\sqrt{\frac{\hbar}{\mu}}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{9.51}$$

$$E(\xi)=2\sqrt{\frac{\hbar}{\mu a}}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{9.52}$$

由于

$$\left.\begin{aligned}\theta&=\frac{\mu}{\hbar}\int_{-\infty}^{\xi}E\mathrm{d}t'\\ E&=\frac{\hbar}{\mu}\dot{\theta}\end{aligned}\right\} \tag{9.53}$$

利用(9.53)和(9.54)式,得到如下的单摆方程

$$\frac{\dot{\theta}}{2}=\frac{1}{\tau}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{9.54}$$

$$\tau=\left(\frac{a\hbar}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{9.55}$$

将(9.54)式积分

$$\int\frac{\mathrm{d}(\theta/2)}{\sin\theta}=\int\frac{1}{\tau}\mathrm{d}\xi=\frac{1}{\tau}\xi \tag{9.56}$$

$$\ln\left|\tan\left(\frac{\theta}{4}\right)\right|=\frac{1}{\tau}\xi \tag{9.57}$$

$$\frac{\theta}{4}=\arctan(\mathrm{e}^{\xi/\tau}) \tag{9.58}$$

其中 $\theta=4\arctan(\mathrm{e}^{\xi/\tau})$,故有

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)=\mathrm{sech}(\xi/\tau) \tag{9.59}$$

将(9.59),(9.54)式代入方程(9.53)则得到光场

$$\begin{aligned}E(\xi)&=\frac{1}{(\mu/\hbar)\tau}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\\&=\frac{1}{(\mu/\hbar)\tau}\mathrm{sech}\left[\frac{t-z/v}{\tau}\right]\end{aligned} \tag{9.60}$$

(9.60)式表明光脉冲的形状是双曲正割函数(hyperbolic secant).可以证明(9.60)式的脉冲的面积正巧是 2π,即它是 2π 脉冲,见图 9.7.

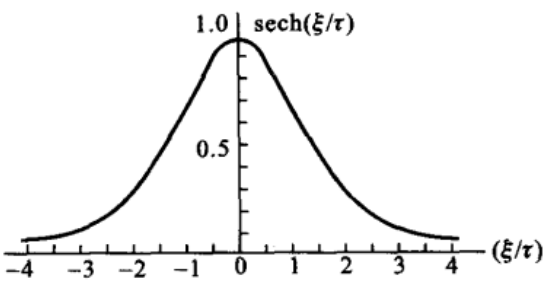


图 9.7 双曲正割函数

9.4.3 M－B方程的非共振解

非共振时，$\Delta\omega\neq 0$，但 $E(\xi)$与 $\Delta\omega$ 无关. 由于(9.46)式给出的 $v(0,\xi)$，可求出 $v(\Delta\omega,\xi)$

$$\left.\begin{aligned} v(0,\xi)&=w_0\sin\theta\\ v(\Delta\omega,\xi)&=v(0,\xi)f(\Delta\omega)=w_0 f(\Delta\omega)\sin\theta\end{aligned}\right\} \tag{9.61}$$

类似地，利用(9.52)，(9.55)式，则 $u(\Delta\omega,\xi)$和 $w(\Delta\omega,\xi)$的表达式(9.43)和(9.44)式变为

$$\begin{aligned} u(\Delta\omega,\xi)&=(\Delta\omega)af(\Delta\omega)E(\xi)\\ &=(\Delta\omega)af(\Delta\omega)2\sqrt{\frac{\hbar}{\mu a}}\sin\frac{\theta}{2}\\ &=2(\Delta\omega)\tau f(\Delta\omega)\sin\frac{\theta}{2}\end{aligned} \tag{9.62}$$

$$\begin{aligned} w(\Delta\omega,\xi)-w_0&=\frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\hbar}a\right)f(\Delta\omega)E^2\\ &=2f(\Delta\omega)\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\end{aligned} \tag{9.63}$$

将(9.61)，(9.62)和(9.63)式代入布洛赫矢量长度不变的公式 $u^2+v^2+w^2=1$ 可得到

$$f(\Delta\omega)=\frac{1}{1+\tau^2(\Delta\omega)^2} \tag{9.64}$$

因此 $f(\Delta\omega)$是洛伦兹函数，半宽度是 $\Delta\omega=\frac{1}{\tau}$.

将(9.64)式代回 u,v,w 的公式(9.61)，(9.62)及(9.63)，并注意初条件 $w_0=-1$，则

$$u(\Delta\omega,z,t)=\frac{2(\Delta\omega)\tau}{1+\tau^2(\Delta\omega)^2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{9.65}$$

$$v(\Delta\omega,z,t)=\frac{-1}{1+\tau^2(\Delta\omega)^2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{9.66}$$

$$w(\Delta\omega,z,t)=\frac{2}{[1+\tau^2(\Delta\omega)^2]}\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{9.67}$$

$$E(z,t)=\frac{2}{(\mu/\hbar)\tau}\operatorname{sech}\left[\frac{t-z/v}{\tau}\right] \tag{9.68}$$

(9.65)～(9.68)的特点在于：

(1) 非共振时，光脉冲形状也是双曲正割形式.

(2) u 是 $\Delta\omega$ 的奇函数，v 和 w 是 $\Delta\omega$ 的偶函数. 在证明面积定理时，曾用到 u,v 和 w 的这种奇偶特性.

9.4.4 自感透明的脉冲传播速度

由(9.37),(9.38)和(9.64)式,则得到光脉冲传播速度的倒数

$$\frac{1}{V}=\frac{n}{c}+\left[\frac{c\mu_0\omega}{2n}N'\mu\right]aF$$

$$=\frac{n}{c}+\left[\frac{c\mu_0\omega}{2n}N'\mu\right]\left(\frac{\mu}{\hbar}\tau^2\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(\Delta\omega)}{1+\tau^2(\Delta\omega)^2}\mathrm{d}(\Delta\omega) \tag{9.69}$$

这说明光脉冲在共振吸收介质中传播的速度 V 可以远小于光在该介质中的相速度(c/n).

特别考虑非均匀加宽的线宽($\Delta\omega_a$)远大于 τ^{-1} 时

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(\Delta\omega)}{1+\tau^2(\Delta\omega)^2}\mathrm{d}(\Delta\omega)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+\tau^2(\Delta\omega)^2}\frac{\Delta\omega_a}{2\pi\left[(\Delta\omega)^2+\left(\frac{\Delta\omega_a}{2}\right)^2\right]}\mathrm{d}(\Delta\omega)$$

$$\approx g(0)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+\tau^2(\Delta\omega)^2}\mathrm{d}(\Delta\omega)$$

$$=g(0)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\tau}\frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{\pi}{\tau}g(0) \tag{9.70}$$

将(9.70)式代入方程(9.69),则

$$\frac{1}{V}=\frac{n}{c}+\frac{1}{2}a\tau \tag{9.71}$$

其中 α 是小信号吸收系数,见式(9.20).用 Ru 的原子蒸气作为吸收介质($T_2^*=0.8$ ns,$T_2=28$ ns),用汞激光脉冲,Gibbs 等人测量到 $v\approx c_0/5000$.

对增益介质 $\alpha<1$,脉冲尖峰的速度 $v>c_0/n$.

9.5 自感透明的正弦-戈登方程

下面将描述自感透明的 M-B 方程写成正弦-戈登方程(sine-gordon 方程).这样便可直接利用孤立子的数学理论来研究它的性质.

如上节所述,令 $\xi=t-z/v$,$\eta=t$,可将麦克斯韦方程写成(9.36)式,或者

$$\frac{\partial}{\partial\xi}E=-\frac{1}{a}v(0,\xi) \tag{9.72}$$

将 $v(0,\xi)$的公式(9.46)代入上式,并考虑 $w_0=-1$,则

$$\frac{\partial}{\partial\xi}E=\frac{1}{a}\sin\theta \tag{9.73}$$

将上式两边乘以$(\mu/\hbar)$并从$-\infty$到t积分，利用θ的定义，则

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\theta=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{t}\sin\theta\mathrm{d}t' \tag{9.74}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}\theta=\frac{\mu}{a\hbar}\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{t}\sin\theta\mathrm{d}t' \tag{9.75}$$

注意$\sin\theta|_{-\infty}=0$，则得到正弦-戈登方程

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}\theta&=a'\sin\theta\\ a'&=\left(\frac{\mu}{a\hbar}\right)\end{aligned}\right\} \tag{9.76}$$

由孤立子理论可知，正弦-戈登方程的一个特解就是(9.60)式表示的双曲正割函数.

对数学感兴趣的读者可参考孤立子理论的一个公式(贝克隆变换)：若u_0是正弦-戈登方程的一个解，则u_1也是它的一个解，u_1由下式求出

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{u_1-u_0}{2}\right)&=a'\sin\left(\frac{u_1+u_0}{2}\right)\\ \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{u_1+u_0}{2}\right)&=\frac{1}{a'}\sin\left(\frac{u_1-u_0}{2}\right)\end{aligned}\right\} \tag{9.77}$$

显然，$\theta_0=2\pi$是正弦-戈登方程(9.76)的一个解，将$u_0=\theta_0=2\pi$代入(9.77)式，可求出$u_1=\theta_1$，利用光场E与θ的关系式(9.53)，便得到$E(\xi)$，即(9.60)式所示的双曲正割函数.

9.6 光纤中孤立子的形成机理

光学孤立子对光纤通信有重要意义. 普通光纤通信必须每隔几十km设一中继站，对信号脉冲进行整形、放大、检查误码、再发射. 用孤立子的光纤通信可以不用中继站. 只要对光纤损耗进行增益补偿，即可把光信号无畸变地传输极远距离. 美国已演示了将孤立子在光纤中传播10^4 km的实验，这可能对通信技术产生革命性影响.

9.6.1 通信光纤的色散

光脉冲在光纤中传输时，若色散与非线性适当平衡或抵消，即可形成光学孤立子.

图9.8表示光通信用的单模光纤(石英光纤)的损耗与色散. 对波长$\lambda=1.3\ \mu$m的光，色散为零. 当$\lambda>1.3\ \mu$m时，为负色散. 光纤孤立子实验

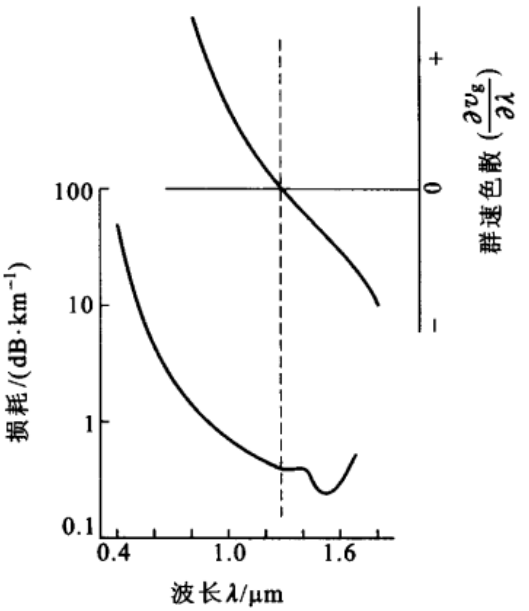


图 9.8 单模石英光纤的损耗与色散

多用负色散. 石英光纤的损耗最低点在 $\lambda=1.54\ \mu m$ 左右. 用特种技术制造的色散位移光纤，零色散点移至 $\lambda\approx1.54\ \mu m$.

众所周知，对于正色散(正常色散)，波长 λ 越长，则群速 v_g 越大，即

$$\left.\begin{aligned}\frac{dv_g}{d\lambda}>0\\ \frac{dv_g}{d\omega}<0\end{aligned}\right\} \tag{9.78}$$

反之，对负色散(反常色散)，波长 λ 越长，群速 v_g 越小，即

$$\left.\begin{aligned}\frac{dv_g}{d\lambda}<0\\ \frac{dv_g}{d\omega}>0\end{aligned}\right\} \tag{9.79}$$

令光脉冲在光纤中的传播常数为 β. 将 β 在光信号载波频率 ω_0 附近展开，

$$\beta(\omega)=\beta(\omega_0)+\beta'(\omega-\omega_0)+\frac{1}{2}\beta''(\omega-\omega_0)^2 \tag{9.80}$$

其中 $\beta'=\left[\frac{d\beta}{d\omega}\right]_{\omega=\omega_0}$，$\beta''=\left[\frac{d^2\beta}{d\omega^2}\right]_{\omega=\omega_0}$ 由群速 v_g 的定义，有

$$\frac{1}{v_g}=\frac{d\beta}{d\omega}=\beta'+\beta''(\omega-\omega_0) \tag{9.81}$$

其中用到了(9.80)式. 当 $\omega=\omega_0$ 时，

$$\beta'=\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\omega}\Big|_{\omega=\omega_0}=\frac{1}{v_g(\omega_0)} \tag{9.82}$$

$$\beta''=\frac{\mathrm{d}^2\beta}{\mathrm{d}\omega^2}\Big|_{\omega=\omega_0}=\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left(\frac{1}{v_g}\right)\right]_{\omega=\omega_0} \tag{9.83}$$

由(9.83)式可知

$$\beta''=-\frac{1}{v_g^2}\frac{\mathrm{d}v_g}{\mathrm{d}\omega}\Big|_{\omega=\omega_0} \tag{9.84}$$

由于正色散的$\mathrm{d}v_g/\mathrm{d}\omega<0$，负色散的$\mathrm{d}v_g/\mathrm{d}\omega>0$，所以$\beta''>0$代表正色散，而$\beta''<0$代表负色散.

常用的色散参数$\mathscr{D}$定义为

$$\left.\begin{aligned}\mathscr{D}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\frac{1}{v_g}\right)\Big|_{\lambda=\lambda_0}\\ \mathscr{D}&=\left[\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left(\frac{1}{v_g}\right)\right]\Big|_{\lambda=\lambda_0}=-\frac{2\pi c}{\lambda_0^2}\beta''\end{aligned}\right\} \tag{9.85}$$

显然，正色散的$\mathscr{D}<0$，负色散的$\mathscr{D}>0$. 例如，对$\lambda=1.32\ \mu\mathrm{m}$的光，石英光纤的$\mathscr{D}\approx5\ \mathrm{ps/km\cdot nm}$. 读者不难验证$\mathscr{D}$的量纲.

色散对光脉冲在光纤中的传输影响很大. 这是因为，对光脉冲做频谱分析可知，它包含许多不同频率成分，光纤色散使得不同频率成分的传输速率不同. 因此，光脉冲在光纤中传输时，色散使光脉冲的脉宽展宽. 为了在光纤中形成孤立子，必须设法利用光纤的非线性，使脉冲变窄，从而与色散效应抗衡.

9.6.2 光纤的非线性

光纤的非线性折射率(克尔效应)为

$$\left.\begin{aligned}n&=n_0+n_2I\\ n&=n_0+n'_2\langle E^2\rangle\end{aligned}\right\} \tag{9.86}$$

其中I是光强，$\langle E^2\rangle$表示E^2对时间求平均. 若E为$E_0(z,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$，可以证明$\langle E^2\rangle=\frac{1}{2}|E_0|^2$，见本章习题(6). 石英光纤$n_2>0$，$n^2\approx8.2\times10^{-20}\ \mathrm{m^2/W}$.

光脉冲在光纤中传输长度为l，则位相移动为

$$\Delta\phi=\frac{2\pi}{\lambda_0}n_2Il \tag{9.87}$$

这种效应称为自位相调制 SPM(self-phase modulation)，即光脉冲在介质中传播时，因光脉冲自己的光场引起介质折射率变化，从而引起光脉冲波包的位相变化. 虽然光纤的n_2不大，但光纤长度很长，光纤中有显著的非线性效应.

自位相调制引起的频率移动为

$$\delta\omega=-\frac{\partial(\Delta\phi)}{\partial t}=-\frac{2\pi}{\lambda_0}n_2 l\frac{\partial I}{\partial t} \tag{9.88}$$

在实验室坐标系内(坐标为 z,t),光脉冲前沿的$\frac{\partial I}{\partial t}>0$,$\delta\omega<0$;后沿的$\frac{\partial I}{\partial t}<0$,$\delta\omega>0$. 对于负色散情况,$\partial v_g/\partial\omega>0$,所以脉冲前沿速度变慢,而后沿速度加速. 因此使脉宽变窄. 这种效应称为光脉冲的自位相调制压缩. $\delta\omega$ 随时间的这种变化,称为啁啾(chirp). 啁啾用于形容小鸟鸣叫的声音,其音调有滑音,即频率随时间 t 升高或降低. 花腔女高音的滑音亦如此.

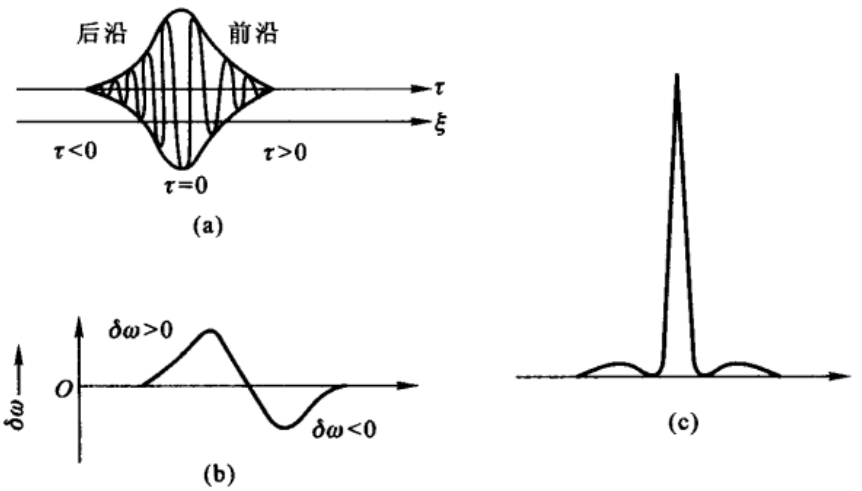


图 9.9 光纤对光脉冲的压缩

在 $\tau=(t-z/v_g)$ 和 $\xi=z$ 的坐标系中,即设想读者"骑在"光脉冲的峰顶,以速度 v_g 前进. 他看到的光脉冲包络如图 9.9(a)所示. 这时频率为

$$\delta\omega=\frac{\partial(\Delta\phi)}{\partial t} \tag{9.89}$$

(9.89)与(9.88)式的正负号的差别,来自光脉冲随 t 的变化(前沿对应的 t 小,后沿对应的 t 大)与图 9.9(a)光脉冲随 τ 的变化不同(前沿对应的 τ 大,后沿对应的 τ 小). 在图 9.9(b)中,光脉冲前沿$\frac{\partial I}{\partial t}>0$,$\delta\omega<0$;后沿$\frac{\partial I}{\partial t}<0$,$\delta\omega>0$,即前沿频率降低,而后沿频率升高. 由于负色散的$\partial v_g/\partial\omega>0$,故前沿速度降低,后沿速度升高,即脉宽变窄. 见图 9.9(b)和(c).

9.6.3 光纤中孤立子的形成

当光脉冲在光纤中传输时,若非线性与色散效应平衡,即可形成光学孤立子,称为基阶孤立子,若非线性效应超过色散,便形成更复杂的高阶

孤立子. 由于非线性折射率与光强有关,因此只有光脉冲光强超过一定阈值时才能形成孤立子. 显然,在光纤的零色散点附近,负色散效应小,光脉冲的光强很低时就可使非线性与色散达到平衡,故容易形成孤立子.

9.7 光纤中孤立子的非线性薛定谔方程

将光纤的色散效应与非线性效应代入麦克斯韦方程,便可得到光纤中孤立子的非线性薛定谔方程,即 NLS.

9.7.1 色散介质中的双曲方程

首先推导在色散介质中的一维麦克斯韦方程,然后再给出有色散的非线性介质中的非线性薛定谔方程.

从色散介质的一维波动方程出发,有

$$\frac{\partial^2 E(z,t)}{\partial z^2}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 E(z,t)}{\partial t^2}=\mu\frac{\partial^2 P(z,t)}{\partial t^2} \tag{9.90}$$

其中 $P(z,t)$是有色散的线性介质. 将 $E(z,t)$写成

$$E(z,t)=\mathrm{Re}E_0(z,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\omega_0 t-\beta(\omega_0)z]} \tag{9.91}$$

其中 ω_0 是载波频率或信号的中心频率(例如入射激光的频率),$\beta(\omega_0)$是对载波频率的传播常数,$E_0(z,t)$是慢变振幅(复数).

下面将方程变到频域(做傅里叶变换). 先把极化强度 $P(z,t)$写成

$$P(z,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}P(z,\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{9.92}$$

在频域中的线性极化强度与极化率的关系为

$$P(z,t)=\varepsilon_0\chi(\omega)E(z,\omega) \tag{9.93}$$

其中 $E(z,\omega)$是 $E(z,t)$的傅里叶变换.

由上述定义及傅里叶变换公式,可知

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 P(z,t)}{\partial t^2}&=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\omega^2 P(z,\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega\\&=-\frac{\varepsilon_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\omega^2\chi(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega\int_{-\infty}^{\infty}E(z,t')\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\omega t'-\beta(\omega_0)z]}\mathrm{d}t'\end{aligned} \tag{9.94}$$

由于考虑的是色散介质,将上式中的 $\omega^2\chi(\omega)$在 ω_0 附近展开,

$$\begin{aligned}\omega^2\chi(\omega)\approx\omega_0^2\chi(\omega_0)&+\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}[\omega^2\chi(\omega)]\right\}(\omega_0-\omega)\\&+\left\{\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\omega^2}[\omega^2\chi(\omega)]\right\}(\omega_0-\omega)^2+\cdots\end{aligned} \tag{9.95}$$

其中的导数应取 $\omega=\omega_0$ 的值. 将(9.95)式代入(9.94)式,再求积分. 为了计算(9.94)式的积分,需利用下列等式

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega_0-\omega)(t-t')}\,d\omega=\delta(t-t')=\delta(t'-t)\\
&\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\omega-\omega_0)e^{i(\omega_0-\omega)(t-t')}\,d\omega=i\delta^{(1)}(t-t')\\
&\quad=-i\delta^{(1)}(t'-t)\\
&\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\omega-\omega_0)^2 e^{i(\omega_0-\omega)(t-t')}\,d\omega=-\delta^2(t-t')\\
&\quad=-\delta^2(t'-t)
\end{aligned}\right\}\tag{9.96}$$

其中的 $\delta^{(n)}(t)$ 是狄拉克函数 $\delta(t)$ 的 n 次导数. $\delta^{(n)}(t)$ 有下面的性质

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta^{(n)}(t-t_0)f(t)\,dt=\frac{d^n f(t)}{dt^n}\Big|_{t=t_0}\tag{9.97}$$

其中 $f(t)$ 是任意函数.

此外,利用关系式

$$\left.\begin{aligned}
&\beta^2(\omega)=\omega^2\mu_0\varepsilon_0+\mu_0\varepsilon_0\omega^2\,\chi(\omega)\\
&2\beta\frac{d\beta}{d\omega}=2\omega\mu_0\varepsilon_0+\mu_0\varepsilon_0\frac{d}{d\omega}[\omega^2\,\chi(\omega)]\\
&\left(\frac{d\beta}{d\omega}\right)^2+\beta\frac{d^2\beta}{d\omega^2}=\mu_0\varepsilon_0+\frac{\mu_0\varepsilon_0}{2}\frac{d^2}{d\omega^2}[\omega^2\,\chi(\omega)]
\end{aligned}\right\}\tag{9.98}$$

应特别注意群速 $v_g(\omega_0)$ 的公式(9.82),即

$$\frac{1}{v_g(\omega_0)}=\left[\frac{d\beta(\omega)}{d\omega}\right]_{\omega=\omega_0}\tag{9.99}$$

最后,再利用慢变振幅近似即 $\left|\frac{\partial^2}{\partial z^2}E_0(z,t)\right|\ll\frac{1}{\lambda_0}\left|\frac{\partial E_0(z,t)}{\partial z}\right|$. 这样,把上述关系式及近似条件代入(9.90)式,则

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}+\frac{1}{v_g}\frac{\partial}{\partial t}-i\frac{\beta''}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)E_0(z,t)=0\tag{9.100}$$

其中的 v_g 和 $\beta(\omega)$ 的二次导数 β'',都取 $\omega=\omega_0$ 的值.

方程(9.100)即著名的双曲方程. 这是研究光脉冲在有色散的线性介质(或传输线)中传播的基本方程. 由此可解释超短脉冲在传播中的脉宽压缩及最佳压缩的介质长度,以及用光栅作为色散元件对超短脉冲的压缩.

9.7.2 非线性薛定谔方程(NLS)

注意(9.95)式,$\omega^2\,\chi(\omega)$ 与光强无关,只有色散,所以方程(9.100)只能描述超短脉冲传播的线性理论. 对于非线性介质的情况,$\chi(\omega)$ 还与光

强有关. 为了推导超短脉冲传播的非线性理论，必须考虑 $P(z,t)$ 或 $\chi(z,t)$ 与传播常数 β 的非线性.

对于克尔介质(例如光纤材料即有克尔效应)，将 β 在频域展开为

$$\beta(\omega)=\beta(\omega_0)+\beta_2\langle E^2\rangle+\beta'(\omega_0)(\omega-\omega_0)+\frac{1}{2}\beta''(\omega_0)(\omega-\omega_0)^2+\cdots \tag{9.101}$$

其中 β' 和 β'' 分别是 β 对 ω 的一阶和二阶导数. 显然此式与(9.95)式比较，增加了非线性项 $\beta_2\langle E^2\rangle$. 因此，在非线性介质中 β 既是 ω 的函数，又是光场 E 的函数.

其余的推导步骤与前面的情况相似. 考虑光信号的形式为

$$E(z,t)=E_0(z,t)\exp\{\mathrm{i}[\omega_0 t-\beta(\omega_0)z]\} \tag{9.102}$$

它沿 $+z$ 方向传播. $E_0(z,t)$ 仍是慢变振幅. 将 $E_0(z,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}$ 做傅里叶变换，可得到在频域的光场 $E_0(z,\omega)$ 的公式. 令 $E_0(z,\omega)$ 的每个频率分量传播一段距离 $\mathrm{d}z$，利用(9.101)式，可得到 $E_0(z+\mathrm{d}z,\omega)$. 再把它从频域变换到时域，则得到在 $(z+\mathrm{d}z)$ 处的光场.

$$E_0(z+\mathrm{d}z,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\Delta\omega\int_{-\infty}^{\infty}E_0(z,t')\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta\omega(t-t')}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta\beta\Delta z}\mathrm{d}t' \tag{9.103}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&\Delta\beta=\beta(\omega)-\beta(\omega_0)=\beta_2\langle E^2\rangle+\beta'\Delta\omega+\frac{1}{2}\beta''(\Delta\omega)^2\\&\Delta\omega=\omega-\omega_0\end{aligned}\right\} \tag{9.104}$$

由(9.103)式得到

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial z}E_0(z,t)=[E_0(z+\Delta z,t)-E_0(z,t)]/\Delta z\\&\qquad=-\mathrm{i}\Delta\beta E_0(z,t)\\&\frac{\partial}{\partial t}E_0(z,t)=\mathrm{i}\Delta\omega E_0(z,t)\\&\frac{\partial}{\partial t^2}E_0(z,t)=-(\Delta\omega)^2E_0(z,t)\end{aligned}\right\} \tag{9.105}$$

在推导其中的第一式时用到了 $\exp(-\mathrm{i}\Delta\beta\Delta z)\approx 1-\mathrm{i}\Delta\beta\Delta z$.

由(9.105)式可知

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}+\beta'\frac{\partial}{\partial t}-\mathrm{i}\frac{\beta''}{2}\frac{\partial}{\partial t^2}\right)E_0(z,t)=\left[-\mathrm{i}\Delta\beta+\mathrm{i}\beta'\Delta\omega+\mathrm{i}\frac{\beta''}{2}(\Delta\omega)^2\right]E_0(z,t) \tag{9.106}$$

将(9.104)式的 $\Delta\beta$ 代入上式，则有

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}+\beta'\frac{\partial}{\partial t}-\mathrm{i}\frac{\beta''}{2}\frac{\partial}{\partial t^2}\right)E_0(z,t)=-\mathrm{i}\beta_2\langle E^2\rangle E_0(z,t) \tag{9.107}$$

对于正弦信号，有$\langle E^2\rangle=\frac{1}{2}|E_0|^2$，故有

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}+\beta'\frac{\partial}{\partial t}-\mathrm{i}\frac{\beta''}{2}\frac{\partial}{\partial t^2}+\mathrm{i}\frac{\beta_2}{2}|E_0|^2\right)E_0(z,t)=0 \tag{9.108}$$

这就是非线性薛定谔方程. 它与有非线性势的薛定谔方程相似，只不过将 z 和 t 位置互换. 非线性薛定谔方程除了描述光纤中的孤立子之外，还可描述深水波的传播、等离子体中的离子声波、超导体等.

最后，请注意方程中的 β'、β''和 β_2，即 β'是群速的倒数；β''与群速色散有关，$\beta''<0$ 对应负色散，$\beta''>0$ 对应正色散. 下面主要研究负色散情况. β_2 则由介质的非线性决定. 对于有克尔效应的光学介质.

$$\left.\begin{aligned} n&=n_0+n'_2\langle E^2\rangle=n_0+\frac{1}{2}n'_2|E_0^2| \\ \beta_2&=\frac{2\pi}{\lambda}n'_2=\frac{\omega}{c}n'_2 \end{aligned}\right\} \tag{9.109}$$

作如下的变换，可得到量纲为 1 的非线性薛定谔方程

$$\left.\begin{aligned} \xi&=10^{-9}z/\lambda \\ \tau&=\frac{10^{-4.5}}{(-\lambda\beta'')^{1/2}}\left(t-\frac{z}{v_g}\right) \\ u&=10^{4.5}(\pi n_2)^{1/2}E \end{aligned}\right\} \tag{9.110}$$

将(9.110)式代入(9.108)式，当 $\beta''<0$(负色散)，则得到非线性薛定谔方程

$$\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2}+|u|^2u=0 \tag{9.111}$$

其中$\frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2}$是色散项，$|u|^2u$ 是非线性项. 特别注意(9.111)只适用于负色散情况.

若考虑光纤中的损耗，则在(9.108)式右方应有损耗项$-\kappa' E_0(z,t)$. 这样可得到有损耗的 NLS

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2}+|u|^2u=-\mathrm{i}\Gamma u \\ &\Gamma=10^9\lambda\kappa \end{aligned}\right\} \tag{9.112}$$

请注意量纲为 1 参数的物理意义. ξ 是以 $10^9\lambda$(10^9 个波长)作为长度单位，τ 正比于$\left(t-\frac{z}{v_g}\right)$，对应于光脉冲的群速前进时对实验室坐标系的延迟时间. 各个参数的量级为：对于波长 $\lambda=1.3\ \mu\mathrm{m}$，$\xi=1$ 对应 $x=1.3\ \mathrm{km}=$

$10^9\lambda$，$\tau=1$ 意味着 $t\approx1.7$ ps，$u=1$ 相当于光场 $E=2\times10^6$ V/m. 损耗项的数量级为：1 ps 的光场为 10^6 V/m 的光脉冲传输 1 km，若损耗为 0.2 dB/km，则对应于 $\Gamma\approx3\times10^{-2}$.

最后应特别指出，(9.104)只适于 ps(皮秒)的光学孤立子. 对 fs(飞秒)孤立子的 NLS 见(9.125).

9.8 光纤中孤立子的传输性质

本节介绍超短光脉冲在光纤中传输时形成的孤立子的性质.

对于初始条件

$$u(\tau,\xi=0)=A\mathrm{sech}(\tau) \tag{9.113}$$

用逆散射方法可以得到 NLS(9.111)的解. 当 $A=N$(正整数)时，方程的解的形式较简单. 特别当 $A=1$，时，NLS 的解为

$$u(\tau,\xi)=\mathrm{sech}(\tau)\exp(\mathrm{i}\xi/2) \tag{9.114}$$

$N=1$ 时 NLS 的解称为基阶孤立子，$N\geqslant2$ 时称为高阶孤立子.

当 $A=2$ 时，

$$u(\tau,\xi)=2\mathrm{sech}(\tau) \tag{9.115}$$

二阶孤立子的解为

$$u(\tau,\xi)=\frac{4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi/2}(\cosh3\pi+3\mathrm{e}^{\mathrm{i}4\xi})\cosh\tau}{\cosh4\tau+4\cosh2\pi+3\cos4\xi} \tag{9.116}$$

由(9.116)式可知，二阶孤立子的波形是周期性变化的，变化的周期为

$$\xi_s=\pi/2 \tag{9.117}$$

特别在半周期 $\xi=\pi/4$ 时，孤立子主峰两边各有两个明显的小峰.

当 $N=3$ 时，三阶孤立子的形状更复杂些. 图 9.10 表示 $N=1,2,3$ 的三个孤立子的传输特性.

可以证明，NLS 方程对于下列变换具有不变性

$$\left.\begin{aligned}u&=u'/B\\ \tau&=B\tau'\\ \xi&=B^2\xi'\end{aligned}\right\} \tag{9.118}$$

对于初始条件 $A=N=1$，

$$u(\tau,\xi=0)=B\mathrm{sech}(\tau/T_0)$$

NLS(9.111)的解为

$$u(\tau,\xi)=B\mathrm{sech}(\tau/T_0)\exp(\mathrm{i}B^2\xi/2) \tag{9.119}$$

其中 β 是输入到光纤的孤立子脉冲的振幅，T_0 是归一化的脉冲宽度，$T_0=1/B$.

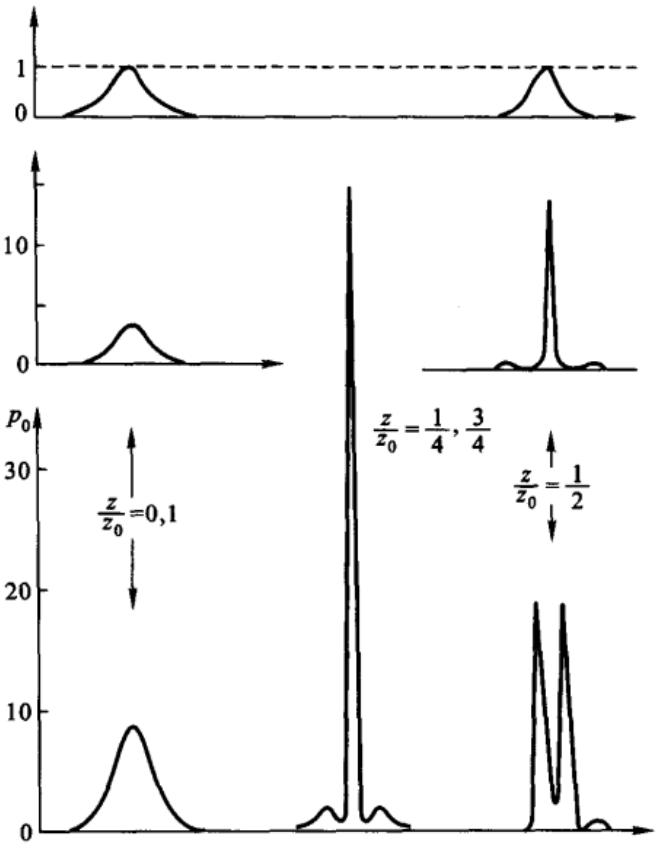


图 9.10 $N=1,2,3$ 的孤立子(z_0 是孤立子"周期")

利用变换(9.118)式再回到实验室坐标系时,基本孤立子的半极大点之间的全宽度(FWHM)为

$$T\approx 1.76T_0 \tag{9.120}$$

基本孤立子的峰值光强($|u|=1$)为

$$I_1=\lambda_0 n_0 c/(16\pi z_0 n_2) \tag{9.121}$$

孤立子周期为

$$z_0=\pi T^2/(2|\beta''|) \tag{9.122}$$

定义孤立子的面积为

$$A_s=(1/\pi)\int_{-\infty}^{\infty}|u|\,\mathrm{d}\tau \tag{9.123}$$

将基本孤立子的公式(9.114)代入上式,可得到

$$A_s=BT_0=1 \tag{9.124}$$

由此可知,基本孤立子"面积"等于振幅 B 与脉宽 T_0 之积,且恒等于 1.这表明,基本孤立子在无损耗的光纤中传播时,脉冲面积不变.

最后还应指出,若输入脉冲(即初值)的 A 不是正整数 N,而是有如下形式的波动

$$A=N+\alpha_0, \quad |\alpha_0|<1/2 \tag{9.125}$$

方程(9.111)的解包括孤立子部分和非孤立子部分.但是当 $\xi\to\infty$ 即传播距离非常远,该解有渐近结构,趋向孤立子解,非孤立子部分很小.

9.9 非线性薛定谔方程的修正

本节考虑光纤损耗、高阶色散、延迟效应以及无规扰动对非线性薛定谔方程的修正.

9.9.1 损耗的影响

当光纤中的损耗很小,满足

$$\Gamma\xi=\kappa z<1 \tag{9.126}$$

可将损耗项看成微扰.用微扰法可得到方程(9.112)的解

$$u(\tau,\xi)=B\mathrm{sech}(B\tau)\exp(\mathrm{i}\theta) \tag{9.127}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} B&=B_0\exp(-2\Gamma\xi)\\ \theta&=(B^2/8\Gamma)[1-\exp(-4\Gamma\xi)]\end{aligned}\right\} \tag{9.128}$$

(9.127)和(9.128)式表明,在低损耗情况下,孤立子的振幅按 $\exp(-2\Gamma\xi)$ 衰减,而脉宽按 $\exp(2\Gamma\xi)$ 展宽、但脉冲面积仍然不变.由此可知,当孤立子在低损耗的光纤内传输时,只要对孤立子补充能量,就可使其恢复形状,从而传输到很远的地方,这已被实验证实(见下节).

9.9.2 高阶色散

至此仅考虑了 β' 和 β'' 的色散项,但是在 β 的展开式(9.101)中,还有 β''',β'''' 等.β''' 以及更高阶的色散,称为高阶色散.

在考虑高阶色散之后,非线性薛定谔方程修正为

$$\mathrm{i}\frac{\partial E}{\partial\xi}-(\beta''/2)\frac{\partial^2E}{\partial\tau^2}+(n_2\beta/n_0)|E|^2E$$
$$-\mathrm{i}(\beta'''/6)\frac{\partial^3E}{\partial\tau^3}+\mathrm{i}2\beta n_2/(\omega_0n_0)\frac{\partial}{\partial\tau}(|E|^2E)=0 \tag{9.129}$$

其中 $\xi=z,\tau=t-\beta'z$.

当

$$\eta\equiv 6\beta''/\omega_0\beta'''\approx 1, \quad \beta'''<0 \tag{9.130}$$

方程(9.127)的解为

$$E=E'_0\mathrm{sech}(\tau/\tau_0)\exp[\mathrm{i}(\mu\xi+v\tau)] \tag{9.131}$$

其中 E_0,τ_0,μ,v 都是 β''' 和 η 的显函数.

后来,Y. Kodawa 等又得到了进一步修正的非线性薛定谔方程

$$\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}+|u|^2u+\mathrm{i}\varepsilon\left[\beta'_1\frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3}+\beta'_2\frac{\partial}{\partial \tau}(|u|^2u)+\beta'_3\frac{\partial}{\partial \tau}|u|^2\right]=0 \tag{9.132}$$

其中 ε 为小参量($\varepsilon\ll1$),β'_1、β'_2 和 β'_3 都是常数.

9.9.3 NLS 的扰动行为

若考虑非线性薛定谔方程中,非线性项 $|u|^2u$ 的系数有高斯型的随机扰动,数值计算表明,基阶孤立子的解还是相当稳定的. 对色散项 $u_{\tau\tau}$ 的扰动,也有类似结果.

若对(9.111)加正弦扰动,即在方程右边加 $\varepsilon_0\sin\Omega t$,我们的计算表明,当 $\Omega=2,\varepsilon_0\approx0.5$ 时,孤立子在光纤中传输时出现无规则振荡. 如果在 NLS 方程中加正弦扰动时,同时考虑光纤损耗,当 $\varepsilon_0\approx0.32,\Omega=1,\gamma=0.1$ 时,孤立子在传输中变为混沌信号. 计算的关联维数是分数 $D_2\approx1.7$.

9.9.4 飞秒(fs)的非线性薛定谔方程

前已指出,(9.111)式只适于 ps(10^{-2} s)的光学孤立子. 对 fs(10^{-15} s)的孤立子,NLS 方程变为

$$\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}-\mathrm{i}\beta\frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3}+\left(1+\frac{\mathrm{i}}{\omega_0 T}\frac{\partial}{\partial \tau}\right)\left[\alpha|u|^2u+(1-\alpha)u\int_{-\infty}^{\tau}f_R(\tau-\tau')|u|^2\mathrm{d}\tau\right]=0 \tag{9.133}$$

其中 ω_0 是载波频率,T 是脉宽,$f_R(\tau-\tau')$ 是归一化的 Raman 响应函数.

9.10 光纤孤立子的增益补偿与孤立子放大器

在 9.9.1 中曾特别指出,由于光纤损耗很低,光学孤立子在传输中保持脉冲面积不变. 只要有适当的增益机制可以补偿光纤损耗,就可把孤立子传输到很远的距离.

本节介绍光纤孤立子的实验,光纤孤立子的增益补偿实验,孤立子光纤放大器以及孤立子拉曼放大器的理论.

9.10.1 光纤孤立子的初步实验

光纤孤立子的许多初步实验常用 $\lambda=1.32\ \mu$m 的锁模激光. 由图 9.8 可知,石英光纤在 1.3 μm 处色散为零,而在 $\lambda_0=1.55\ \mu$m 处,$\mathcal{D}\approx$

1.6 ps/(km·nm).

若基阶孤立子的 $T_0=4$ ps,考虑到在波长 1.55 μm 处 $n_0\approx1.45$,$n_2\approx1.1\times10^{-8}$ e·s·u.可以计算出 $z_0\approx1\ 260$ m,$I_1\approx1.0\times10^6$ W/cm^2.若光纤的芯的等效面积为 $S_0\approx1.0\times10^{-6}$ cm^2,则形成基阶孤立子需要的光功率只有 $P_1=I_1S_0\approx1$ W.对 $\lambda\approx1.32$ μm 的孤立子可做类似估算.

用特种技术制成的色散位移光纤,对波长 1.55 μm 的光,$\mathscr{D}=2$ ps/(km·nm),也可估算形成孤立子的阈值.

实验中常用连续锁模的波长为 1.32 μm 的 YAG 激光器,激光脉宽约 100 ps,重复率 100 MHz,平均功率约 2 W,峰值功率 200 W.所用的光纤为单模光纤,芯径为 7 μm,对 1.32 μm 的光损耗低于 1 dB,光纤长度约 500 m,多用保偏(保持偏振特性)光纤,也可用非保偏光纤.

用光纤耦合器将 1.32 μm 的锁模激光输入到光纤.输入的光脉冲平均功率为 40 mW 时,便从光纤输出端得到孤立子、孤立子波形用自关联技术测量,或用微波谱分析仪间接测量.

有些实验用调 Q 的 YAG 激光器、锁模的氩离子激光器,据称也可形成孤立子.

9.10.2 光纤损耗的增益补偿

上节中曾指出,低损耗的光纤中的孤立子的振幅与脉宽的乘积是常数.因此,只要用某种增益机制对光纤损耗进行补偿,就可恢复孤立子的形状,好像整形医生不必做整形手术,只给患者补充少许能量,即可使之自动整形、美容.

1990 年,Mollenauer 等使用掺铒的光纤放大器补偿光纤损耗,见图 9.11 所示,他们使用了色散位移光纤,$\mathscr{D}\approx(1.38\pm0.07)$ps/(km·nm),对信号光($\lambda_s=1\ 532$ nm)的损耗为 0.25 dB/km,光纤芯面积 $S_0\approx35$ μm^2.

光纤放大器为掺铒的光纤,长 2.2 m,增益约 7 dB.

在实验中用 3 段各长 25 km 的色散位移光纤,以及 3 段各长 2.2 m 的掺铒光纤放大器.光纤放大器的泵浦波长为 1 480 nm,泵浦功率为 50 mW,信号光的波长为 1 532 nm,脉宽 50 ps,重复率为 200 MHz,波形为 sech^2 形的.脉动系列持续 375 μs(正好填充总长约 75 km 的光纤环路).信号功率调整到在每段 25 km 长的光纤中平均 0.6 mW.可以估计出 $z_0\approx680$ km,即 $z_0\gg L$.

光纤环路中还使用了光学隔离器.据说这不是必不可少的.测试仪器则用 ps 的光二极管探测器,用微波谱分析仪对输出的光脉冲进行频谱分析,以便比较在不同传输距离时的波形变化.当光脉冲在光纤环路中传输

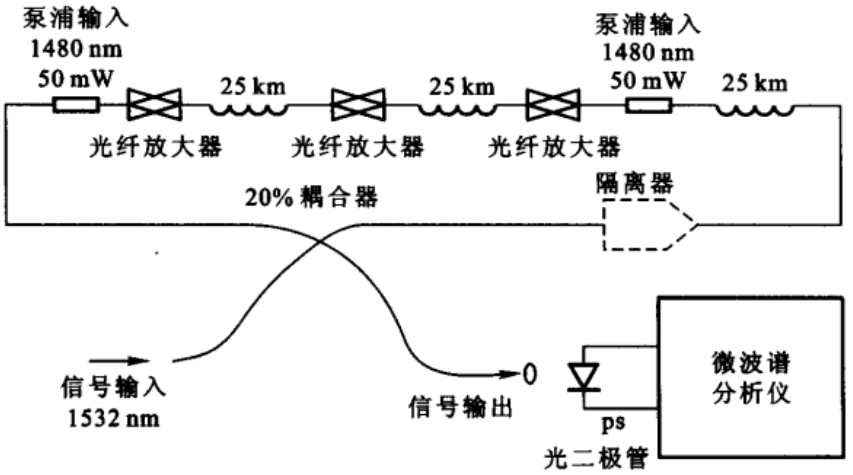


图 9.11 孤立子在光纤中环行 10^4 km 实验

6 000 km 时，脉冲的谱与理想的孤立子的谱几乎完全一样. 实验表明，光学孤立子在该光纤环路中传输的等效距离达 10^4 km. 这就为无中继站的洲际光纤通信和大洋底的光纤通信提供了可能性.

9.10.3 孤立子光纤放大器的理论

波长为 1.55 μm 的光学孤立子的放大器，采用掺铒的石英光纤放大器. 光脉冲与基质(石英)的作用仍采用非线性薛定谔方程描述，而光与激活离子(E_r^{3+})的作用，则用熟知的布洛赫方程.

孤立子的光纤放大器的理论，相当于把麦克斯韦方程中的极化强度写成两项，一项是基质的非线性极化. 另一项是激活离子的极化. 重复推导非线性薛定谔方程的步骤，即可得到掺杂二能级激活粒子的光纤中的 NLS，它既与基质的色散和非线性有关，又与二能级粒子的极化强度有关. 二能级粒子的 P 和 D 仍用布洛赫方程描述.

这里采用简便方法得到光纤放大器的场方程. 由负频光场的非线性薛定谔方程(9.108)出发

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}+\beta'\frac{\partial}{\partial t}-\mathrm{i}\frac{\beta''}{2}\frac{\partial}{\partial t^2}+\mathrm{i}\frac{\beta_2}{2}|E_0|^2\right)E_0(z,t)=0 \tag{9.134}$$

对二能级原子(或离子)的正频光场方程(考虑传输过程)为

$$c\frac{\partial E}{\partial z}+\frac{\partial E}{\partial t}=(-\mathrm{i}\delta-\kappa)E+\frac{\mathrm{i}\bar{\omega}}{2\varepsilon_0}P \tag{9.135}$$

以上二式中，$E=E_0(z,t)$，都是光场慢变振幅. 对正频光场的 NLS 应将(9.134)取复共轭，将上式两边除以 c，则有

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)E=\frac{1}{c}(-\mathrm{i}\delta-\kappa)E+\frac{\mathrm{i}\bar{\omega}}{2\varepsilon_0 c}P \tag{9.136}$$

在光纤中，c 应代之以群速 $v_g=1/\beta'$. 同时光纤放大器并无谐振腔，故 $\delta=0,\kappa\approx0$. 然后再把色散与非线性项考虑进去，则得到

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{\partial}{\partial z}+\frac{1}{v_g}\frac{\partial}{\partial t}+\mathrm{i}\frac{\beta''}{2}\frac{\partial}{\partial t^2}-\mathrm{i}\frac{\beta_2}{2}|E|^2\right)E=\frac{\mathrm{i}\bar{\omega}}{2\varepsilon_0 v_g}P\\&\frac{\partial P}{\partial t}=(-\mathrm{i}\Delta-\gamma_\perp)P+\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}|\theta_{ab}|^2ED\\&\frac{\partial D}{\partial t}=-\gamma_\parallel(D-D_0)-\frac{2}{\mathrm{i}\hbar}(EP^*-E^*P)\end{aligned}\right\}\tag{9.137}$$

由于光学孤立子脉宽很窄，它与二能级发生相干作用(作用时间很短). 因此略去$\frac{\partial D}{\partial t}$中的耗散项($\gamma_\parallel\to0$). 用计算机求解时，令 $\xi=z,\tau=t-z/v_g$，即用延时坐标系. 前苏联学者分别计算了孤立子脉宽 $T>1/\gamma_\perp$，$T<1/\gamma_\perp$，$T\approx1/\gamma_\perp$ 的情况. 计算表明，当光纤放大器较长时，孤立子放大的波形有畸变.

对于图 9.11 所示的情况，也有人用 NLS 描述 25 km 通信光纤，进行了数值计算. 实验与理论符合得相当好.

9.10.4 用拉曼增益对光纤损耗的补偿

光纤中的受激拉曼效应也可用于对光纤损耗的补偿、泵浦光波长对应光纤正色散区，信号光(孤立子)的波长对应光纤的负色散区. 因此泵浦光速度快，使信号光总是在拉曼增益介质中传输.

光波长为 λ_p 的泵浦光进入光纤后，波长发生拉曼位移 $\Delta\lambda$，对波长为 λ_s 的信号光产生增益，λ_s 应满足下式

$$\lambda_s=\lambda_p+\Delta\lambda\tag{9.138}$$

受激拉曼放大的增益为 G，信号光强 I_s 被放大，

$$I_s=I_s(0)\exp(GLP/S_0)\tag{9.139}$$

其中 $I_s(0)$是信号光的入射光强，L 是光纤与泵浦光作用的长度. P 是泵浦功率，S_0 是光纤芯的等效面积.

1988 年，Mollenauer 等用连续工作的 KCl:Tl 色心激光作为泵浦光，$\lambda_p\approx1\ 497$ nm，$P=300$ mW. 信号光为 NaCl 色心激光，$\lambda_s=1\ 600$ nm，锁模激光脉宽 55 ps. 泵浦光和信号光均由光纤耦合器输入到光纤. 这样使光学孤立子在周长 41.7 km 的光纤环路中循环，等效传输距离达 4 000～6 000 km.

9.10.5 光学孤立子的拉曼放大理论

Hasegawa 给出了光学孤立子的拉曼放大的方程

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{i}\left[\frac{\partial A_{\mathrm{p}}}{\partial z}+(\gamma_{\mathrm{p}}+\tilde{\alpha}|A_{\mathrm{s}}|^2)A_{\mathrm{p}}-\frac{\partial\beta_{\mathrm{p}}}{\partial\omega}\frac{\partial A_{\mathrm{p}}}{\partial t}\right]\\
&\qquad-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\beta_{\mathrm{p}}}{\partial\omega^2}\frac{\partial^2 A_{\mathrm{p}}}{\partial t^2}+\tilde{\beta}_2|A_{\mathrm{p}}|^2A_{\mathrm{p}}=0\\
&\mathrm{i}\left[\frac{\partial A_{\mathrm{s}}}{\partial z}+(\gamma_{\mathrm{s}}-\tilde{\alpha}|A_{\mathrm{p}}|^2)A_{\mathrm{s}}-\frac{\partial\beta_{\mathrm{s}}}{\partial\omega}\frac{\partial A_{\mathrm{s}}}{\partial t}\right]\\
&\qquad-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\beta_{\mathrm{s}}}{\partial\omega^2}\frac{\partial^2 A_{\mathrm{s}}}{\partial t^2}+\tilde{\beta}|A_{\mathrm{s}}|^2A_{\mathrm{s}}=0
\end{aligned}\right\}\tag{9.140}$$

其中 A_{p} 和 A_{s} 分别是泵浦光与信号光(孤立子)的光场慢变振幅. 方程中下标 p 和 s 都是分别指泵浦光和信号光,γ_{p} 和 γ_{s} 是线性损耗. $\tilde{\beta}_2$ 是色散,对属于非线性折射率 $n=n_0+\tilde{\beta}_2|E_0|^2$,$E_0=A_{\mathrm{p}}$ 或 A_{s}. 另外,方程中 $\tilde{\alpha}=0.2\tilde{\beta}_2$,$\tilde{\alpha}=|A_{\mathrm{p}}|^2$ 是对光学孤立子放大的拉曼增益. 为了不使孤立子波形畸变,必须满足低增益条件,$\tilde{\alpha}|A_{\mathrm{p}}|^2\ll\tilde{\beta}_2|A_{\mathrm{s}}|^2$.

9.11 光纤中孤立子的相互作用

前面介绍的孤立子,很少涉及孤立子之间的影响与作用. 未来的光学孤立子通信,必然涉及这类问题. 实验上已发现了光学孤立子间的作用.

两个孤立子之间的作用与以下因素有关:两个孤立子间的时间间隔、孤立子的位相、孤立子的振幅. 当两个孤立子间隔很小时,彼此之间有吸引力,使它们互相靠拢,可合并在一起. 孤立子间的这种作用力,随孤立子之间的初始间隔的增加而指数衰减. 当孤立子之间的间隔大于孤立子脉宽(FWHM)的 10 倍时,相互作用可忽略.

计算表明,对于如下的一对孤立子

$$u(0,\tau)=\mathrm{sech}(\tau-q_0)+r\,\mathrm{sech}[r(\tau+q_0)]\exp(\mathrm{i}\theta)\tag{9.141}$$

其中 q_0 是两个孤立子的初始间隔,θ 是两个孤立子的相对位相,r 是两者的相对振幅. 当 $\theta=0$,$r=1$,$q_0\gg1$ 时,则在光纤内传播距离 ξ 处,两个孤立子之间的间隔由下式给出.

$$\exp[2(q-q_0)]=\frac{1}{2}\{1+\cos[4\xi\exp(-q_0)]\}\tag{9.142}$$

此式表明,两个孤立子之间的时间间隔是在光纤中周期变化的. 即两个孤立子间的作用力是周期性的力. 为避免孤立子间的作用,要求两个孤立子的初始时间间隔 $q_0\geqslant10$.

由两个孤立子间的作用力的这种特性可知,控制它们的位相或相对振幅,可以减小它们之间的作用.

此外,人们还发现了光纤中孤立子之间的长程的与位相无关的相互作用.

在光纤孤立子通信中，将涉及多个孤立子以及编码的孤立子的相互作用，还应研究对光纤损耗进行增益补偿的过程中的孤立子作用。

9.12 孤立子激光器的实验与理论

在研究光纤孤立子时我们看到，输入到光纤的光脉冲，即 NLS 的初值，必须是严格的双曲正割函数（sech(τ)），并且振幅满足特定条件. 否则，将会有非孤立子部分与孤立子并存，影响孤立子的稳定性. 怎样产生严格的孤立子呢？能够产生孤立子的激光器称为孤立子激光器. 下面介绍孤立子激光器的理论和实验.

9.12.1 孤立子激光器实验

实际上，孤立子激光器的实验出现在理论模型之前，图 9.12 是 1984 年发表的第一个孤立子激光器示意图. 它包括两个谐振腔：一个是锁模的 KCl:Tl 色心激光器的腔，另一个是单模、保偏（保持偏振特性）光纤构成的谐振腔.

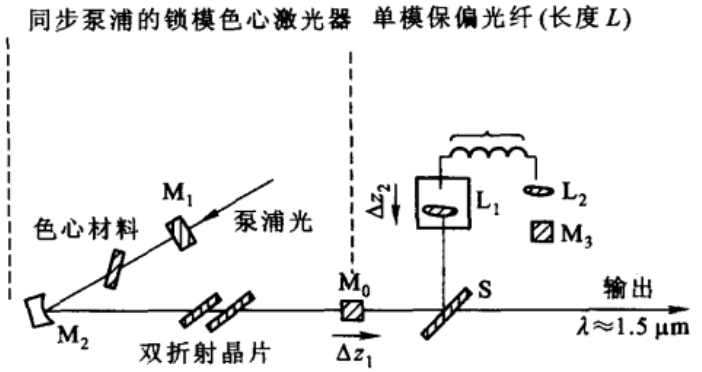


图 9.12 孤立子激光器装置示意图

色心激光器用波长 1.064 μm 的 YAG 泵浦，泵浦功率约 5 W. 色心激光的调谐范围是 1.4～1.6 μm（用双折射调谐板进行调谐），脉宽约 8 ps，平均激光功率为 1 W.

该实验成功的关键在于使用保偏光纤，否则，从光纤反馈到色心激光器的信号将起伏不定.

孤立子激光器的工作过程如下：色心激光器由噪声起振，产生较宽的激光脉冲，它通过光纤，脉宽被压缩. 这个更窄的脉冲又注入到主腔，强迫色心激光器产生更窄的脉冲. 如此循环往复，直至在光纤中形成孤立子.

对于 sech^2 形状的孤立子，峰值功率若为

$$P_1=\left(\frac{0.776\lambda_0^3}{\pi^2 cn_2}\right)\frac{\mathscr{D}}{T^2}S_0 \tag{9.143}$$

则只能产生基阶孤立子($N=1$). 在(9.143)中,T 是孤立子的脉宽(FWHM),$\mathscr{D}$ 是光纤的色散参量,见(9.85)式,S_0 是等效的光纤芯面积,λ_0 是真空中的光波波长. 这时孤立子在传输中形状不变,即色散引起的脉冲展宽的效应与光纤非线性引起的脉冲压缩效应恰好平衡.

这样,P_1 就是产生基阶孤立子的阈值:

(1) $P<P_1$ 时,超短光脉冲在光纤中传输时,脉宽总是展宽.

(2) $P=P_1$ 时,且形状为 sech^2,正好形成基阶孤立子.

(3) $P>P_1$,脉冲宽度在传输过程中变窄(至少在初始阶段如此).

(4) $P_2=4P_1$ 时,而且形状为 sech^2,则产生二阶孤立子($N=2$). 二阶孤立子的周期 z_0,见式(9.122). z_0 也可写成

$$z_0=0.322\left(\frac{\pi^2 c}{\lambda_0^2}\right)\frac{T^2}{\mathscr{D}} \tag{9.144}$$

图 9.12 所示的装置就是用于产生二阶孤立子. 二阶孤立子的传输特性见图 9.9.

1987 年 Kafka 和 Baer 用连续锁模的波长为 1.32 μm 的 YAG 激光作为泵浦光(脉宽 100 ps,重复率 82 MHz,平均功率 0.6 W. 实验用的光纤长度为 1.1 km,而且是"非保偏"的单模光纤. 由于拉曼效应,在波长 $\lambda=1.410$ μm 处产生拉曼振荡,光纤谐振腔的反射镜使 $\lambda=1.410$ μm 的光发生正反馈并振荡. 这就是拉曼孤立子激光器. 稍后的实验采用类似装置,但非保偏的单模石英光纤长度只有 300 m. 当泵浦功率为 200 mW 时,产生了拉曼孤立子,波长为 1.384 μm,脉宽约 200 ps,平均功率 10 mW,峰值功率 100 W.

9.12.2 孤立子激光器的理论

图 9.12 所示的孤立子激光器可简化为双腔模型:主腔内是同步泵浦的色心激光器,外腔是一个光纤腔. 主腔内还有双折射调谐板 B,见图 9.13.

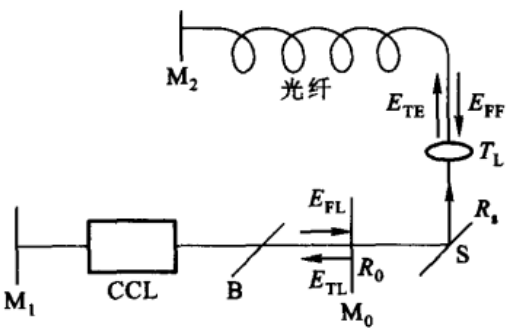


图 9.13 孤立子激光器的双枪理论模型

1987 年，Berg 和 Christiansen 等提出了一个理论模型，应该用麦克斯韦-布洛赫方程描述主腔，用非线性薛定谔方程描述光纤腔，即

$$\left.\begin{aligned} c\frac{\partial E}{\partial z}+\frac{\partial E}{\partial t}&=(-\mathrm{i}\delta-\kappa)E+\frac{\mathrm{i}\bar{\omega}}{2\varepsilon_0}P\\ \frac{\partial P}{\partial t}&=(-\mathrm{i}\Delta-\gamma_\perp)P+\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\theta_{ab}\theta_{ba}ED\\ \frac{\partial D}{\partial t}&=-\gamma_\parallel(D-D_0)-\frac{2}{\mathrm{i}\hbar}(EP^*-E^*P)\\ \kappa&=\kappa_0+A_M(1-\cos\omega_M t)\end{aligned}\right\}\tag{9.145}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}+\beta'\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\mathrm{i}}{2}\beta''\frac{\partial}{\partial t^2}-\mathrm{i}\frac{\beta_2}{2}|E|^2+\gamma\right)E(z,t)=0\tag{9.146}$$

在方程(9.145)中，E 和 P 是光场和极化强度的正频分量的慢变振幅. E 是 z 和 t 的函数. $\delta=(\omega_\lambda-\omega_0)$，$\Delta=\bar{\omega}-\omega_0$，$\omega_0$ 是色心激光器的中心频率，ω_λ 和 $\bar{\omega}$ 分别是腔模频率与原子跃迁的中心频率. 假定 $\omega_\lambda\approx\omega_0$，$\delta\approx0$. 损耗 κ 的公式表示主动调制(用主动锁模来代表同步泵浦的锁模过程). ω_M 是调制频率，$\omega_M=2\pi c/L_1$，L_1 是主腔的等效腔长(把折叠腔看成长度为 L_1 的非折叠腔)，A_M 是调制振幅. Berg 等人的文章使用形如(9.111)的方程，似乎不妥，我们改用(9.146)式，以便 M-B 方程和 NLS 方程中的光场 $E_0(z,t)$ 相同. (9.146)式中的 β'，β''，β_2 的定义见(9.82)、(9.83)和(9.86)式，而 γ 是光纤损耗，单位为 cm^{-1}.

双折射调谐板的作用是减小色心激光的带宽. Berg 等给出了它的传输函数(在频域内)

$$B(\omega)=\frac{1-q_0}{1+[(\omega-\omega_0)/\Omega_p]^2}+q_0\tag{9.147}$$

其中心频率等于色心激光频率 ω_0，其带宽 $\Omega_p\ll\gamma_\perp$，q_0 与材料有关.

为了求解方程(9.145)和(9.146)，将光场展开为

$$E(z,t)=\sum_{n=-N}^{N}E_n(t)\exp[-\mathrm{i}n\Delta\omega(z-t)]\tag{9.148}$$

它表示从 $n=-N$ 到 $n=N$，共有 $(2N+1)$ 个模被锁定. 其中 $\Delta\omega$ 等于纵模间隔，即 $\Delta\omega=2\pi c/L$. 当然锁模技术要求(9.145)式中的调制频率 $\omega_M=\Delta\omega$. 在计算光强时，$I(t)=|E(z,t)|^2$，略去比例常数.

色心激光器从 M_0 的输出光强为

$$E(L_1,t)=(1-R_0^2)^{1/2}\sum_{n=-N}^{N}E_n(t)\exp[\mathrm{i}n\Delta\omega t]\tag{9.149}$$

其中考虑到 R_0 是对光场的反射率. 显然，对光强的反射为 $|R_0E|^2$，即光强反射率为 R_0^2，光强透射率为 $(1-R_0)^2$. 因为对光场的透射率为

$(1-R_0^2)^{1/2}$.

主腔与光纤腔之间光场的边界条件为

$$\left.\begin{aligned} E_{TL}&=R_0E_{FL}+(1-R_0^2)^{1/2}R_sT_L(e^{i\phi'}E_{FF})\\ E_{TF}&=(1-R_0^2)^{1/2}T_LE_{FL}+R_s^2R_0T_L^2(e^{i\phi'}E_{FF}) \end{aligned}\right\} \tag{9.150}$$

参考图 9.13. R_0 和 R_s 分别是 M_0 和分速器 S 的光场反射率，T_L 是耦合透镜的光场透射率. E_{FL} 是射到 M_0 的色心激光光场，E_{TF} 是从 M_0 进入色心激光器的光场. 而 E_{TF} 和 E_{FF} 分别是进入和射出光纤的光场. $(1-R_0^2)^{1/2}$ 仍是光场透射率. ϕ' 是光场 E_{FL} 和 E_{FF} 的相移. 在实验中，应使主腔和光纤腔特别稳定，同时调节 M_0 的位移(到 1 μm 的量级)，确保 E_{FF} 和 E_{FL} 同位相叠加.

用计算机求解方程(9.145)和(9.146)时，考虑到边界条件(9.150)和传输函数(9.147)，可得到孤立子解.

9.13 暗孤立子

本节介绍暗孤立子(dark solitons)的概念和性质.

回顾前几节研究的光纤孤立子与孤立子激光器都是工作在光纤的负色散区，即$\frac{\partial v_g}{\partial \lambda_0}<0$，或$\frac{\partial v_g}{\partial \omega_0}>0$. 由(9.84)式可知，$\beta''=(-v_g^{-2})\frac{\partial v_g}{\partial \omega_0}$，因此 $\beta''<0$对应负色散，$\beta''>0$，对应正色散. 非线性薛定谔方程(9.111)就是在 $\beta''<0$ 的情况下推导出来的. 对于正色散区，$\beta''>0$，非线性薛定谔方程中的色散项区是负的，即(9.110)式中的 τ 变为 $i\tau$，(9.111)式变为

$$iu_\xi-\frac{1}{2}u_{\pi\pi}+|u^2|u=0 \tag{9.151}$$

其解为

$$u(\xi,\tau)=\kappa\tanh(\kappa t)\exp(i\kappa^2\xi) \tag{9.152}$$

其中 κ 是形状因子，决定脉冲形状和振幅. 这是暗孤立子. 暗孤立子是指“背景”是亮的，而有一个“黑暗”的脉冲以特定的形状传播，这个“暗脉冲”具有孤立子的性质. 而以前研究的孤立子，则可称为“亮孤子”，即背景是暗的，而有一个亮的光脉冲以特定的形状传播.

假定初始条件为

$$u(0,\tau)=u_0\tanh(\tau) \tag{9.153}$$

其中 u_0 是初始的场振幅(或输入的脉冲的光场振幅). 图 9.14 是 $u_0=1.5$ 时，由方程(9.151)得到的数值解，该图中间的凹陷部分就是暗孤子.

详细的研究表明，若

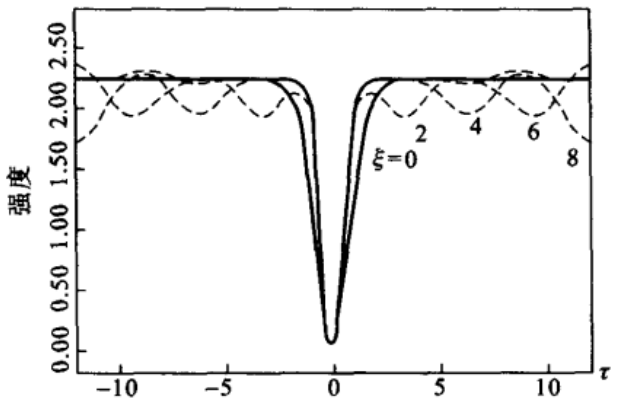


图 9.14 两个暗孤立子($N=2,\alpha=0.5,\xi=0,2,4,6,8$)

$$u_0=N-\alpha,\quad N\geqslant 1,\quad 0\leqslant\alpha<1 \tag{9.154}$$

则基阶孤立子的形状因子为

$$\kappa=N-\alpha \tag{9.155}$$

例如,在图 9.14 中,$N=2,\alpha=0.5,\kappa=1.5$. 此外,有 $2(N-1)$个二阶孤立子,它们的形状因子为

$$\kappa_n=\pm(N-n-\alpha),\quad n=1,2,\cdots,N-1 \tag{9.156}$$

其中的正负号对应于这些脉冲的传播方向. n 从 1 到$(N-1)$. κ_n 有 $2(N-1)$个值. 在图 9.14 中,$N=2,n=1,\kappa_n=\pm1$,即有两个二阶暗孤立子. 不难知道,若 $N=4$,则有 6 个二阶暗孤子.

暗孤立子与亮孤立子比较,还有许多不同的性质:

(1) 当光纤中有损耗以及背景噪声时,暗孤立子比亮孤立子更稳定. 例如,当光纤的损耗相同时,暗孤子在传播中脉宽展宽得更慢.

(2) 暗孤子之间的作用力是排斥力,力的大小随两个暗孤子之间的初始距离增大而指数衰减,但比亮孤子的情况衰减得更快(快一倍). 此外,两个暗孤子在传播过程中,它们之间的间隔是单调增加的,而不是周期变化的. 相反,两个亮孤子之间的作用力是吸引力. 它们的间隔在传播过程中周期变化.

两个暗孤子在传播中,其间隔 q 由下式决定

$$\exp[2(q-q_0)]=\frac{1}{2}\{1+\exp[4\xi\exp(-2q_0)]\} \tag{9.157}$$

其中 q_0 是两个暗孤子的初始间隔,ξ 是传播距离,q 是传播距离为 ξ 时两个暗孤子间隔.

暗孤子在光纤中的损耗也可用增益补偿.

对光学孤立子研究的最新结果还包括空间孤立子(即用非线性抵消衍射实现无衍射传输),孤立子的双稳态理论与实验,孤立子的混沌动力

学，亮孤立子与暗孤立子的同时传播，光学孤立子的全量子理论，光学孤立子的压缩态等.

光学孤立子的进一步实验，还应研究掺杂激活离子的通信光纤，这样可能使光纤孤立子通信不但省去中继站，也省去分段的光纤放大器及相应的光纤耦合器. 此外，掺钛宝石光纤有很宽的调谐范围，可能传输多路孤立子.

习题与思考

(1) 用光学布洛赫方程说明自感透明现象.

(2) 证明双曲正割脉冲的面积是 2π.

(3) 用孤立子理论求解正弦-戈登方程.

(4) 详细说明光纤中孤立子形成的机理.

(5) 若在延时坐标系 $\tau=(t-z/v_g)$ 中，高斯脉冲波形为 $E_0(\tau)=E_0\exp[-\tau^2/(2\tau_0^2)]$，计算自位相调制引起的频移，并说明光脉冲的脉宽有什么变化.

(6) 若光场的形式为 $E(z,t)=E_0e^{i\omega_0 t}$，证明 $\langle E^2(z,t)\rangle=\frac{1}{2}|E_0(z,t)|^2$. 可参考 Yariv. Introduction to Optical Electronics, 1971, p1 - p3.

(7) 由纯色散介质中的场方程(9.100)证明，光脉冲包络的振幅不变，只是位相有变化.

(8) 详细推导光脉冲在光纤中传输的非线性薛定谔方程.

(9) 说明孤立子激光器原理及工作过程.

(10) 对于图 9.11 所示的光纤损耗的增益补偿方案，写出动力学方程，讨论求解要点.

(11) 用微机求解无损耗的非线性薛定谔方程.

参 考 文 献

[1] Hasegawa A. Amplification and reshaping of optical solitons in a glassfiner-Ⅳ: use of the stimulated Raman Process. Opt. Lett., 1983, 8: 650 - 658.

[2] Hasegawa A. Numerical study of optical soliton transmission amplified by the stimulated Raman process. Appl. Opt.. 1984, 23: 3302 - 3310.

[3] Mollenauer L F, Gordon J P. Soliton propagation in long fibers with periodically compensated loss. J. Quantum Electron. QE - 22, 1986, 157 - 163.

[4] Gordon J P, Haus H A. Random walk of coherently amplified solitons in optical fiber transmission. Opt. Lett., 1986, 11: 665 - 670.

[5] Stolen R H, Lee C, Jain R K J. Development of the stimulated Raman spectrum in single-mode silica fibers. Opt. Soc. Am. , 1984, BI: 652 - 660.

[6] Bower J E, McCoy R J. In GaAs PIN photodetectors with modulation response to millimeter wavelengths. Electron. Lett. , 1985, 21: 812 - 818.

[7] Mitschke F M, Mollenauer L F. Experimental observation of interation forces between solitons in optical fibers. Opt. Lett. , 1987, 12: 355 - 360.

[8] Mollenauer L F. Experimental study of soliton transmission over more than 10 000km in dispersion-shifted fiber. Opt. Lett. , 1900, 21: 1203 - 1208.

[9] Abdullacr F K. Dynamical chaos of solitons and nonlinear periodic waves. Physics Reports, 1989, 179: 1 - 7.

[10] 刘颂豪等. 孤子激光器及其发展. 物理学进展, 1989, 3: 87 - 125.

[11] 张秀荣, 吴光照. 1.318 8 μm 和 1.338 2 μm 钇铝石榴石连续激光器. 激光, 1982, 2: 40 - 41.

[12] 沈鸿元等. 高稳定 1.341 4 μm TEM_{00} 模 Nd^{3+} : YAP 连续激光器. 中国激光, 1989, 11: 3 - 5.

[13] Kumar A. Soliton dynamics in a monomode optical fiber. Physics Reports, 1990, 187: 63 - 68.

第 10 章　光学双稳态

光学双稳态的研究在理论和应用方面都有重要意义. 本章介绍光学双稳态的原理，光学双稳态的半经典理论，光学双稳态器件的混沌特性，半导体光学双稳态实验. 至于光学双稳态的相变类比和信息动力学，将在最后一章介绍.

10.1　光学双稳态的原理

光学双稳态器件是光计算机的最重要的部分. 1969 年 Szöke 建议在腔内放入非线性介质以实现光学双稳态. 1975 年，Gibbs 等用钠蒸气作为非线性色散介质首次实现了光学双稳态. 1976 年，Lugiato 建立了光学双稳态的半经典理论. 1979 年，Smith 和 Gibbs 分别用 InSb 和 GaAs 实现了半导体的光学双稳态. 后来人们又制成了量子阱的 GaAs 光学双稳态器件，同时，还制成了一些光学逻辑器件.

简单说，双稳态器件就是输出与输入信号呈 S 形曲线的器件，对于一定的输入信号，输出可以有两个稳定状态. 光学双稳态，则是用光学方法实现双稳态，即输出与输入的光信号，呈 S 形曲线，如图 10.1 所示，其中虚线部分不稳定(因为输入小时，输出增加，不稳定，实验观测不到). 当输入信号较弱时，输出很弱(“关”状态). 当输入信号 y 逐渐增强到一定数值 y_m 时，输出光强发生跳跃式的增强(“开”状态). 反之，当输入光强从强到弱逐渐减弱到特定数值 y_m 时，输出光强则从上面的分支跳到下面的分支. 在图中的 S 形曲线的中间部分，对于输入信号的一个值，输出有两个稳定值. 究竟输出光信号在哪个状态，与输入信号的变化过程的方向有关.

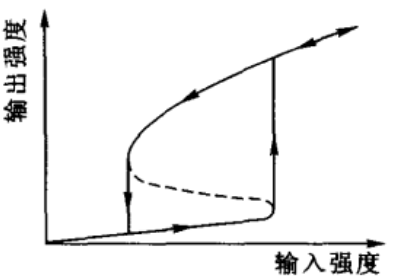


图 10.1　双稳态示意图

图 10.2 所示的是哈肯为说明双稳态的特性而绘制的一幅图. 当你从左向右依次看各个图画时，你会感到，中间的图像很像是老翁的头像. 反之，当你从右向左依次看各个图像时，又感到中间的图像很像是少女像. 请注意一下，从左向右看时，你的感觉在哪幅图像上发生突变(很像少

女). 再注意从右向左看时,在哪幅图像上发生突变(像老翁了). 从左到右和从右到左看上述图画时,你感觉的两个突变点显然不同,这正是双稳态的特征. 老翁代表一个稳定态,少女代表一个稳定态,中间的态是不稳定的;此外,也许人们都有这样的体验,当你在街上遇到一对夫妇带着一个孩子,若先看丈夫再看孩子,似乎孩子长得像爸爸. 反之,若先看妈妈再看孩子,似乎孩子又像妈妈. 这说明视觉和大脑有非线性. 在心理学和医学中还有许多双稳态的例子,最后一章再回到这个有趣的问题上.

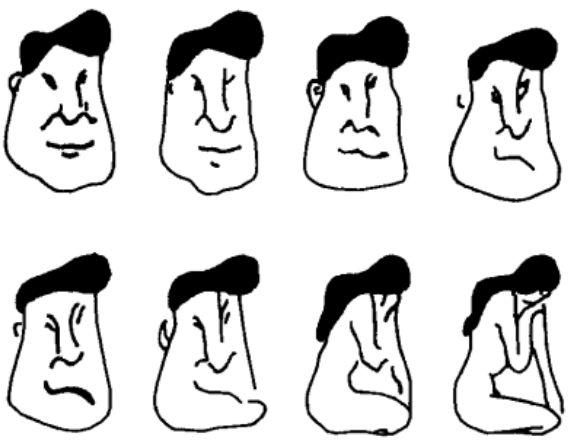


图 10.2 视觉得双稳态特点

为说明光学双稳态的原理,假定一个干涉仪内充满非线性折射率的介质,其折射率 n_r 为(n_0+n_2I). 这种介质称为克尔介质,n_2 即非线性系数,干涉仪的谐振条件为

$$n_rL=(n_0+n_2I)L=\frac{1}{2}m\lambda_r \tag{10.1}$$

其中 L 是干涉仪的几何长度,n_0 是线性折射率,n_2I 是非线性折射率,m 是一个整数,I 是腔内作用于非线性介质的光强. 假定 $I=0$ 时激光波长 λ_L 长于谐振波长 λ_r,如图 10.3 所示. 若 $n_2>0$,当入射光强增强时,腔内光强 I 也增强,使 n_r 增大,由于 n_rL 增长,使 λ_r 增长而趋向共振波长 λ_L. 这样图 10.3(a)中的透射峰向 λ_L 移动. 透射峰越向 λ_L 移动,腔内光强就越强. 腔内光强越强,透射峰向 λ_L 的移动越快. 这是正反馈过程. 当入射光强 I_i 增强到一定的数值 I_M 时,则输出光强增长的斜率变为无穷大. 输出光强的变化发生跳跃,即从下分支跳到上分支. 这时,若输入光强继续增强,λ_L 又偏离谐振,I_{out} 随 I_{in} 的变化就更慢了,即在上分支有负反馈过程.

当输入光强从强到弱变化时,输出略有降低. 当 I_{in} 到 I_M 时,由于在该点正对应谐振条件,腔内光强是强的,所以绝不会在 I_M 点发生向下的

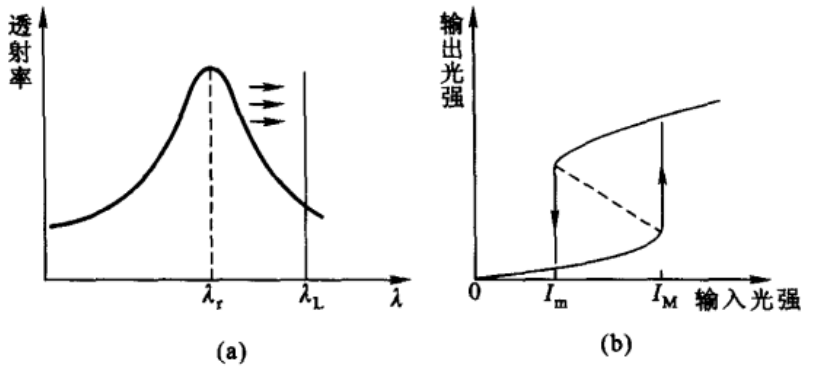


图 10.3 光学双稳态原理示意图(λ_r 是光强为零时的谐振波长)

跳跃. 当 I_{in}从 I_M 进一步降低时,I_{in}越小,λ_L 越偏离谐振. 它越偏离谐振,腔内光强 I 也就越弱. 当 $I_i = I_M$ 时,I_{out}随 I_{in}降低的速率(斜率)为负无穷

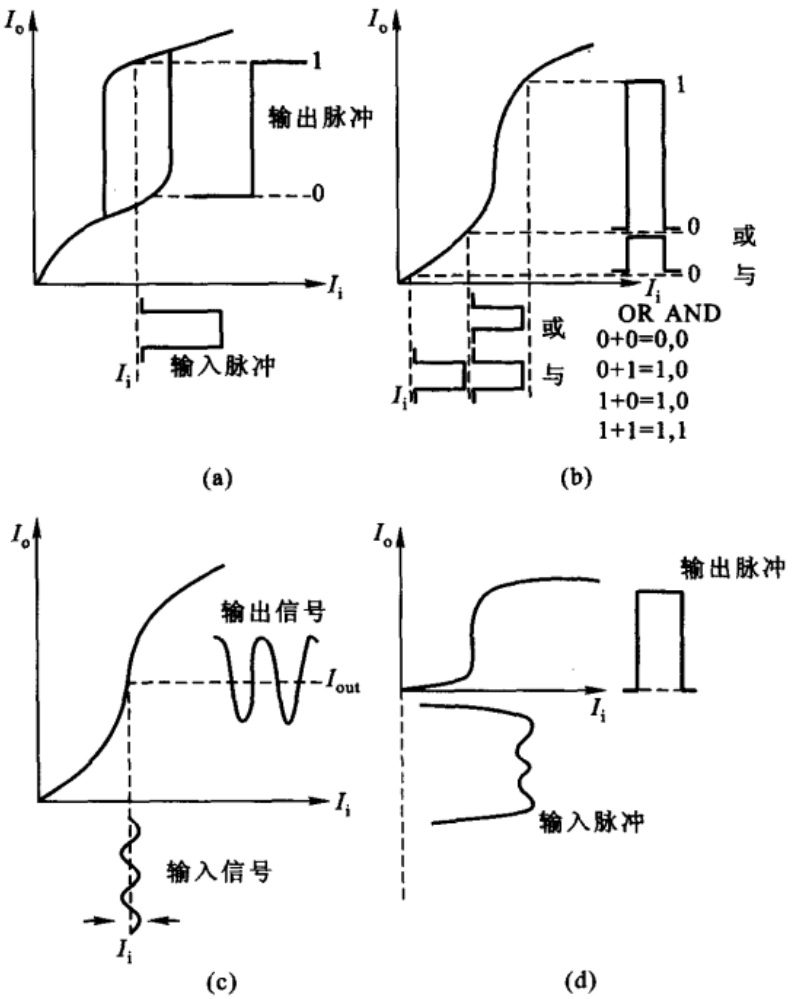


图 10.4 光学双稳态应用示意图

(a)"与"门 (b)"或"门 (c)光信号放大器 (d)光学限幅器

大时，I_{out}便从上分支跳到下面的分支.

在双稳态曲线中，I_M 和 I_m 是开关点. 在 I_M 和 I_m 之间，对应输入光强的一个数值，则输出光强有两个态，故称之为双稳态. 在 S 形曲线的虚线部分 I_{out}随 I_{in}增长的斜率是负的，是不稳定的. 这个虚线部分对应子半导体隧道二极管的 V－A 曲线的负阻部分(也是不稳定的).

由以上分析可知，产生光学双稳态的两个条件是非线性和正反馈.

在激光技术中，产生非线性的方法有非线性折射率(如上所述)、非线性吸收、辐射压力和声光效应等. 非线性材料也是多种多样. 另一方面，产生光学反馈的方法也很多，例如电子线路、自聚焦或自散焦、波导技术、吸收的热效应和微观的内场的变化等. 因此，光学双稳态的类型是五彩缤纷的. 但从理论上和实验上来看，最重要的是二能级系统的光学双稳态、延迟效应的双稳态、半导体光学双稳态等.

利用光学双稳态特性，可实现光学开关、"门"线路、光学放大和光学限幅器等，如图 10.4 所示.

10.2 光学双稳态的干涉仪理论

正如上节所述，典型的光学双稳态器件，相当于在一个干涉仪中放入非线性介质. 本节利用干涉仪的基本理论，并考虑到非线性极化率的影响，求出光学双稳态的状态方程.

本节介绍的光学双稳态的干涉仪理论实际上与麦克斯韦-布洛赫方程理论如出一辙. 这相当于利用麦克斯韦方程再加上干涉仪的边界条件，即得到干涉仪的理论. 另一方面，从光学布洛赫方程求出非线性极化率，利用极化率与复数折射率的关系，对干涉仪理论进行修正，便得到光学双稳态器件的状态方程.

由熟知的干涉仪理论，可知平面平行腔的入射光场和透射光场的关系

$$E_t=\frac{1-R}{1-Re^{i\delta'}}E_i \tag{10.2}$$

其中 E_i 和 E_t 分别是入射光场和透射光场，δ'是光在腔内循环一周(或往返一次)的位相变化，即

$$\delta'=2\eta k_0 L \tag{10.3}$$

η是复数折射率，k_0 是光在真空中的波数，L 是腔长. 考虑到非线性极化率χ与折射率的关系

$$\eta=1+\frac{1}{2}\chi \tag{10.4}$$

将 η 和 δ' 代入干涉仪公式(10.2),即可如愿以偿.

由光学布洛赫方程,我们曾得到

$$\chi=\frac{\alpha_0}{k_0}\frac{\mathrm{i}+\bar{\Delta}}{1+\bar{\Delta}^2+\left|\frac{E_{\mathrm{in}}}{E_{\mathrm{s}}}\right|^2} \tag{10.5}$$

其中 E_{in} 是腔内作用于非线性介质的光场,$\bar{\Delta}$ 是非线性的二能级系统的原子频率与光频率的归一化的失谐量,E_{s} 是饱和光场,

$$\bar{\Delta}=(\bar{\omega}-\omega)T_2 \tag{10.6}$$

$$|E_{\mathrm{s}}|^2=\hbar^2/(\mu^2T_1T_2)=\hbar^2\gamma_{\parallel}\gamma_{\perp}/\mu^2 \tag{10.7}$$

干涉仪公式的重要因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta'}$ 与非线性极化有关. 利用(10.3)和(10.4)式,则

$$\exp(\mathrm{i}\delta')=\exp(2\mathrm{i}k_0L)\exp(\mathrm{i}\chi k_0L) \tag{10.8}$$

下面分别研究上式右边的两个因子. 由于非线性极化强度对折射率的影响远小于1,故有

$$\exp(\mathrm{i}\chi k_0L)\approx 1+\mathrm{i}\chi k_0L \tag{10.9}$$

另一方面,用谐振条件表示出 $\exp(2\mathrm{i}\chi k_0L)$. 由于干涉仪的谐振条件(即驻波条件)要求满足位相关系 $k_0L=m\pi$,往返一次或环行一周的位相应满足

$$2k_0L=2m\pi \tag{10.10}$$

m 是个整数. 若往返一次或环行一周时,光场位相变化与谐振条件偏离位相角 θ,即

$$\theta=2m\pi-2k_0L \tag{10.11}$$

这样有

$$\exp(2\mathrm{i}k_0L)=\exp[\mathrm{i}(2m\pi-\theta)]=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} \tag{10.12}$$

假定光场比较接近谐振条件,即 θ 较小.

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\approx(1-\mathrm{i}\theta) \tag{10.13}$$

将(10.9),(10.12)和(10.13)式代入干涉仪公式(10.2),则

$$\begin{aligned}E_{\mathrm{t}}&=\frac{(1-R)E_{\mathrm{i}}}{1-R(1-\mathrm{i}\theta)(1+\mathrm{i}\chi k_0L)}\\&\approx\frac{(1-R)E_{\mathrm{i}}}{1-R(1+\mathrm{i}\chi k_0L-\mathrm{i}\theta)}\end{aligned} \tag{10.14}$$

其中略去了二阶小量 χ.

将极化率公式(10.5)代入上式,则

$$E_{\mathrm{t}}=\frac{(1-R)E_{\mathrm{i}}}{1-R\left[1-\mathrm{i}\theta+\mathrm{i}\dfrac{\alpha_0k_0L(\mathrm{i}+\bar{\Delta})}{k_0\left(1+\bar{\Delta}^2+\left|\dfrac{E_{\mathrm{in}}}{E_{\mathrm{s}}}\right|^2\right)}\right]} \tag{10.15}$$

将(10.15)的分母展开，同时消去$(1-R)$，并引入

$$2C=\alpha_0 L\left(\frac{R}{1-R}\right)\approx\alpha_0 L/(1-R) \tag{10.16}$$

$$\Theta=\theta\left(\frac{R}{1-R}\right)\approx\theta/(1-R) \tag{10.17}$$

$$E_t=\frac{E_i}{\left(1+\dfrac{2C}{1+\bar{\Delta}^2+\left|\dfrac{E_{in}}{E_s}\right|^2}\right)+i\left(\Theta-\dfrac{2C\bar{\Delta}}{1+\bar{\Delta}^2+\left|\dfrac{E_{in}}{E_s}\right|^2}\right)} \tag{10.18}$$

将上式两边乘以 E_t^*，并利用

$$|X|^2=\frac{E_t^2}{(1-R)|E_s|^2} \tag{10.19}$$

$$|Y|^2=\frac{|E_i|^2}{(1-R)|E_s|^2} \tag{10.20}$$

$$E_{in}=\frac{1}{(1-R)^{1/2}}E_t \tag{10.21}$$

代入(10.18)式即得著名的光学双稳态方程

$$|Y|^2=|X|^2\left[\left(1+\frac{2C}{1+\bar{\Delta}^2+|X|^2}\right)^2+\left(\Theta-\frac{2C\bar{\Delta}}{1+\bar{\Delta}^2+|X|^2}\right)^2\right] \tag{10.22}$$

用计算机绘图，可知在一定的条件下，Y 和 X 之间呈 S 形的双稳态曲线.

10.3 光学双稳态的 M－B 方程

光学双稳态的理论模型如图 10.5 所示. $\mathscr{E}_i$ 和 $\mathscr{E}_t$ 分别是入射光场和透射光场，$\mathscr{E}$ 是腔内光场. 行波腔内有均匀加宽的二能级介质.

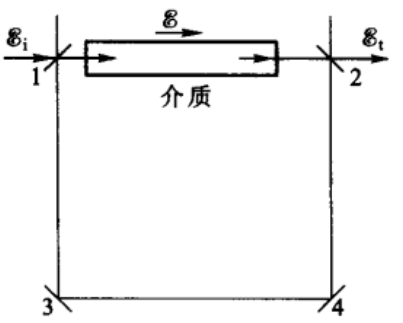


图 10.5 光学双稳态的理论模型

利用 M－B 方程(4.156)，(4.157)和(4.158)，并考虑注入信号 $\kappa\mathscr{E}_i$，略去 g' 的“′”，

$$\dot{\mathscr{E}}=(-i\delta-\kappa)\mathscr{E}-gP+\kappa\mathscr{E}_i \tag{10.23}$$

$$\dot{P}=(-i\Delta-\gamma_\perp)P-g\mathscr{E}D \tag{10.24}$$

$$\dot{D}=-\gamma_{\parallel}(D-D_0)+2g(P\mathscr{E}^*+P^*\mathscr{E}) \tag{10.25}$$

$$\delta=\omega_c-\omega \tag{10.26}$$

$$\Delta=\bar{\omega}-\omega \tag{10.27}$$

其中 ω_c,$\bar{\omega}$ 和 ω 分别是腔模、原子和入射激光的角频率;$\kappa\mathscr{E}_i$ 是入射光场. 在“好腔”近似下,腔的损耗 κ 小,

$$\kappa\ll\gamma_{\parallel},\quad \gamma_{\perp} \tag{10.28}$$

这对应于 A 类激光器,这时极化强度 P 和反转粒子数能够及时地跟光场变化,故可绝热消除 P 和 D. 这相当于

$$\dot{\mathscr{E}}/\kappa\gg\dot{P}/\gamma_{\perp},\quad \dot{D}/\gamma_{\parallel} \tag{10.29}$$

故可在形式上取 $\dot{P}=0$,$\dot{D}=0$,(10.24)和(10.25)式变为

$$0=(-\mathrm{i}\Delta-\gamma_{\perp})P-g\mathscr{E}D \tag{10.30}$$

$$0=-\gamma_{\parallel}(D-D_0)+2g(P\mathscr{E}^*-P^*\mathscr{E}) \tag{10.31}$$

由(10.30)式

$$P=-\frac{g\mathscr{E}D}{\gamma_{\perp}(1-\mathrm{i}\bar{\Delta})}=-\frac{1-\mathrm{i}\bar{\Delta}}{\gamma_{\perp}(1+\bar{\Delta}^2)}g\mathscr{E}D \tag{10.32}$$

$$\bar{\Delta}\equiv\Delta/\gamma_{\perp}=(\bar{\omega}-\omega)/\gamma_{\perp} \tag{10.33}$$

将(10.32)式代入(10.31)式,则

$$D=\frac{D_0}{1+\dfrac{4g^2|\mathscr{E}|^2}{\gamma_{\parallel}\gamma_{\perp}(1+\bar{\Delta}^2)}} \tag{10.34}$$

再将 D 代入(10.32),则

$$P=-\frac{1-\mathrm{i}\bar{\Delta}}{\gamma_{\perp}(1+\bar{\Delta}^2)}\frac{g\mathscr{E}D_0}{1+\dfrac{4g^2|\mathscr{E}|^2}{\gamma_{\parallel}\gamma_{\perp}(1+\bar{\Delta}^2)}} \tag{10.35}$$

这样就又一次得到了极化强度(注意 $P^{(+)}=-P\theta_{ba}$)将 P 代回场方程(10.23),则

$$\dot{\mathscr{E}}=-(\kappa+\mathrm{i}\delta)\mathscr{E}-\kappa\mathscr{E}_i+\frac{1-\mathrm{i}\bar{\Delta}}{\gamma_{\perp}(1+\bar{\Delta}^2)}\frac{g^2\mathscr{E}D_0}{1+\dfrac{4g^2|\mathscr{E}|^2}{\gamma_{\parallel}\gamma_{\perp}(1+\bar{\Delta}^2)}} \tag{10.36}$$

引入量纲为 1 的量

$$|\mathscr{E}_s|^2=\gamma_{\parallel}\gamma_{\perp}/(4g^2) \tag{10.37}$$

$$\Theta=\delta/\kappa=(\omega_c-\bar{\omega})/\kappa \tag{10.38}$$

$$2C=-g^2D_0/(\kappa\gamma_{\perp}) \tag{10.39}$$

$$\dot{\mathscr{E}}=\kappa\left(\mathscr{E}_i-\mathscr{E}-\mathrm{i}\Theta\mathscr{E}-2C\mathscr{E}\frac{1-\mathrm{i}\bar{\Delta}}{1+\bar{\Delta}^2+|\mathscr{E}/\mathscr{E}_s|^2}\right) \tag{10.40}$$

令

$$x=\mathscr{E}/\mathscr{E}_s=2g\mathscr{E}/\sqrt{\gamma_\parallel\gamma_\perp} \tag{10.41}$$

$$y=\mathscr{E}_i/\mathscr{E}_s=2g\mathscr{E}_i/\sqrt{\gamma_\parallel\gamma_\perp} \tag{10.42}$$

$$\dot{x}=\kappa\left[y-x\left(1+\frac{2C}{1+\bar{\Delta}^2+x^2}\right)-\mathrm{i}x\left(\Theta-\frac{2\bar{\Delta}C}{1+\bar{\Delta}^2+x^2}\right)\right] \tag{10.43}$$

在定态条件，$\dot{x}=0$，由(10.43)式得到光学双稳态的状态方程

$$|y|^2=|x|^2\left\{\left[1+\frac{2C}{1+\bar{\Delta}^2+x^2}\right]^2+\left[\Theta-\frac{2C\bar{\Delta}}{1+\bar{\Delta}^2+x^2}\right]^2\right\} \tag{10.44}$$

其中 $\bar{\Delta}$，Θ 和 C 对双稳态特性有决定性影响. Δ 是原子的归一化失谐参数，见(10.6)式. 对 Θ 和 C 需稍加说明.

(1) Θ 是腔的失谐参数，而且由于干涉仪理论和 M－B 方程定义的 Θ 相同. 由(10.17)式可知，光场在腔内循环一周时(时间为 $2L/c$)，光场与腔的谐振条件的位相偏离用 θ 表示，所以

$$\theta=(\omega_c-\omega)(2L/C) \tag{10.45}$$

$$\Theta=\theta/(1-R)=\frac{(\omega_c-\omega)}{(1-R)(2L/C)} \tag{10.46}$$

其中 $(1-R)$ 是光强的单程损耗或光场往返一次的损耗，$(2L/c)$ 是光在腔内往返一次的时间，所以 $(1-R)c/(2L)$ 正是光场损耗系数 κ，即

$$\Theta=\frac{(\omega_c-\omega)}{\kappa}=\delta/\kappa \tag{10.47}$$

这与(10.38)式一样. 若采用环形腔，环行一周的长度是 $\mathscr{L}$，则 Θ 变为 $(\omega_0-\omega)\mathscr{L}/[c(1-R)]$

(2) C 是合作参数. 在超荧光理论中，用如下合作参数 γ_R

$$\gamma_R=-D_0g^2/\kappa \tag{10.48}$$

由 C 的定义(10.39)式可知

$$C=\frac{1}{2}\gamma_R/\gamma_1 \tag{10.49}$$

因此 C 与超荧光理论的合作参数的物理意义相同. 注意 M－B 方程中 $D_0=N_2-N_1$，对于光学双稳态中的介质(无激发或反转)，$D_0<0$，所以 $C>0$.

下节将利用光学双稳态的状态方程来讨论各个参数对光学双稳态特性的影响.

10.4 吸收双稳态与色散双稳态

本节先分别讨论纯吸收双稳态和纯色散双稳态，最后讨论既有吸收又有色散的情况.

10.4.1 纯吸收双稳态

我们已反复指出，当光与原子发生共振或近共振作用时，光的吸收作用是主要的，而色散作用可忽略不计. 因此，纯吸收型的双稳态的前提条件是

$$\bar{\Delta}\approx 0 \tag{10.50}$$

这时，双稳态的状态方程(10.44)简化为

$$y^2=x^2\left[\left(1+\frac{2C}{1+x^2}\right)^2+\Theta^2\right] \tag{10.51}$$

如当入射的激光与腔也是共振的，则 $\Theta=0$，上式变为

$$y=x\left(1+\frac{2C}{1+x^2}\right) \tag{10.52}$$

注意 y 是入射的光场，x 是透射光场. 光学双稳态的条件要求 $x-y$ 曲线有两个极值.

由(10.52)式取导数 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=0$，得到

$$x^4+2(1-C)x^2+(2C+1)=0 \tag{10.53}$$

此方程有实根的条件是

$$\left.\begin{aligned}&4C(C-4)\geqslant 0\\&C\geqslant 4\end{aligned}\right\} \tag{10.54}$$

这就是产生光学双稳态的条件. 图 10.6 所示的是 $x-y$ 曲线与 C 的关系.

纯吸收型双稳态的物理原因是非线性吸收与反馈. 当入射光强较弱时，输出与输入呈线性关系(线性吸收). 入射光强增大到一定程度，出现饱和吸收，使腔内光强变强. 腔内光强越强，则吸收作用越小，腔内光强就更强，这是正反馈. 当入射光强达到特定值时，输出光强的增长斜率变为无穷大，发生从下分支到上分支的跳跃.

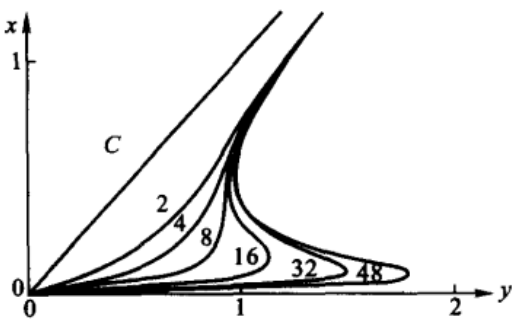


图 10.6 光学双稳态曲线($\bar{\Delta}=0,\Theta=0$)

10.4.2 纯色散双稳态

当光的吸收作用可以忽略，只有色散作用时，这时光与介质作用产生的双稳态称为纯色散型双稳态.

对于纯色散型双稳态，

$$\bar{\Delta}^2 \gg 1+x^2 \tag{10.55}$$

$$\frac{1}{1+\bar{\Delta}^2+x^2}=\frac{1}{\bar{\Delta}^2}\frac{1}{1+\dfrac{1+x^2}{\bar{\Delta}^2}}$$

$$\approx\frac{1}{\bar{\Delta}^2}\left(1-\frac{x^2+1}{\bar{\Delta}^2}\right) \tag{10.56}$$

这时光学双稳态的状态方程(10.44)变为

$$y^2=x^2\left\{1+\left[\theta-\frac{2C}{\bar{\Delta}}+\frac{2Cx^2}{\bar{\Delta}^3}\right]^2\right\} \tag{10.57}$$

纯色散型双稳态的产生机理也是显而易见的. 色散效应影响到介质折射率,而且色散与光强有关,这样使折射率与光强有关. 非线性折射率与干涉仪的反馈作用便会产生双稳态.

将纯吸收双稳态与纯色散双稳态加以比较是很有趣的:

(1) 由以上讨论,$\bar{\Delta}^2 \gg (1+x^2)$时可发生色散双稳,即光强($x^2$)很弱时即有可能发出双稳态. 而纯吸收双稳态有赖于饱和吸收,同时需要较高的光强.

(2) 由数值计算可以知道,$\bar{\Delta}=\Theta=0$ 时,双稳态的 S 形曲线的开关点 y_m 和 y_M 的间隔最大,这便于实验观察.

(3) 当 $\bar{\Delta}\neq 0, \Theta\neq 0$ 时,有可能在输入光强较低时即出现显著的双稳曲线.

10.4.3 吸收与色散的双稳

当 $\bar{\Delta}\neq 0$,但 $\bar{\Delta}\approx 1+x^2$ 时,光与二能级介质的作用既有吸收,也有色散. 这时应该用光学双稳态的状态方程(10.44). 极点的计算可由(10.44)式得出出现双稳态的条件:

$$x_{\text{inf}}=\frac{2C-\Theta\bar{\Delta}+1}{C+\Theta\bar{\Delta}-1}(\bar{\Delta}^2+1) \tag{10.58}$$

双稳态条件要求

$$\left.\begin{aligned} &x_{\text{inf}}>0\\ &\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}x_{\text{inf}}<0 \end{aligned}\right\} \tag{10.59}$$

其中第一个条件保证光场是正的($x>0$),第二个条件保证 $y-x$ 曲线有一个极大点和一个极小点.

当 $\Theta\bar{\Delta}>0$ 时,第一个条件变为

$$2C>\Theta\bar{\Delta}-1 \tag{10.60}$$

第二个条件要求

$$(2C-\Theta\bar{\Delta}+1)^2(C+4\Theta\bar{\Delta}-4)>27C(\bar{\Delta}+\Theta)^2 \tag{10.61}$$

由双稳条件(10.60)和(10.61)可知：

(1) $\bar{\Delta}=0,\Theta=0$ 时，(10.61)给出 $C>4$

(2) $\bar{\Delta}=0$ 时，即纯吸收双稳态，双稳条件为

$$(2C+1)^2(C-4)>27C\Theta^2 \tag{10.62}$$

(3) 当 $C>4$ 时，$\bar{\Delta}$ 和 $\bar{\Theta}$ 只有在一定范围才可能保证出现双稳态. 在 $\bar{\Delta}-\bar{\Theta}$ 平面内，$\bar{\Delta}$ 和 $\bar{\Theta}$ 必须处于围绕原点($\bar{\Delta}=\bar{\Theta}=0$)的有限的区域内.

(4) 当 $\bar{\Delta}\neq0$ 时，由(10.60)式可知，若 $\Theta>(2C+1)/\Delta$ 则不可能出现双稳态，即光与腔的失谐参数不能太大.

最后还应指出，当考虑入射光强的横向分布(例如高斯分布)时，双稳态的曲线应有些变化. 在实验中，这表现在开关点 y_m 和 y_M 之间的间隔变小. 这是因为，入射光束的平均光强可能没达到开关点(y_M^2)，由于光束横向分布不均匀，例如中心部分最强，这样中心部分的光强可能已超过 y_M^2，使开关打开(即从下分支跳到上分支).

10.5 光学双稳态的相变类比

本节以共振作用的纯吸收型双稳态来说明光学双稳态的相变类比. 如前所述，激光器在阈值附近的行为是非平衡态的二级相变. 现在说明吸收型双稳态则是非平衡态一级相变.

10.5.1 光学双稳态的等效势函数

从统计物理的知识，我们知道平衡态相变的基本特征是输出与输入呈 S 形曲线，例如磁滞回线. 在相变点，发生一级相变的系统的熵是不连续的. 因此一级相变又称为非连续相变.

现在研究光学双稳态的相变的动态过程. 我们考虑原子弛豫时间远小于腔的弛豫时间的情况(类似 A 类激光器)，即 $\kappa\ll\gamma_{\parallel},\gamma_{\perp}$ 这时，光学双稳态的 M－B 方程变为(10.43)式. 在入射的激光与原子共振($\bar{\Delta}=0$)并与腔共振($\Theta=0$)时，方程(10.43)变为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\kappa\left(y-x-\frac{2Cx}{1+x^2}\right) \tag{10.63}$$

其中 y 仍是代表输入的光场，x 代表输出. 显然，在定态时，由此方程即得到共振作用的双稳态方程(10.52).

定义等效的势函数 $V_y(x)$，将方程(10.63)写成

$$\kappa^{-1}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}V_y(x)}{\mathrm{d}x} \tag{10.64}$$

其中

$$-V_y(x)=\int\left(y-x-\frac{2Cx}{1+X^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=yx-\frac{1}{2}x^2-C\ln(1+x^2) \tag{10.65}$$

$V_y(x)$的下标表示输入光场 y 对函数或曲线 $V(x)$的影响. 显然,方程(10.64)与质量为 m 的经典粒子在势函数 V 中的过阻尼运动相似,后者的运动方程是

$$m\frac{\mathrm{d}^2x'}{\mathrm{d}t^2}+\Gamma\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'} \tag{10.66}$$

其中 x'是粒子坐标,Γ 是阻尼. 当 $\Gamma\gg m$(即过阻尼)时,可略去 x',方程(10.66)与(10.64)相似.

由定义(10.64)式可知,光学双稳态的定态即$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=0$,对应于 $V_y(x)$的极点,即

$$\frac{\mathrm{d}V_y(x)}{\mathrm{d}x}=0 \tag{10.67}$$

图 10.7 绘出了在不同的输入光场(即 y 值)时的 $V_y(x)$曲线. $V_y(x)$的极点即对应光学双稳态的定态解. 当入射的光场 y 从 0 逐渐增加时,$V_y(x)$曲线依次如图 10.7(a)、(b)、(c)和(d)所示. 当 $0<y<y_1$,$V_y(x)$只有一个极点,x 在下分支. 当 $y_1<y<y_2$ 时,$V_y(x)$有三个极点:极大点是不稳定的,对应 S 形曲线的虚线部分(图(e));两个极小点是稳定的. 但 y 从 0 增强到(y_1,y_2)时,x 仍在下分支. 当 $y=y_2$ 时,对应于临界点,x 将从下分支跳跃到上分支. y 再增强,x 仍在上分支.

当入射光场 y 从 $y>y_2$ 逐渐减弱时,$V_y(x)$的变化依次如图 10.7(d)、(c)、(b)和(a)所示. 当 $y=y_2$ 时,x 仍在上分支. y 继续减弱到 $y_1<y<y_2$,这时有两个稳态,用"小球"代表的态仍在上分支. 当 $y=y_1$ 时,又到达临界点,x 将从上分支跳跃到下分支.

请特别注意,当 $y_1<y<y_2$ 时,输出光场 x 究竟在上分支还是下分支呢? 这完全取决于输入光场的变化方向. 当 y 从 $y=0$ 增强到 $y_1<y<y_2$ 时,x 在下分支;当 y 从 $y>y_2$ 减弱到 $y_1<y<y_2$ 时,则 x 在上分支. 这就是说,系统的状态与"过程的发展方向有关",或有记忆效应(似乎记得 y 是从 0 增强到 y_2 还是从 $y>y_2$ 降到 $y\approx0$). 这正是各种系统的双稳态的共同的特征.

10.5.2 非平衡态一级相变的"临界慢化"

由 $V_y(x)$的曲线可知,临界点附近($y=y_1$ 或 $y=y_2$ 时)曲线变得平

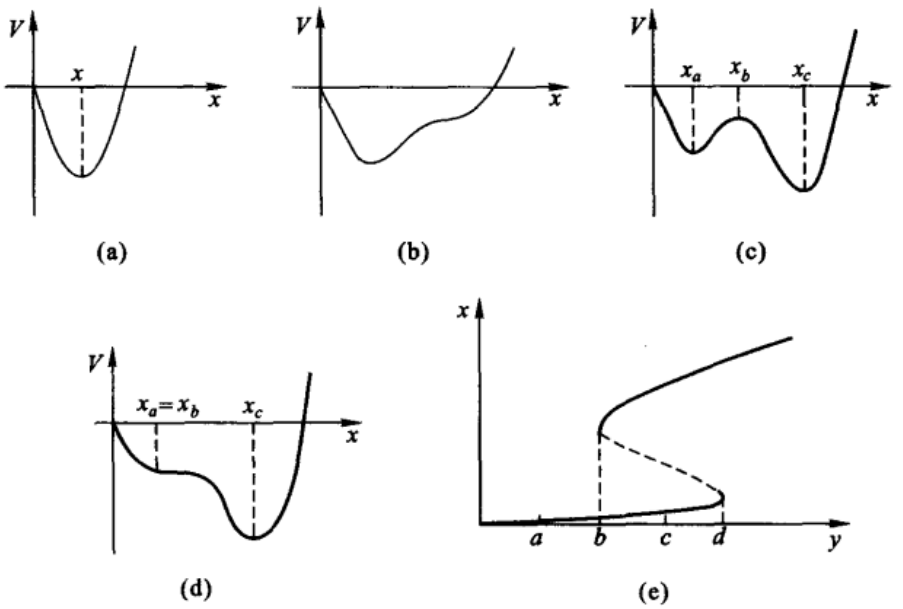


图 10.7 $V_y(x)$曲线(入射光场 y 从 0 逐渐增加时)

(a)$y<y_1$,x 在 S 型曲线的下分支;(b)$y=y_1$,x 仍在下分支;(c)$y_1<y<y_2$,x 在下分支;(d)$y=y_2$,在临界点(x 将从下分支跳到上分支);(e)图(a)～(d)在双稳态曲线上对应的位置

坦.这样使得系统趋向定态的过程变慢,或所需的时间拉长了.这就是著名的“临界慢化”现象(critical slowing down).

对方程(10.63)求数值解,可清楚显示出“临界慢化”,见图 10.8,图中取 $C=20$,临界点 $y_M=21.026\ 4$.当入射光场 y 分别取 22,21.1,21.04 和 21.03 时,输出光场从下分支跳到上分支所需的时间越来越长.光学双稳态的“临界慢化”已被实验证实.

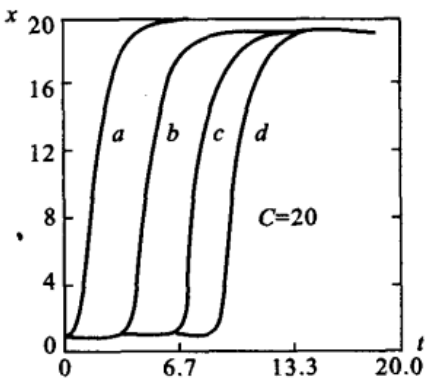


图 10.8 光学双稳态的“临界慢化”

($C=20$,$y_M=21.026\ 4$,时间 t 以 κ^{-1} 为单位)(a)$y=22$;(b)$y=21.1$(c)$y=21.04$;(d)$y=21.03$

最后应特别指出,“临界慢化”的“慢”,是相对而言的,即趋向定态所需的时间与系统的最长的本征时间比较起来,前者远大于后者.例如这里讨论的光学双稳态器件,最长的本征时间是 $1/\kappa$,这就意味着,在做光学双稳态实验时,为了观察到清楚而稳定的 S 形曲线,入射光场从零到大,再从大到零(例如 y 呈钟形脉冲)所需的时间必须长到 $1/\kappa$ 的 100～1 000 倍.否则,如果 y 慢化得太快(时间太短),则 $x-y$ 曲线将不会呈 S 形,而是近似圆形.这就观察不到双稳态曲线.

10.6 起伏或噪声对光学双稳态的影响

在以上几节介绍的光学双稳态理论中,并没有考虑起伏或噪声的影响.然而,在光学双稳态的研究中,起伏或噪声(例如入射光的光场起伏和非线性介质的自发辐射等)有非常重要的影响.起伏或噪声可导致两个稳态之间的自发的、无规则的跳跃.这样,两个稳态便不是绝对稳定的,而只是亚稳态.这对双稳态的应用十分不利.例如在记忆元件中,这种自发跳跃相当于在“0”和“1”之间的无规跳跃.下面就来研究这些问题.

首先从统计物理学的观点讨论一下等效势函数 $V_y(x)$ 的物理意义.与激光器的等效势函数相似,光学双稳态的 $V_y(x)$ 也相当于广义的自由能.$V_y(x)$ 在某点 x_m 有极小值,则该系统的序参数 x 等于 x_m 的几率最大.在图 10.9 中,$V_y(x)$ 的曲线便可与几率联系起来.定义光场的分布函数 $P(x,t)$,切记不可将这里的 $P(x,t)$ 与极化强度混淆.$P(x,t)\mathrm{d}x$ 表示在时刻 t 归一化的光场 x 的值处于 x—$x+\mathrm{d}x$ 之间的几率.当 $t\to\infty$ 时,$P(x,t)$ 趋向定态值 $P(x)$.一般情况 $P(x)$ 是正的,归一化条件为

$$\int_0^\infty P(x)\mathrm{d}x = 1 \tag{10.68}$$

当 $P(x)$ 是正值的时候,可将 $P(x)$ 写成

$$P(x)=\frac{1}{N_n}\exp\left(-\frac{V_y(x)}{q}\right) \tag{10.69}$$

N_n^{-1} 是归一化常数.注意不要把这里的 $P(x)$ 与极化强度混淆,同时注意在激光物理和量子光学问题中,$P(x,t)$ 可以是负的(见第 20 章).(10.69)式与 $V_y(x)$ 的对应关系见图 10.9.

几率分布函数 $P(x,t)$ 一般由福克-普朗克方程求出,而(10.69)式中的 q 则与噪声或起伏密切相关.在光学双稳态器件中噪声的来源有三种:

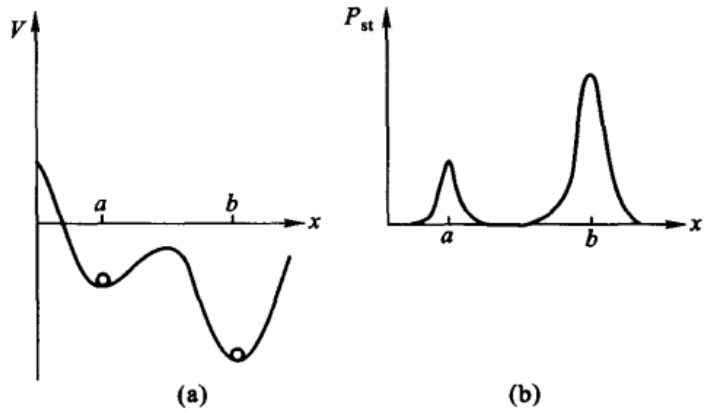


图 10.9 广义自由能 $V_y(x)$与定态的几率分布函数 $P(x)$

(1) 外部噪声,即输入光的起伏.

(2) 热噪声.

(3) 量子噪声(来自系统的量子性),例如自发辐射.

在光学双稳态方程中唯象地引入噪声或起伏项 $f(t)$,则有

$$\dot{x}=\kappa\left(y-x-\frac{2Cx}{1+x^2}\right)+f(t) \tag{10.70}$$

假定 $f(t)$有如下的性质

$$\langle f(t)\rangle=0 \tag{10.71}$$

$$\langle f(t)f(t')\rangle=2D_f\delta(t-t') \tag{10.72}$$

可以验证,方程(10.70)与如下的普朗克方程完全等价

$$\frac{\partial P}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}\left\{\kappa\left(y-x-\frac{2Cx}{1+x^2}\right)P\right\}+\frac{D_f}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \tag{10.73}$$

在定态时,$\frac{\partial P}{\partial t}=0$,则

$$\kappa\left(y-x-\frac{2Cx}{1+x^2}\right)P=D_f\frac{\partial P}{\partial x} \tag{10.74}$$

由(10.74)式得到的定态分布函数记为 P_{st},

$$P_{st}=\frac{1}{N_n}\exp[-V_y(x)/(D_f/\kappa)] \tag{10.75}$$

其中的 $V_y(x)$即由(10.65)式给出. D_f/κ 即等于(10.69)中的 q.

当分布函数 P 只有一个极小点时,对应于单稳态. 当 P 有两个极小点时,则有双稳态.

起伏参量 q 或 D_f/κ 决定几率分布的宽度. q 越小,则图 10.9(b)的峰的宽度越窄,反之,宽度就越宽,这样在双稳态的两个跳跃点 y_m 和 y_M 附

近，也有一定的几率跳到另一个分支. 这会使在实验中观察到的回滞曲线比理论预言的更窄些.

利用定态分布函数还可以计算输出光场的平均值

$$\langle x\rangle=\int_0^{\infty} P_{st}(x)\mathrm{d}x \tag{10.76}$$

如果忽略量子噪声，只考虑热噪声和外部噪声，则$\langle x\rangle-y$曲线正巧把双稳态的S形曲线平分为面积相等的两部分. 这就是麦克斯韦定则，如图10.10所示. 如果考虑量子噪声，则$\langle x\rangle$的曲线与图10.10有些区别.

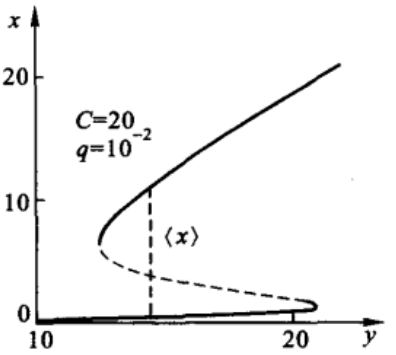


图10.10 双稳态S形曲线与透射光场平均值$\langle x\rangle$曲线的关系

最后特别强调，即使双稳态器件处于图10.9所示的一个稳定态，例如(a)，它也有一定的几率穿透位垒ΔV而到另一个稳定态，起伏越大，穿透的几率越大. 就平均而言，穿透所需的时间正比于$\exp[-\Delta V/q]$.

10.7 光学双稳态实验

光学双稳态的实验工作硕果累累. 本节只介绍几种光学双稳态的器件. 有关光学双稳态的混沌实验将在第12章介绍.

10.7.1 金属蒸气的色散型光学双稳态

美国的吉布斯(Gibbs)等，将钠蒸气管置于两个平行的反射镜之间，用可调谐的染料激光器作为注入信号，照射钠蒸气，染料激光频率调谐到钠的双谱线之一，他们于1976年首次观察到“本征型”的光学双稳态. 钠蒸气压力约为$1.33\times10^{-2}\sim1.33\times10^{-3}$ Pa. 入射的激光功率密度约200～500 $\mathrm{mW/cm^2}$.

他们在实验中对染料激光进行了稳频. 当染料激光频率调谐时(仍在钠的双谱线之一的多普勒线形内)，观察到了双稳态. 但是发现实验结果与失谐参数($\Delta=\bar{\omega}-\omega_2$)是不对称的. 而由极化率的公式可知，其实部$\chi'$对$\Delta$是不对称的，而虚部$\chi''$对$\Delta$是对称的. 实部$\chi$则对应于色散. 因此，吉布斯等人的钠蒸气光学双稳态必然是色散型双稳态而不是吸收型双稳态.

吉布斯等人的实验的重要意义在于：

(1) 这纯粹是光与二能级原子的作用引起的，从而首次证明了本征型双稳态的存在.

(2) 纯色散型的光学双稳态是可实现的.

(3) 入射的激光束的横向分布是不均匀的，但这种横向效应并没有破坏双稳态效应.

10.7.2 半导体光学双稳态

由于光学双稳态研究的应用背景主要是光信息处理与光计算机，所以半导体光学双稳态的研究格外引人瞩目. 它的体积小、响应快、耗能少、工艺比较成熟.

1979 年，吉布斯等人和米勒等人分别用砷化镓和锑化铟实现了光学双稳态. 吉布斯等人用的是分子束外延生长的 GaAlAs - GaAs - GaAlAs“三明治”结构，其中的 GaAs 只有 4.1 μm 厚，而两层 GaAlAs 厚度都是 0.21 μm. 衬底材料是厚度为 150 μm 的 GaAs. 衬底上腐蚀直径为 1～2 mm 的小孔，使激光束通过. 最初的实验工作温度为 5～120 K. 入射的激光波长为 $\lambda=0.8$ μm. 开关功率密度约 1 mW/μm^2 开关时间小于 40 μs.

应该特别指出，由于他们是在入射光与 GaAs 吸收峰远离共振时观察到双稳态，所以这是色散型双稳态. 在非线性折射率公式中，$n=n_0+n_2I$，GaAs 的 $n_2=0.4$ cm^2/kW. 本章关于二能级系统的光学双稳态的半经典理论不能直接用于半导体材料，但能提供启发. 1982 年，吉布斯等人用 GsAs 实现了室温的光学双稳态，但其机理既不是色散型，也不是吸收型，而是热效应.

米勒等人的 InSb 光学双稳态实验，InSb 样品大小为 5×5 mm^2，厚 560 μm. 工作温度为 5 K. 入射激光为 CO 激光，其波长 $\lambda\approx5$ μm. 开关光强为 15 μW/μm^2，InSb 的 $n_2\approx0.1$ cm^2/kW. 开关时间是 0.5 μs. 他们利用 InSb 的平行反射面(无涂层)作为法布里-珀罗干涉仪.

图 10.11 所示的是 InSb 的光学双稳态实验曲线. 此外，还观察到更复杂的曲线(双双稳态等). 在实验中，用其他半导体材料也能观察到光学双稳态.

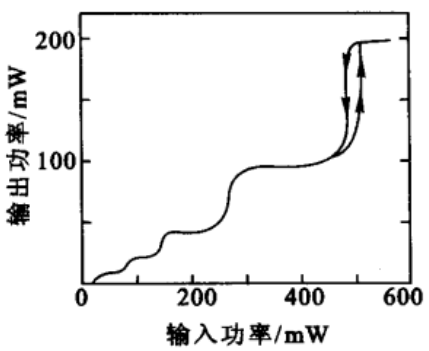


图 10.11 InSb 的光学双稳态实验曲线

10.7.3 利用电光效应的光学双稳态

P. W. Smith 等利用法布里-珀罗干涉仪，其中放置电光晶体 KDP. 输出光强经过分束之后，光变为直流电解，经过放大后再反馈到电光晶体上. 这样既有非线性又有正反馈，故可产生双稳态. 非线性折射率 $n=n_0+n_2 I$，其中 I 是 KDP 晶体中的光强. 这种非线性是外加电压控制的，而不是光与物质作用的固有性质，因此称为非本征型的光学双稳态，以区别于前面讲的本征型的光学双稳态.

类似的实验还有许多种，例如在法布里-珀罗干涉仪中放置 $LiNbO_3$ 晶体代替 KDP；在迈克尔逊干涉仪内放置 KDP 或 $LiNbO_3$ 并加电反馈，在干涉仪内放置液晶. 还有的光学双稳态实验分别利用非线性的全内反射、非线性表面反射、自聚焦、声光效应、光纤非线性. 还有集成化的光学双稳态器件. 至于以光学双稳态为基础的光计算机到目前还没实现.

习题与思考

(1) 为什么光学双稳态的 S 形曲线中，上、下跳跃的点(分别对应入射光场 y_m 和 y_M)不重合？

(2) 由麦克斯韦-布洛赫方程出发，直接推导共振条件的双稳态的状态方程，并计算出现双稳态的条件.

(3) 计算色散型双稳态器件出现双稳态的条件.

(4) 计算吸收型双稳态器件出现双稳态的条件.

(5) 推导有注入信号的激光器的双稳态状态方程，并讨论它与本章的双稳态方程有何异同？

(6) 如果考虑到气体介质的多普勒加宽，应将 M-B 方程怎样推广？

(7) 如果考虑激光束的横向分布，应将 M-B 方程怎样推广？对实验工作有何意义？

参 考 文 献

[1] Szöke A, Daneu V, Goldhar J, et al. Bistable optical element and its applications. Appl. Phys. Lett., 1969, 15: 376-380.

[2] McCall S L. Instabilities in continuous wave light propagation in absorbing. Phys. Rev., 1974, A9: 1515-1520.

[3] Gibbs H M, McCall S L, Venkatesa T N C. Differential gain bistability using a sodium-filled Faburg-Perot interferometer. Phys. Rev. Lett., 1976, 36: 1135-1140.

[4] Bonifacio R, Lugiato L A. Cooperative effects and disability for resonance fluorescence. Opt. Comm. ,1976,19:172 - 175.

[5] Lugiato L A. Theory of optical bistability. In: Wolf ed. Progress in optics. Amsterdam: North Hollang,1984,21. 71.

[6] Bowden C M, Gibbs H M, McCall S L. Optical bistability. New York: Plenum press,1984.

[7] 李淳飞. 光学双稳态器件及其应用. 物理学进展,1986,4:29 - 53.

[8] 叶佩弦,张绮香. 双光子共振介质光学双稳态特性的理论研究. 物理学报,1982,6:73 - 87.

[9] 李福利. 双光子光学双稳态的研究. 中国激光,1982,8:6 - 7.

第 11 章　位相复共轭光学

本章先介绍位相复共轭的概念，然后介绍产生位相复共轭的典型方法，包括四波混频和受激散射. 比较详细地介绍四波混频的理论.

11.1　位相复共轭光学的概念

11.1.1　位相复共轭的定义及特点

一个振荡频率为 ω，传播方向为 z 的单色波的形式为

$$E=\frac{1}{2}E_0\exp[-\mathrm{i}(\omega t-kz)]+\text{c. c.}$$

$$\equiv\frac{1}{2}A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}+\text{c. c} \tag{11.1}$$

$$A\equiv E_0\exp[\mathrm{i}kz] \tag{11.2}$$

其中 A 是复振幅. 若另一个波的振幅为 A^*，该波的形式为

$$E_{\mathrm{pc}}=\frac{1}{2}A^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}+\text{c. c.} \tag{11.3}$$

则 E_{pc} 是 E 的位相复共轭. 当然它们互为复共轭. 简言之，把一个波的复振幅 A 换为 A^*，则得到该波的位相复共轭(phase conjugation).

用非线性光学方法可产生位相复共轭的光波. 凡是能够产生位相复共轭的装置，称为“位相复共轭器”或“位相复共轭反射镜”. 位相复共轭光学的任务就是研究位相复共轭的原理、产生方法及应用.

图 11.1 中的曲线清楚表明位相复共轭的特性及应用原理. 图 11.1(a)

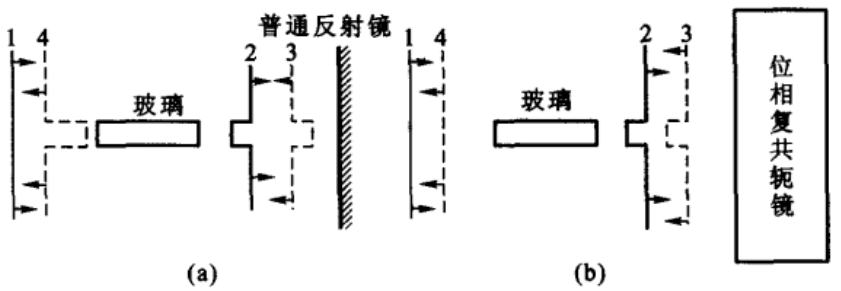


图 11.1　位相复共轭的特性及应用原理

(a)普通反射镜的作用　(b)位相复共轭反射镜

表示平面波 1 经过畸变介质(例如玻璃),波前发生畸变 2,经过普通反射镜之后,波前如右边的虚线 3 所示,再一次通过畸变介质之后,畸变增大 4. 图 11.1(b)表示平面波第一次通过畸变介质,波前发生畸变 2. 经过位相复共轭反射镜的反射,波前如右边的虚线 3. 特别奇妙的是,该波再一次通过畸变介质之后,畸变消除了,波前又恢复为平面 4.

设畸变介质所引起的波前畸变为 $e^{i\phi(x,y)}$,经过位相复共轭镜的反射,波前变为它的复共轭 $e^{-i\phi(x,y)}$,即

$$e^{i\phi(x,y)} \rightarrow e^{-i\phi(x,y)} \tag{11.4}$$

当波前为 $e^{-i\phi(x,y)}$ 的这个波(位相复共轭波)反向通过畸变介质后,该介质的畸变作用即相当于乘因子 $e^{i\phi(x,y)}$,故有

$$e^{-i\phi(x,y)} \cdot e^{i\phi(x,y)} = 1 \tag{11.5}$$

这样就把畸变消除了,或把波前恢复了.

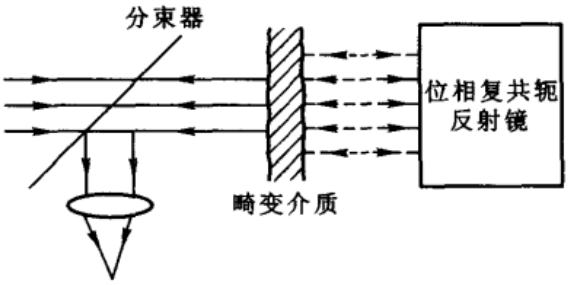


图 11.2 位相复共轭反射可消除畸变

图 11.2 所示的是一种实验示意图. 通常,一束近似平行的激光束,通过表面被酸腐蚀的窗玻璃,发生畸变,经过普通反射镜反射,再反方向通过该玻璃片,畸变更严重. 经过分束器后,用透镜聚焦,便不可能聚成小点. 然而,经过位相复共轭反射,再反方向通过该玻璃片,光束则恢复为平行光,经透镜聚焦,又可聚成一个小点,如果用激光束传输图像(例如有人传输猫的照片),传输图像的光束,第一次通过畸变介质之后,就已经看不清图像. 但是,经过位相复共轭反射镜的反射,在反方向通过原来的畸变介质之后,畸变又消除,则可看清原来的图像了.

11.1.2 位相复共轭与时间倒反(time inverse)

如果分别写出(11.1)和(11.3)式的二项,即

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}Ae^{-i\omega t} + \frac{1}{2}A^* e^{i\omega t} \\ &= \frac{1}{2}E_0 e^{-i\omega t + ikz} + \frac{1}{2}E_0^* e^{i\omega t - ikz} \end{aligned} \tag{11.6}$$

$$E_{pc}=\frac{1}{2}A^{*}\,e^{-i\omega t}+\frac{1}{2}Ae^{i\omega t}$$

$$=\frac{1}{2}E_0^{*}\,e^{-i\omega t-ikz}+\frac{1}{2}E_0\,e^{i\omega t+ikz} \tag{11.7}$$

比较(11.6)和(11.7)式,可知位相复共轭波与原来的波的关系是

$$\left.\begin{aligned}\omega&\rightarrow\omega\\ k&\rightarrow -k\\ E_0&\rightarrow E_0^{*}\end{aligned}\right\} \tag{11.8}$$

即频率一样,传播方向相反,慢变振幅换成复共轭.实际上,令 E 的表达式中的时间倒反,就得到 E_{pc},即当 $t\rightarrow -t$ 时

$$E(-t)=E_{pc}(t) \tag{11.9}$$

因此,位相复共轭就相当于时间倒反.

设想一个光脉冲经过位相复共轭反射之后,它的波前(等相位面)发生倒反.图 11.3(a)表示普通反射镜的作用,(b)表示位相复共轭反射引起的"时间倒反"或"波前倒反"(wavefront reverse).显然,在位相复共轭反射时,光束按原路"退"回去,哪来哪去.这不服从普通的反射定律.这只是非线性现象不同于线性现象的又一例证.设想敌方的激光武器攻击我方,从理论上讲,我方可用一个位相复共轭反射器,使敌方的激光束按原路回去而摧毁敌方的发射装置.更有甚者,采取适当方法(例如下面讲的四

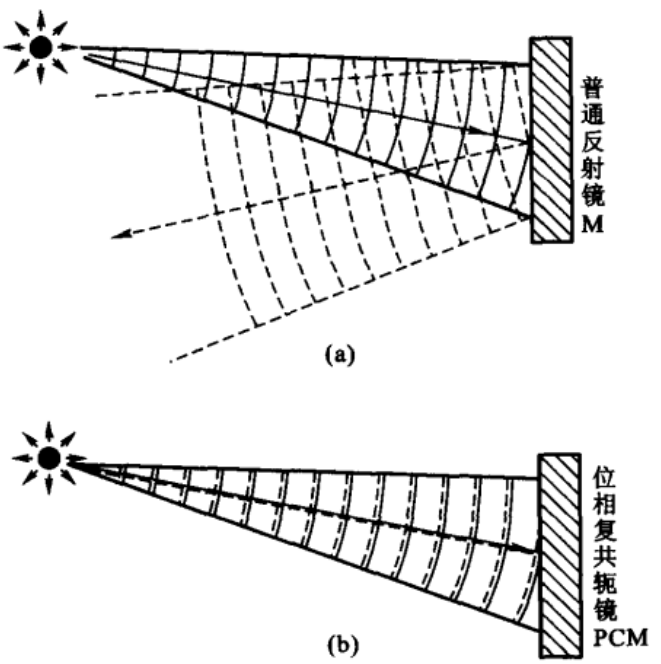


图 11.3 普通反射镜与位相复共轭反射镜

(a)普通反射镜的作用 (b)位相复共轭反射引起"波前倒反"

波混频),还可使位相复共轭反射率大于 1,甚至达到 10^3. 当然,这不违背能量守恒,只是把其他方向的激光能量的一部分转换为位相复共轭光罢了.

11.2 四波混频与实时全息

四波混频是产生位相复共轭的重要方法. 本节介绍四波混频的概况,然后用"实时全息"的观点说明用四波混频产生位相复共轭的原理.

11.2.1 四波混频

图 11.4 所示的是用四波混频产生位相复共轭的示意图,其中 E_1 和 E_2 是方向相反的激光束. 假设它们的频率相等,这时,频率为 ω 的第三个激光束入射到这个非线性介质时,则产生位相复共轭光束,这时

$$\omega_1=\omega_2=\omega_3=\omega_4=\omega$$
$$\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2=0,\boldsymbol{k}_3+\boldsymbol{k}_4=0 \tag{11.10}$$

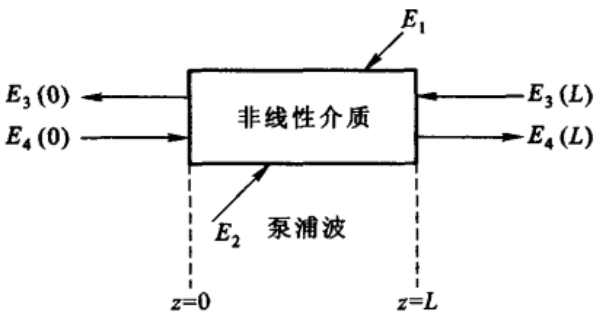


图 11.4 四波混频与位相复共轭

由于这四个波的频率相等,这种四波混频称为简并四波混频. 若 $\omega_3=\omega_4\neq\omega_1=\omega_2$,则称为非简并四波混频.

用于四波混频的非线性介质包括透明的非线性介质、二能级介质、光敏折射材料等. 用实时全息的概念很容易理解用四波混频产生位相复共轭的原理.

11.2.2 实时全息

Gerritsen 在 1967 年,Steponov 等在 1971 年分别提出了实时全息的概念. 1977 年,Hellwarth 和 Yariv 分别建议用四波混频产生位相复共轭. 实际上后者是沿用与发展了实时全息(real time holography)概念.

图 11.5 是实时全息示意图. 图中(a)和(b)分别是全息的记录和再现

过程. 在记录过程中,参考光束为 $\mathscr{E}_1$,物光束为 $\mathscr{E}_p$. 二者在记录介质上干涉. 全息片的透射函数为

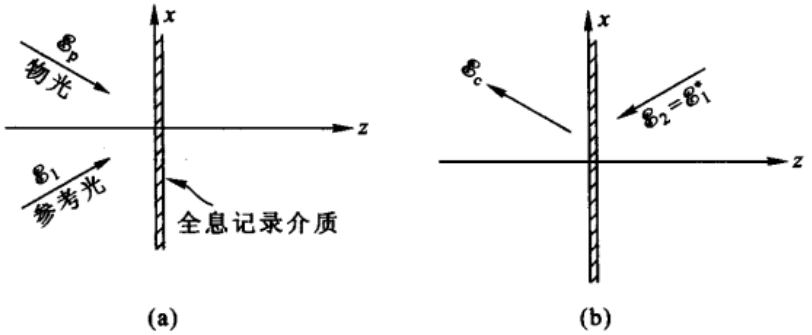


图 11.5 实时全息示意图

(a)记录过程 (b)再现过程

$$T\propto(\mathscr{E}_p+\mathscr{E}_1)(\mathscr{E}_p^*+\mathscr{E}_1^*)=|\mathscr{E}_p|^2+|\mathscr{E}_1|^2+\mathscr{E}_p\mathscr{E}_1^*+\mathscr{E}_1\mathscr{E}_p^* \quad (11.11)$$

再现过程中,用光束 $\mathscr{E}_2$ 照射全息片,$\mathscr{E}_2$ 与参考光束的方向相反,这样 $\mathscr{E}_2=\mathscr{E}_1^*$. 信号的光束 $\mathscr{E}_c$ 为

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_c=T\mathscr{E}_2&\propto(|\mathscr{E}_p|^2+|\mathscr{E}_1|^2+\mathscr{E}_p\mathscr{E}_1^*+\mathscr{E}_p^*\mathscr{E}_1)\mathscr{E}_1^*\\&=(|\mathscr{E}_p|^2+|\mathscr{E}_1|^2)\mathscr{E}_1^*+(\mathscr{E}_1^*)^2\mathscr{E}_p+|\mathscr{E}_1|^2\mathscr{E}_p^*\end{aligned} \quad (11.12)$$

其中右边第三项就是位相复共轭项

$$\mathscr{E}_c\propto|\mathscr{E}_1|^2\mathscr{E}_p^*=|\mathscr{E}_1\mathscr{E}_2|\mathscr{E}_p^* \quad (11.13)$$

即全息的光束是原来的信号光束的位相复共轭. 四波混频即相当于同时

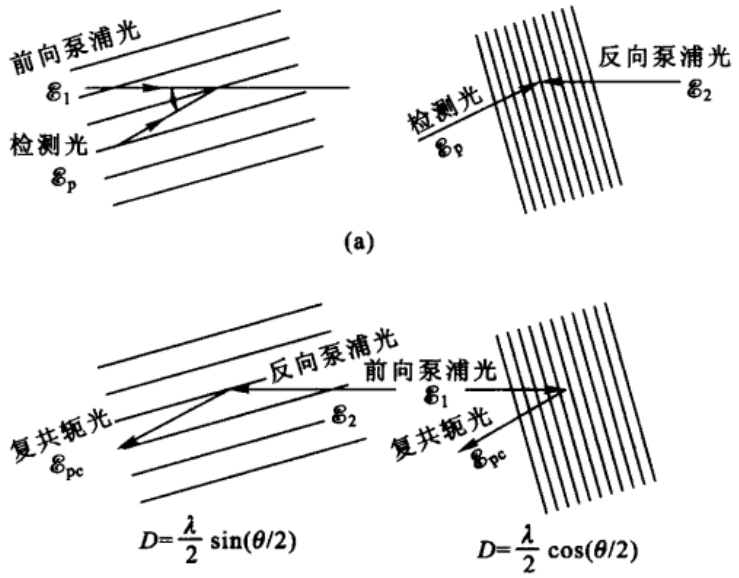


图 11.6 四波混频与光栅衍射

进行记录和再现的全息过程，所以又称为实时全息.

也可从光栅的衍射来理解四波混频过程，见图 11.6，前向的泵浦光 $\mathscr{E}_1$ 与检测光 $\mathscr{E}_p$ 形成光栅(图 11.6(a))，反向泵浦光 $\mathscr{E}_2$ 被上述光栅衍射. 衍射光 $\mathscr{E}_{pc}$ 就是检测光 $\mathscr{E}_p$ 的位相复共轭. 图中 D 是介质的周期.

11.3 二能级系统中四波混频的半经典理论

本节用麦克斯韦-布洛赫方程建立二能级系统中四波混频的半经典理论.

11.3.1 二能级系统中四波混频的极化率

仍用图 11.4 的示意图，泵浦波 E_1 和 E_2 频率相同，而方向相反，作用于二能级介质. 当检测信号 E_p 入射到该介质时，则产生位相复共轭波 E_c. 这时 $\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2=0$，$\boldsymbol{k}_3+\boldsymbol{k}_4=0$，自然满足相位匹配. 故在实验中不必另外解决相位匹配问题.

利用二能级系统的光学布洛赫方程，求定态解，容易得到极化强度

$$\chi(E)=\frac{-2\alpha_0}{k}\frac{\mathrm{i}+\bar{\Delta}}{1+\bar{\Delta}^2+|E/E_s|^2} \tag{11.14}$$

其中 α_0 是小信号吸收系数，k 是波数，$\bar{\Delta}$ 是归一化的失谐参数，$|E_s|^2$ 是饱和参数

$$\left.\begin{aligned}\alpha_0&=\mu^2(-D_0)T_2k/(2\varepsilon_0\hbar)\\ \bar{\Delta}&=(\bar{\omega}-\omega_0)T_2\\ |E_s|^2&=\hbar^2/(T_1T_2\mu^2)\end{aligned}\right\} \tag{11.15}$$

令

$$\left.\begin{aligned}E_0&=E_1+E_2\\ \Delta E&=E_p+E_c\\ E&=E_0+\Delta E\end{aligned}\right\} \tag{11.16}$$

$$\begin{aligned}|E|^2&=E_0E_0^*+E_0\Delta E^*+E_0^*\Delta E+\Delta E^*\Delta E\\ &\approx|E_0|^2+E_0\Delta E^*+E_0^*\Delta E\end{aligned} \tag{11.17}$$

其中用到 $E_0\gg\Delta E$，将(11.17)代入(11.14)

$$\begin{aligned}\chi(E)&=-\frac{2\alpha_0}{k}\frac{\mathrm{i}+\bar{\Delta}}{1+\bar{\Delta}^2+\left|\dfrac{E}{E_s}\right|^2}\\ &=\frac{-2\alpha_0(\mathrm{i}+\bar{\Delta})}{k}\times\end{aligned}$$

$$\frac{1}{1+\bar{\Delta}^2+\left|\frac{E}{E_s}\right|^2+\frac{1}{|E_s|^2}(E_0\Delta E^*+E_0^*\Delta E)} \tag{11.18}$$

从分母中提出$(1+\bar{\Delta}^2+|E/E_s|^2)$，且用$(1+x)^{-1}\approx 1-x,(x\ll 1)$

$$\chi(E)\approx\frac{-2\alpha_0}{k}\frac{\mathrm{i}+\bar{\Delta}}{1+\bar{\Delta}^2+|E_0/E_s|^2}\times \left\{1-\frac{E_0^*\Delta E+\Delta E^* E_0}{|E_s|^2(1+\bar{\Delta}^2+|E_0/E_s|^2)}\right\} \tag{11.19}$$

这样可得到极化强度

$$\begin{aligned}P&=\varepsilon_0\chi(E)E=\varepsilon_0\chi(E)(E_0+\Delta E)\\&\approx\varepsilon_0\chi_0E_0+\varepsilon_0\chi_0\Delta E-\frac{\varepsilon_0\chi_0}{|E_s|^2}\frac{(E_0\Delta E^*+E_0^*\Delta E)E_0}{(1+\bar{\Delta}^2+|E_0/E_s|^2)}\end{aligned} \tag{11.20}$$

其中

$$\chi_0\equiv\chi(E_0)=\frac{-2\alpha_0}{k}\frac{\mathrm{i}+\bar{\Delta}}{1+\bar{\Delta}^2+|E_0/E_s|^2} \tag{11.21}$$

11.3.2 四波混频的方程

将光场写成

$$E_n(r,t)=\frac{1}{2}A_n(r_n)\exp[\mathrm{i}(\omega t-k_n r)]+\text{c. c.} \tag{11.22}$$

将(11.20)和(11.22)式代入麦克斯韦方程

$$\nabla^2E=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2E}{\partial t^2}+\mu_0\frac{\partial^2P}{\partial t^2} \tag{11.23}$$

其中 E 由(11.16)式给出. 再利用条件

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2=0\\\boldsymbol{k}_3+\boldsymbol{k}_4=0\end{aligned}\right\} \tag{11.24}$$

并假定光场 A_1 和 A_2 为常数，则得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}A_3}{\mathrm{d}z}&=\alpha A_3+\mathrm{i}\kappa^*A_4^*\\\frac{\mathrm{d}A_4}{\mathrm{d}z}&=-\alpha^*A_4^*+\mathrm{i}\kappa A_3\end{aligned} \tag{11.25}$$

在推导该方程组时，用到了$|\mathrm{d}^2A_i/\mathrm{d}z^2|\ll|k_i\mathrm{d}A_i/\mathrm{d}z|$，方程中

$$\alpha=\alpha_0\frac{1-\mathrm{i}\bar{\Delta}}{1+\bar{\Delta}^2}\frac{2I/I_s}{(1+4I/I_s)^{3/2}}=\alpha_R-\mathrm{i}\alpha_I \tag{11.26}$$

$$\kappa^*=\mathrm{i}\alpha_0\frac{1-\mathrm{i}\bar{\Delta}}{1+\bar{\Delta}^2}\frac{2I/I_s}{(1+4I/I_s)^{3/2}} \tag{11.27}$$

其中 α_0 见(11.15)式，$I_1=I_2=I$ 是泵浦光，I_s 是饱和光强.

设边界条件为

$$\left.\begin{aligned} A_3(z=L)=A_3(L)=0 \\ A_4(z=0)=A_4(0) \end{aligned}\right\} \tag{11.28}$$

则方程(11.25)的解为

$$A_3(z)=\frac{\mathrm{i}\kappa^* A_4^*(0)\exp(-\mathrm{i}\alpha_1 z)\ \sin W(z-L)}{W\cos WL+\alpha_R \sin WL} \tag{11.29}$$

$$A_4^*(z)=\frac{A_4^*(0)\exp(-\mathrm{i}\alpha_1 z)W\cos W(z-L)-\alpha_R \sin W(z-L)}{W\cos WL+\alpha_R \sin WL} \tag{11.30}$$

$$W=(|\kappa|^2-\alpha_R^2)^{1/2} \tag{11.31}$$

显然，在 $z=0$ 处，$A_3(0)\propto A_4^*(0)$，成复共轭. 位相复共轭反射率为

$$R=\left|\frac{A_3(0)}{A_4(0)}\right|=\frac{|\kappa \sin WL|^2}{|(W\cos WL+\alpha_R \sin WL)|^2} \tag{11.32}$$

A_4 光的透射率为

$$T=\left|\frac{A_4(L)}{A_4(0)}\right|=\frac{|W|^2}{|(W\cos WL+\alpha_R \sin WL)|^2} \tag{11.33}$$

特别注意，位相复共轭反射率可大于 1. 这显然是 A_1、A_2 的光的能量转化为 $A_3(0)$的能量. 特别是满足以下条件时会产生振荡

$$\tan(WL)=\frac{-W}{\alpha_R} \tag{11.34}$$

这时，反射率 $R\to\infty$，A_4 的透射率也是 $T\to\infty$. 这里有三种情况下的振荡条件：

(1) 吸收，$\alpha_0>0$，要求 $WL>\pi/2$；

(2) 增益介质，$\alpha_0<0$ 要求 $WL<\pi/2$；

(3) 无吸收无损耗，$\alpha_0=0$ 要求 $WL=|\kappa L|=\pi/2$.

在实验上，已用多种二能级模型的介质实验了位相复共轭.

11.4 透明的非线性晶体中的四波混频

现在考虑图 11.4 中的非线性介质为透明的非线性晶体的情况(激光作用远离共振). 介质的非线性极化强度为

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{NL}}(\omega+\omega-\omega)&=\frac{1}{2}\chi^{(3)}A_1A_2A_4^*\times \\ &\exp\{\mathrm{i}[(\omega+\omega-\omega)t-(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)\cdot\boldsymbol{r}+kz]\}+\text{c. c.} \\ &=\frac{1}{2}\chi^{(3)}A_1A_2A_4^*\exp[\mathrm{i}(\omega t+kz)]+\text{c. c.} \end{aligned} \tag{11.35}$$

光场的表达式仍用(11.22)式，$\chi^{(3)}$ 是三阶极化率. 代入 CGS 单位制的麦克斯韦方程

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}+\frac{\epsilon}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}=-\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}P_{\mathrm{NL}} \tag{11.36}$$

考虑到简并四波混频时

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2=0\\ \boldsymbol{k}_3+\boldsymbol{k}_4=0\end{aligned}\right\} \tag{11.37}$$

并应用慢变近似，则得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}A_3}{\mathrm{d}z}&=\mathrm{i}\frac{2\pi\omega}{cn}\chi^{(3)}A_1A_2A_4^*\exp[-\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2-\boldsymbol{k}_3-\boldsymbol{k}_4)\cdot\boldsymbol{r}]\\&=\mathrm{i}\kappa'^*A_4^*\end{aligned} \tag{11.38}$$

$$\frac{\mathrm{d}A_4^*}{\mathrm{d}z}=\mathrm{i}\kappa' A_3 \tag{11.39}$$

$$\kappa'^*=\frac{2\pi\omega}{cn}\chi^{(3)}A_1A_2 \tag{11.40}$$

A_3 与 A_4^* 成位相复共轭，方程(11.38)和(11.39)的解为

$$A_3(z)=\frac{\cos(|\kappa'|z)}{\cos(|\kappa'|L)}A_3(L)+\mathrm{i}\frac{\kappa'^*\sin[|\kappa|(z-L)]}{|\kappa'|\cos(|\kappa|L)}A_4^*(0) \tag{11.41}$$

$$A_4(z)=-\mathrm{i}\frac{|\kappa'|\sin(|\kappa'|z)}{\kappa\cos(|\kappa'|L)}A_3^*(L)+\frac{\cos[|\kappa'|(z-L)]}{\cos(|\kappa'|L)}A_4(0) \tag{11.42}$$

在位相复共轭的条件下，只有输入信号 $A_4(0)$，而 $A_3(L)=0$. 这样在 $z=0$ 处的反射波为

$$A_3(0)=-\mathrm{i}\left[\frac{\kappa'^*}{\kappa}\tan(|\kappa|L)\right]A_4^*(0) \tag{11.43}$$

而在 $z=L$ 处，

$$A_4(L)=\frac{A_4(0)}{\cos(|\kappa|L)} \tag{11.44}$$

(11.43)式表明反射波是入射波的位相复共轭. 当 $|\kappa'|L=\pi/2$ 时发生振荡，$|A_3(0)/A_4(0)|\to\infty$，$|A_4(L)/A_4(0)|\to\infty$.

此外，利用激光受激布里浦散射、双光子过程、光电导等许多机理都产生位相复共轭. 还有人研究了腔内的位相复共轭、位相复共轭反射率的双稳等，也有人将位相复共轭反射镜作为激光谐振腔. 实验还证明用非相干光也可产生四波混频.

位相复共轭光学的主要应用包括消除高功率激光介质畸变、消除激光在大气传输中的畸变等，也可用于研究物质的弛豫过程.

参 考 文 献

[1] Yariv A. Phase conjugate optics and real-time holography. J. Quantum Electronics, 1978, QE - 14: 650 - 655.

[2] Hellwarth R M. Generation of time-reversed wave fronts by nonlinear refraction. Opt. Soc. Amer., 1977, 67: 1 - 5.

[3] Bloom D M, Bjorklund G C. Conjugate wave-front generate and image reconstruction by four-wave mixing. Appl. Phys. Lett., 1977, 31: 592 - 562.

[4] Abrams R L, Lind R C. Degenerate four-wave mixing in absorbing media. Opt. Lett., 1978, 2: 94 - 98.

[5] 吴存恺. 相位复共轭光学. 物理学进展, 1986, 3: 92 - 145.

[6] 王绍民. 相位共轭光腔的基本物理性质. 中国激光, 1982, 5: 73 - 78.

第 12 章　光学混沌与分形

光学混沌是非线性动力学的重要内容. 本章用麦克斯韦-布洛赫方程作为光学混沌的基本动力学方程，并用分数维数理论对光学混沌进行定量研究.

12.1　混沌的基本概念

混沌理论主要是从 1978 年发展起来的，并已渗透到各个自然科学学科.

混沌是确定系统的非周期运动，它表面看来是随时间无规则变化的(例如正常人的脑电图)，但又包含丰富的信息. 混沌并不等于无序.

自然界中有周期运动及其叠加，也有完全无序的噪声(例如自发辐射及各种起伏). 而混沌则是介于以上两者之间的运动. 从信号的功率谱来看，周期运动(正弦运动及其叠加)的谱是分离的谱(分离的频率成分)，噪声的谱则是相当宽的频率范围的连续谱. 混沌的一个重要的定性特征在于，它的功率谱在低频部分是连续谱. 脑电等的功率谱有时就是低频连续的.

把混沌定义为确定系统的非周期运动，有两方面的含义：(1)它是确定系统的复杂的固有性质，系统或方程中没有起伏力等任何不确定的因素或随机的因素；(2)在特定的参数范围，系统可能有非周期运动，它不能看成有限个分离频率的周期运动的叠加. 前者划清楚了与噪声的界限，后者划清楚了与周期运动的界限.

混沌产生的根源在于非线性，而不在于“大数”，即它主要不是由自由度数太大决定的，也不是由于系统太大或太复杂决定的. 例如，一个单摆，加上阻尼和周期性外力，外力大到一定程度，摆动角随时间的变化就是无规则的了，即出现混沌. 一个 RLC 线路，若其中是线性电容，当周期性的驱动电压大到一定程度，就产生混沌的电信号.

混沌现象是普遍存在的，在物理、力学、化学、生物、生态、进化、神经、大脑、经济等领域，都有混沌现象.

一个系统，在这组参数条件下，可能有周期运动，在另一组参数下，可能产生噪声；而在特定的参数范围，却可能出现混沌. 如果一个系统，在不

同的参数范围，可分别出现周期运动、噪声和混沌，则该系统称为复杂系统. 例如激光器，在低于阈值时，产生自发辐射，即噪声；高于阈值时，产生周期运动(相干光)，若高于阈值到特定程度，则输出的激光光强(或光场)随时间无规则变化，即出现混沌. 因此激光器是很有代表性的复杂系统.

用比较精确的语言来定义，一个系统或方程，若李雅普诺夫指数为正，就称为混沌系统. 其物理意义就是对初始条件特别敏感，初始条件差一点，运动轨道就呈现出指数分离. 混沌理论专家把混沌的这种特征戏称为蝴蝶效应，即蝴蝶抖一下翅膀，影响气象的初始条件，也会严重影响天气预报结果.

在这一章，先介绍出现混沌的3种典型途径——倍周期分岔、阵发混沌和奇异吸引子(12.2和12.3节)，然后介绍分形理论及其在混沌研究中的应用(12.4和12.5节)，最后研究几种典型的光学混沌，包括激光器的混沌和光学双稳态的混沌等.

12.2 倍周期分岔

1978年美国物理学家费根鲍姆(Feigenbaum)用计算器解如下的方程，

$$x_{n+1}=rx_n(1-x_n) \tag{12.1}$$

发现了非常奇妙的结果，触发了混沌理论的研究热潮. 该方程是在许多领域中常见到的. 在激光理论中，光强变化为

$$\dot{I}=I(\alpha-\beta I) \tag{12.2}$$

把形如(12.2)的方程写成分离形式即为(12.1).

方程(12.1)是一维映像. 该方程的直接含义是描述世代不相交的昆虫数目的变化，又称为“虫口模型”. x_n 是某年的昆虫数，x_{n+1} 是下一年昆虫数，r 是控制参数.

若将 x^* 代入 $f(x)$ 仍得 x^*，则 x^* 叫不动点，

$$x^*=f(x^*) \tag{12.3}$$

按稳定性区分，又有稳定的不动点与不稳定的不动点，用计算机计算发现如下情况：

(1) $0<r<3$，有一个稳定的不动点 x^*；

(2) $3<r<3.4$，原来的 x^* 不稳定了. 出现两个稳定的不动点 x_1^*，x_2^*，这种现象叫分岔(bifurcation).

只有一个稳定的固定点 x^* 时，若今年昆虫数是 x^*，明年也是 x^*，周期是一年. 当有两个稳定的不动点时，若今年昆虫数是 x_1^*，明年则变为 x_2^*，后年又是 x_1^*，周期为2年，即在分岔时，周期加倍了，故称为倍周期

分岔. r 变到 $r_2=3.44$ 时，x_1^*，x_2^* 变得不稳定了.

(3) $3.44<r<3.5$，出现 4 个稳定的不动点，即变为四倍周期. 如果 r 继续增加，还会出现八倍周期等等.

(4) $r>3.558$ 时，不动点的变化就是完全无规则的了，即出现混沌. 但在混沌区域，还有些“地带”(对应特定的 r 值)是周期性的，称为窗口. 特别重要的是，若在混沌区取一竖的窄带，按比例放大后，它与图 12.1 的整体图相似. 若再取更窄的带亦然，有无穷镶嵌的自相似结构.

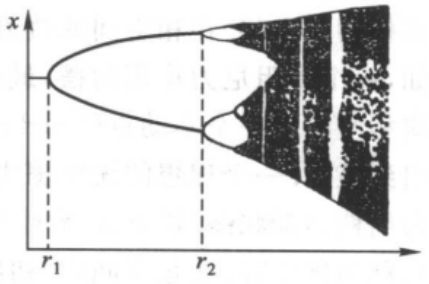


图 12.1 Feigenbaum 分岔

上述分岔点分别记为 $r_1, r_2, r_3, \cdots$，相应的一倍周期、二倍周期等记为 $2^0, 2^1, 2^2, \cdots, 2^p, \cdots$，且

$$r_1=3 \tag{12.4}$$

$$r_2=3.44 \tag{12.5}$$

$$r_c=3.558 \tag{12.6}$$

更奇妙的是控制参数的变化以及两个不动点数值之差，引出两个普适常数(又称为魔数)δ 和 α：

$$\frac{r_i-r_{i-1}}{r_{i+1}-r_i}=\delta=4.669\ 201\ 609\ 1 \tag{12.7}$$

$$\frac{d_{i-1}}{d_i}=\alpha=2.502\ 907\ 875\ 0 \tag{12.8}$$

进而发现，只要 $f(x)$ 是单峰函数，由 $x_{n+1}=f(x_n)$ 得到的 α、δ 数值都相同. 在研究激光的分岔问题时，也可得到这两个常数.

12.3 洛伦兹方程与奇异吸引子

本节以洛伦兹方程为例，重点介绍奇异吸引子，并顺便谈及阵发混沌.

1963 年，气象学家洛伦兹提出了著名的洛伦兹方程，并发现在一定条件下，它有奇异吸引子行为. 后来人们进而发现奇异吸引子是很普遍的混沌现象. 许多光学混沌也有奇异吸引子特性. 此外，在特定条件下，由洛伦兹方程还可产生倍周期分岔和阵发混沌.

12.3.1 奇异吸引子

大家观察一群蜜蜂飞行、盘旋，被吸引到花丛；夏季的游人蜂拥而至

西湖;公园中的小朋友被吸引到熊猫馆.我们说他(它)们的轨道被吸引到某个局部区域.好像花丛、西湖、熊猫对这些轨道有吸引力.

人们在研究系统的动力学时,常用相空间.例如在力学中常用 $q,\dot{q}$ 为坐标的相空间.在相空间的轨道也可能被吸引而汇聚到某个局部区域.例如,一个受阻尼力作用的摆,最终总是演变到一个稳定点.这个状态就对应相空间的一个不动点(fixed point).初始条件不同的许多轨道,都被吸引到该点.一个理想的无摩擦力的摆,从不同的初始条件出发,总要演化为周期运动状态.周期运动对应于相空间的一个封闭的环(圆或椭圆等),称为极限环.在相空间中,初始条件不同的轨道被吸引到极限环.

如果在相空间中,初始条件不同的许多轨道汇拢到特定的局部区域,该相空间区域称为吸引子.相空间中的不动点、极限环就是常见的吸引子.在吸引子附近的轨道都被吸引到该吸引子.

奇异吸引子既有一般吸引子的共性,又有奇怪的个性.奇异吸引子也是相空间中的特殊的局部区域.在奇异吸引子附近的许多轨道都被吸引到该相空间区域.但是,奇异吸引子附近的轨道,即使初始条件非常接近,在很短时间内就迅速分开,各自按不同的路线变化.或者说这些轨道对初始条件非常敏感,失之毫厘、差之千里.后面的图12.3就表示典型的奇异吸引子.

奇异吸引子描绘的系统是混沌的.例如,流体的不稳定性就可以有奇异吸引子特性,有些光学混沌也有奇异吸引子特性,脑电也是如此.加拿大一位生物混沌研究专家,身穿T恤衫,上写几个醒目的大字——"我是奇异吸引子".

12.3.2 洛伦兹方程

洛伦兹方程的形式为

$$\dot{X}=-\sigma(X-Y) \tag{12.9}$$

$$\dot{Y}=-XZ-Y+rX \tag{12.10}$$

$$\dot{Z}=XY-bZ \tag{12.11}$$

其中的"点"代表对时间的导数,σ 和 b 是常数,r 是控制参数.下节我们将证明单模的均匀加宽的激光器的麦克斯韦-布洛赫方程与洛伦兹方程的形式完全等价,X,Y,Z 分别对应M-B方程的光场、极化强度和反转粒子数密度,r 对应反射比 D_0/D_t.

首先我们可以看到,洛伦兹方程所描述的系统是耗散系统,其中的 $-\sigma X,-Y,-bZ$ 就是耗散项.其次可知该方程有如下的定态解,

$$X^*=\pm\sqrt{b(r-1)} \tag{12.12}$$

当 $r=1$ 时，定态解为零（相当于激光器在阈值 $D_0=D_t, E=0$），当 $r>1$ 时，则有两个定态解（相当于激光器高于阈值，$D_0/D_t>1, E=\pm|E_0|$）. 当控制参数 r 继续增大时，则出现混沌. 在 12.6 节将证明，洛伦兹方程产生混沌的条件是

$$\sigma>b+1 \tag{12.13}$$

$$r>r_c \tag{12.14}$$

$$r_c=\sigma(\sigma+b+3)/(\sigma-b-1) \tag{12.15}$$

图 12.2 是计算出的混沌解 $X(t)$. 此图有如下的特点：(1)曲线是在两个定态值附近无规则振荡. (2)两个定态值分别对应 $\pm\sqrt{b(r-1)}$. (3)曲线在 X_+ 及 X_- 附近振荡几次是不规则的，上、下的跳跃也是不规则的. 此外，计算表明图 12.2 的 $X(t)$ 功率谱在低频部分是连续的；关联函数是衰减的并有一定的起伏；维数是分数.

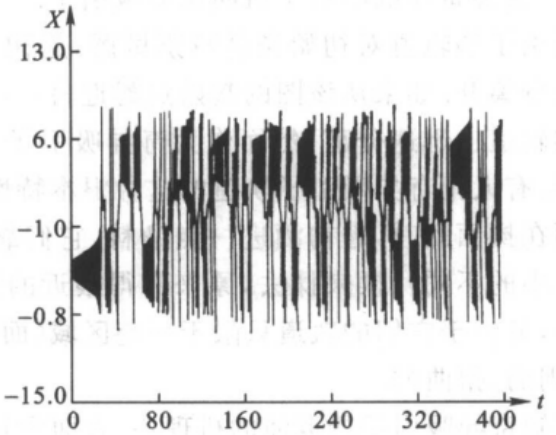


图 12.2 洛伦兹方程的混沌解 $X(t)$

($\sigma=10, b=8/3, r=21.5, r_c=21$)

图 12.3 所示的是用计算机计算的洛伦兹方程的轨道. 这是典型的奇异吸引子：

(1) 图中的轨道是集中在相空间中一定的区域，好像被吸引在一定区域，故称为“吸引子”. 但它的轨道又是复杂的、无规则的，故称为奇异吸引子.

(2) 图中有两个近似圆形的“禁区”，分别对应于两个点 $X=\pm\sqrt{b(r-1)}$ 附近. 由于这两个点不稳定，因此所有的轨道都不可能趋向这两个点. 恰恰相反，在混沌条件下，两个点附近的轨道都必然离开它们.

(3) 在该图中，轨道在右边顺时针转几圈后便到左边，在左边逆时针转若干圈又到右边，在右边再转若干圈，然后又到左边. 究竟轨道在右边

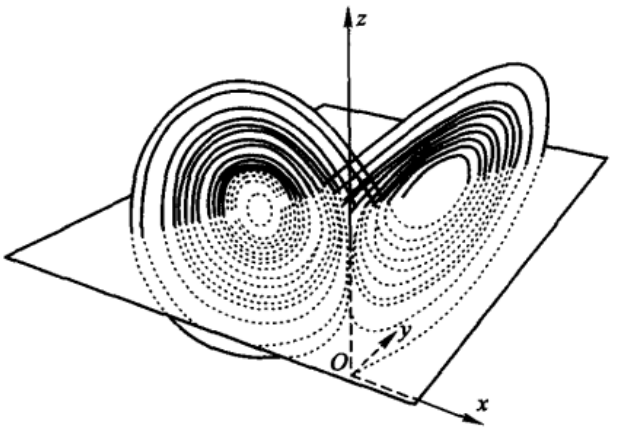


图 12.3 洛伦兹方程的混沌轨道

转几圈后再到左边，而在左边转几圈后又到右边，是无规则的、混乱的，这反映了混沌运动. 这种奇怪的吸引子就叫奇异吸引子.

(4) 奇异吸引子的轨道对初始条件特别敏感，起初非常靠近的两个点会随时间迅速分离开. 如果从该图的起始点附近另一点开始，则计算的轨道便在该图的轨道上迅速分离，然而作为奇异吸引子，轨道又是扭曲、缠绕在一定区域. 有人把奇异吸引子轨道的这种根本特性称为“面包师变换”，设想面包师在揉面团时，起初洒进一点染料，它们靠得很近(相当于初始条件只有微小的不同). 揉来揉去，原来靠得很近的染料便越离越远(轨道指数分离)，又由于它们的轨道只限于一定区域(面团内)，所以轨道是混乱的、无规则的、扭曲的.

(5) 由此可知奇异吸引子的混沌的机理：一方面它是耗散系统，相空间必然收缩，轨道只能“拥挤”、扭曲在一定区域. 另一方面，当超过临界值时，轨道又必然指数分离(李雅普诺夫指数是正的)，这两方面的因素互相制约，导致像图 12.3 所示的奇异吸引子轨道.

12.3.3 奇异吸引子的相空间维数与李雅普诺夫指数

本节重点说明，对于耗散系统，为了产生奇异吸引子这类的混沌，至少应有 3 个自由度，或者相空间维数至少应是三维的，或者至少应有三个自洽方程(其系数与时间 t 无关). 这个问题在理论上和实验上非常重要. 例如 B 类的单模、均匀加宽的激光器，在共振时的 M－B 方程只有两个方程，根本不可能产生混沌. 为了在实验上发现混沌，必须设法再补充上一个方程，例如对损耗 κ 进行调制，相当于增加一个方程 $\kappa(t)$. 此外，耗散系统是非常普遍的，因此这里介绍的原则对许多问题的研究都有启发甚至指导作用.

前面已经指出，耗散系统的运动轨道必然趋向于收缩到相空间的有

限区域.耗散系统的根本特征就是其相空间体积是随时间收缩的,这样,该系统的李雅普诺夫指数之和必小于零

$$\sum_i \lambda_i < 0 \tag{12.16}$$

然而,产生混沌的条件又要求至少有一个李雅普诺夫指数是正的(或实部大于零),使运动轨道指数分离,因此运动轨道既收缩又膨胀的两个倾向,使轨道发生扭曲、折叠,就像蚕茧.也可能正是由于这种原因,复杂的耗散系统,相当多的分量随时间衰减,以至只有少数分量(自由度)起主导作用.因此,很多复杂的耗散系统的行为(包括脑电)具有低维奇异吸引子的性质.

微分方程描述的一维耗散系统,唯一的李雅普诺夫指数必然是 $\lambda<0$,它要收缩到一点.

微分方程描述的二维耗散系统,两个李雅普诺夫指数可能是(−,−)或(−,0).其中(−,−)即两个分量都收缩,趋向一个不动点,(−,0)意味着产生一个极限环.另外的情况(−,+)且 $\lambda_+ < |\lambda_-|$ 是不允许的.因为这时运动轨道在一个平面内一边收缩、一边指数分离,必然导致运动轨道在一个平面内交叉,而轨道交叉则表明运动轨道不是由初始条件唯一决定的,因此这是不允许的.这就说明了,用微分方程描述的二维耗散系统,或者有耗散的二维自洽方程,不可能产生混沌.

三维的耗散系统或三维的自洽方程,其三个李雅普诺夫指数和维数 D 可能有以下几种情况:

(1) (−,−,−)趋向不动点,$D=0$;

(2) (0,−,−)极限环,$D=1$;

(3) (0,0,−)二维环面,$D=2$;

(4) (+,0,−)奇异吸引子,$D=$分数.

以上几种情况见图 12.4.其中的(0,0,−),即在一个面内以 ω_1 的频率做周期运动,同时另一个方向以 ω_2 的频率做周期运动,这样绞成轮胎形.(+,0,−)的情况,当 $\lambda_+ < |\lambda_-|$ 时,运动轨道有收缩与指数分离两种倾向,成为奇异吸引子.

12.3.4 阵发混沌

至此已介绍了趋向混沌的两种典型途径,即倍周期分岔和奇异吸引子.现在举例说明第三种典型途径——阵发混沌.

阵发混沌的特点在于,随着控制参数的变化,会依次出现周期运动、周期运动中的不规则的跳动、混沌.图 12.5 即激光的阵发混沌.将 He-Ne 激光器一个反射镜调到偏斜小的角度,在不同偏角时,激光输出可以

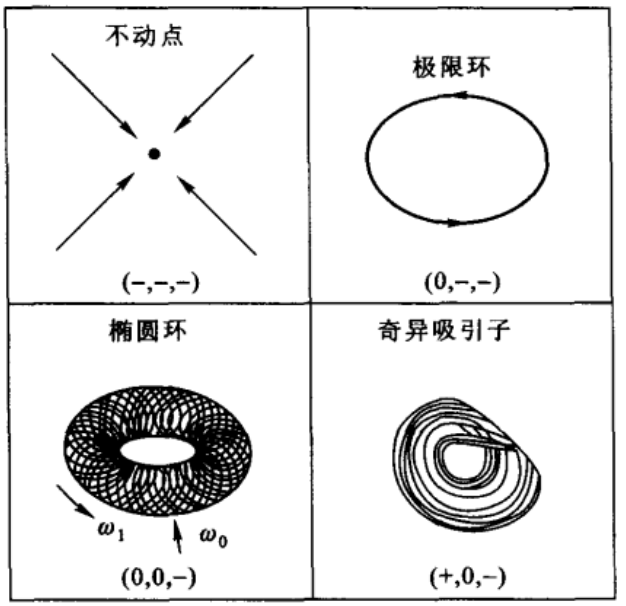


图 12.4 三维相空间中的吸引子的维数与
李雅普诺夫指数的关系



(a)



(b)



(c)

图 12.5 激光的阵发混沌

是周期运动、周期运动中的跳动以及混沌，见图中的(a)，(b)，(c).

12.4 混沌的定量标志——分形与分维

混沌的定量标志包括李雅普诺夫指数和分数维数. 本节介绍分数维

数的基本概念和计算方法.它们在无规图形的研究和混沌理论中获得广泛应用.

在混沌理论中最常用的是关联维数.它是分数维数的一种.对于奇异吸引子,只要能测量或计算出一个变量随时间的变化,就可以计算出它的关联维数.这种计算方法,在物理、化学、地学、生物学中显示出强大威力.

12.4.1 分形与分维

分形(fractal)是指具有分数维数的几何体.分形的主要特征在于它的自相似性(self-similarity),即局部与整体相似.

人们熟知的维数(dimension)是整数维,例如,线段、正方形及立方体,分别是一维、二维和三维的.对于一维图形,若尺寸放大 k 倍,则图形放大 M 倍.例如,把线段放大 k 倍,该图形(即线段本身)也放大 k 倍,即对该特殊情况,$M=k^1$.当尺寸放大到 k 倍时,二维(如正方形)和三维图形(如立方体)则分别放大到 $M=k^2$ 及 $M=k^3$.换言之,对于一维、二维、三维图形,当尺寸放大到 k 倍时,则图形放大到 M 倍.

$$\left.\begin{aligned} &M=k^d, \quad d=1,2,3\\ &d=\frac{\lg M}{\lg k}\end{aligned}\right\} \tag{12.17}$$

1919 年,豪斯道夫(Hausdorff)由上式给出维数的比较一般的定义

$$D_0=\frac{\lg M}{\lg k} \tag{12.18}$$

这样定义的维数 D_0,称为豪斯道夫维数.显然,对于一维、二维、三维的图形,方程(12.18)与(12.17)的定义是一样的.然而,对于复杂的图形,按(12.18)式定义的图形的维数却未必是整数.许多复杂图形的维数都是分数.

为了计算复杂图形的豪斯道夫维数,将定义(12.18)式变成另一种形式.为此,利用图(12.6),

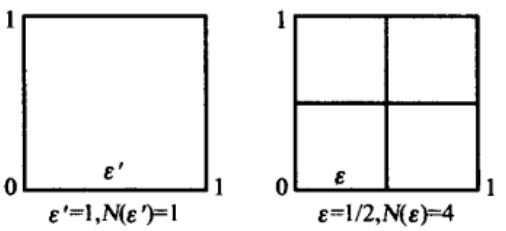


图 12.6 豪斯道夫维数定义的示意图

当"尺子"从 ε 变到 ε' 时,则

$$k=\varepsilon/\varepsilon' \tag{12.19}$$

我们用 $N(\varepsilon)$代表线度为 ε 的格子的数目，而 $N(\varepsilon')$代表线度为 ε'的格子的数目. 对于同一个图形，ε'越大，$N(\varepsilon')$当然就越小. 这样，当“尺子”从 ε 变到ε'时，图形放大到 M 倍，

$$M=N(\varepsilon)/N(\varepsilon') \tag{12.20}$$

将 M 和 k 的公式(12.20)及(12.19)代入 D_0 的定义式(12.18)，若 $\varepsilon\to\infty$ 时存在极限，则定义 D_0 为

$$D_0=\lim_{\varepsilon\to\infty}\frac{\lg[N(\varepsilon)/N(\varepsilon')]}{\lg(\varepsilon/\varepsilon')} \tag{12.21}$$

为了方便，令 $\varepsilon'=1$ 时 $N(\varepsilon')=1$，则

$$D_0=\lim_{\varepsilon\to\infty}\frac{\lg N(\varepsilon)}{\lg(1/\varepsilon)} \tag{12.22}$$

$$N(\varepsilon)=\varepsilon^{-D_0} \tag{12.23}$$

显然图 12.6 中 $D_0=2$.

对于复杂的高维空间的图形，将 ε 看成超空间(例如 n 维空间)的小球的直径，$N(\varepsilon)$即代表该图形所包含的直径为 ε 的超空间小球的数目. 这样，式(12.21)或(12.22)便成为描述和计算复杂图形(几何体)的一般定义和公式.

1975 年前后，数学家曼德布洛特(Mandelbrot)创立了一门崭新的学科——分形几何学，用来研究具有自相似性的复杂图形.

当我们举目四望时，真正有规则的图形是特殊的、近似的，而复杂的、不规则的图形却是普遍存在的. 曼德布洛特注意到，许多复杂图形都有自相似性，即局部与整体的形状相似. 例如，树木、云朵，“远看成岭近成峰”的山脉，“江河形似九回肠”的河流或海岸线，都有这种自相似性. 自相似性是一个普遍的原理. 在我国传统文化中，不乏自相似的思想. 例如“一粒米中藏世界、半边锅里煮乾坤”. 又例如，中医学中的“望诊”、耳针、鼻针，以及整个人体的穴位的分布，还有指纹学，都涉及自相似性.

12.4.2 分形与分维计算举例

下面举例说明分形的特点以及计算分维的方法.

1. 康托尔集

把一个线段分为三等份，去掉中间的一段. 然后对每个线段再如法炮制，以此类推，如图 12.7 所示.

$$\varepsilon'=1,\quad N(\varepsilon')=1$$

$$\varepsilon=1/3,\quad N(\varepsilon)=2$$

$$D_0=\frac{\lg 2}{\lg 3}=0.630\ 9$$

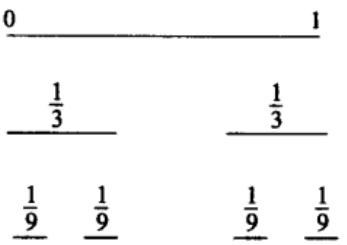


图 12.7 康托尔集

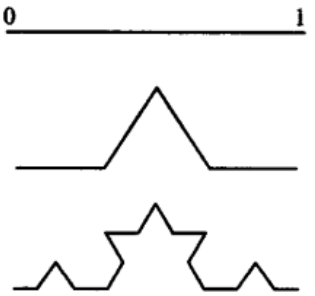


图 12.8 科赫曲线

2. 科赫曲线

在图 12.8 中，由上到下，逐步形成越来越复杂的图形，其中局部与整体相似.

$$\varepsilon'=1,\quad N(\varepsilon')=1$$

$$\varepsilon=1/3,\quad N(\varepsilon)=4$$

$$D_0=\frac{\lg 4}{\lg 3}=1.26$$

3. 斯宾斯基图

在图 12.9 中，先取一个正三角形，连接各边的中点，即得到 4 个小的正三角形，挖去中间的正三角形，依此类推. 显然



图 12.9 斯宾斯基(Sierpinskii)图

$$\varepsilon'=1,\quad N(\varepsilon')=1$$

$$\varepsilon=\frac{1}{2},\quad N(\varepsilon)=3$$

$$D_0=\frac{\lg 3}{\lg 2}=1.58$$

混沌理论的研究表明，混沌轨道也有自相似性. 因此分形和分维理论便成为研究混沌的重要数学工具. 下面介绍在混沌研究中常用的关联维数和信息维数.

12.4.3 关联维数 D_2 和信息维数 D_1

用分数维数来描述复杂运动时，可先在相空间绘出运动轨道，并把相空间分成许多直径为 ε 的小球或小盒子(box)，然后利用公式(12.22)计

算 D_0. 这样的计算,在原则上是可行的,但有时计算量非常之大,甚至最现代化的计算机也难以胜任.

为了寻求计算分数维数的简便方法,引入无限系列的分数维数 D_f,

$$D_f=\lim_{\varepsilon\to\infty}\frac{1}{1-f}\frac{\lg\left[\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)}p_i^f\right]}{\lg(1/\varepsilon)},\quad f=0,1,2,3,\cdots \tag{12.24}$$

其中 $N(\varepsilon)$是直径为 ε 的超空间小球的数目,p_i 是轨道占据第 i 个小球的几率(轨道是数字化的),或者引入 $I_f(\varepsilon)$来定义 D_f,即

$$\left.\begin{aligned}I_f(\varepsilon)&=\frac{1}{1-f}\lg\sum_i p_i^f\\ D_f&=\lim_{\varepsilon\to\infty}\frac{I_f(\varepsilon)}{\lg(1/\varepsilon)}\end{aligned}\right\} \tag{12.25}$$

我们结合图 12.10 说明 p_i 等符号的含义. 在图中的轨道,是数字化的,用一系列的点代表轨道,然后把相空间划分成许多直径为 ε 的超空间小球(取极限 $\varepsilon\to0$),类似图中的第 i 个格子. $N(\varepsilon)$是轨道的点子所占据的小球的数目. p_i 则是在直径为 ε 的第 i 个小球中发现运动轨道的点子的几率.

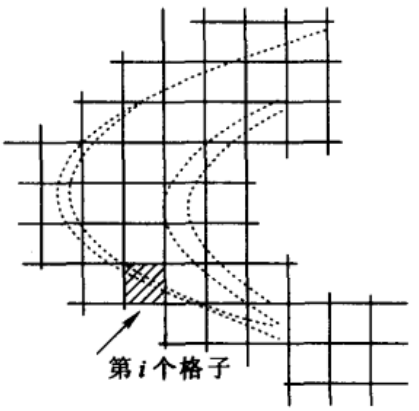


图 12.10 计算分数维数的方法示意图

下面分别考察 $f=0,1,2$ 的情况.

(1) 豪斯道夫维数 D_0,$f=0$. 令 D_f 定义中的 $f=0$,则由(12.24)式可知

$$D_f=\lim_{\varepsilon\to\infty}\frac{\lg\left[\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)}p_i^0\right]}{\lg(1/\varepsilon)}=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\lg N(\varepsilon)}{\lg(1/\varepsilon)}=D_0 \tag{12.26}$$

最后一步用到了 $p_i^0=1$,$\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)}=N(\varepsilon)$,显然与(12.22)一样.

(2) 信息维数 D_1,$f=1$ 注意,

当 $I_f(\varepsilon)=\frac{1}{1-f}\lg\left(\sum_i p_i^f\right)$时,引入 $F(f)$有

$$\left.\begin{aligned}F(f)&=-\lg\left(\sum_i p_i^f\right)\\ I_f(\varepsilon)&=\frac{-1}{1-f}F(f)\end{aligned}\right\} \tag{12.27}$$

当 $f=1$ 时,$F(1)=-\lg\left(\sum_i p_i^f\right)=0$,得

$$\lim_{f\to 1} I_f(\varepsilon)=\lim_{f\to 1}\frac{-F(f)}{1-f}=\lim_{f\to 1}\frac{F(1)-F(f)}{1-f}=F'(f)\Big|_{f=1} \tag{12.28}$$

利用 $F(f)$的定义

$$F'(f)\Big|_{f=1}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}f}\Big[-\lg\Big(\sum_i p_i^f\Big)\Big]\Big|_{f=1}$$

$$=\frac{-\sum_i p_i^f \lg p_i}{\sum_i p_i^f}\Big|_{f=1}=-\sum_i p_i \lg p_i=I(\varepsilon) \tag{12.29}$$

最后一步用到了香浓(Shannon)定义的信息 $I(\varepsilon)$. 由(12.28)和(12.29)式可知,

$$\lim_{f\to 1} I_f(\varepsilon)=F'(f)\big|_{f=1}=I(\varepsilon) \tag{12.30}$$

$$D_1=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{I_f(\varepsilon)}{\lg(1/\varepsilon)}\Big|_{f=1}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{I(\varepsilon)}{\lg(1/\varepsilon)} \tag{12.31}$$

这样定义的分数维数 D_1 就称为信息维数.

(3) 关联维数 D_2, $f=2$,有

$$D_2=D_f\big|_{f=2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\lg\Big(\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^2\Big)}{\lg\varepsilon} \tag{12.32}$$

其中 p_i^2 是运动轨道的任意两个点同时占据第 i 个小球的几率. 由 p_i^2 的物理意义,可以计算出(12.32)式中的求和部分,即

$$\sum_i^{N(\varepsilon)} p_i^2=\text{轨道的任两个点同时占据第 } i \text{ 个小球的几率}$$

$$=\text{轨道的两个点之间的距离小于 } \varepsilon \text{ 的几率之和}$$

$$=\lim_{\substack{N\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\frac{1}{N^2}\{\text{距离}\,|\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_j|<\varepsilon \text{ 的数目}\}$$

$$=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N^2}\sum_{i\neq f}\theta(\varepsilon-|\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_j|)\equiv C(\varepsilon) \tag{12.33}$$

其中 N 是轨道数字化的点的总数目,θ 是 Heaviside 函数,定义为

$$\theta(R)=\begin{cases}1, \text{当 } R\geqslant 0\\ 0, \text{当 } R<0\end{cases} \tag{12.34}$$

将(12.33)式代入(12.32)式,则有

$$D_2=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\lg C(\varepsilon)}{\lg\varepsilon} \tag{12.35}$$

$$C(\varepsilon)=\sum_i^{N(\varepsilon)} p_i^2=\lim_{\substack{N\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\frac{1}{N^2}\sum_{i\neq j}\theta(\varepsilon-|\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_j|) \tag{12.36}$$

称为“关联和”,它表示轨道的任意两点间的关联. 特别值得注意的是,在

$|x_i-x_j|$中，x是多维矢量. 例如，对于洛伦兹方程，$x=(X,Y,Z)$是三维的. 一般说，若相空间是d维的，x就是d维的. 由此可想而知，按(12.35)式计算关联维数，计算量非常之大. 使人感到欣慰的是，对于奇异吸引子，只需要测量或计算出x的一个分量，即可计算出该奇异吸引子的关联维数. 例如，只用洛伦兹方程的X而不管Y和Z便可计算. 在实验工作下，只要某个系统或某种现象具有奇异吸引子行为，不管它有多少个变量(往往不知道变量数目)，只要能测出一个变量随时间的变化，就可计算关联维数D_2.

12.5 由一维时间序列计算奇异吸引子的关联维数

有些复杂现象，不知有多少个动力学变量，却可以测量一维时间序列(即一个变量随时间的变化). 例如，大脑的动力学是复杂的. 但是可以测量和记录脑电. 脑电就是一维时间序列. 由一维时间序列可以计算关联维数. 这多少有些类似中医学的脉诊，由“脉搏”的一维时间序列，可以得到整个人体的某些重要的整体的信号和特性.

本节介绍由一维时间序列计算关联维数的方法，它在许多学科中得到广泛应用.

12.5.1 由一维时间序列重建吸引子

非线性系统，各个变量互相影响. 例如非线性方程，由于各个变量互相制约，每个变量既影响别的变量，又受别的变量影响. 这样抓住一个变量，就可能在一定程度上反映整体性质. 这也许是每个侦探家所熟知的道理.

Takens在1981年证明，可以由一维时间序列重建奇异吸引子的相空间图. 其证明相当复杂，这里举例说明其要点.

考虑如下的二维的动力学方程

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\\&\boldsymbol{x}=\{x,y\}\\&\boldsymbol{F}=\{F_1,F_2\}\end{aligned}\right\}\tag{12.37}$$

该动力学系统的轨道的每个点$\{x(t+\tau),y(t+\tau)\}$都是唯一地来自一个点$\{x(t),y(t)\}$. 由于轨道不能交叉，否则轨道便不是由初始条件唯一决定，因此$\{x(t+\tau),y(t+\tau)\}$与$\{x(t),y(t)\}$是一一对应的. 下面定义新的

矢量序列 $\xi(t)$，$\xi(t+\tau)$

$$\xi(t)=\{x(t),x(t+\tau)\} \tag{12.38}$$

$$\xi(t+\tau)=\{x(t+\tau),x(t+2\tau)\} \tag{12.39}$$

其中 τ 是某个延迟时间，由(12.38)式可知，$\xi(t)$的两个分量分别是

$$\left.\begin{aligned}\xi_1(t)&=x(t)\\ \xi_2(t)&=x(t+\tau)\end{aligned}\right\} \tag{12.40}$$

由动力学方程(12.37)可积分得到 $x(t+\tau)$，所以

$$\begin{aligned}\xi_2(t)=x(t+\tau)&=\int_t^{t+\tau}\mathrm{d}t' F_1\{x(t'),y(t')\}+x(t)\\ &\approx\tau F_1\{x(t),y(t)\}+x(t)\end{aligned} \tag{12.41}$$

由(12.40)和(12.41)式可知，$\{\xi_1(t),\xi_2(t)\}$与$\{x(t),y(t)\}$是一一对应的. 但前者由一维时间序列 $x(t)$决定，后者是二维时间序列. 这表明时间序列 $\xi(t_i)(i_i=i\tau)$包含了时间序列 $\boldsymbol{x}(t_i)=\{x(t_i),y(t_i)\}(t_i=it)$的某些信息.

一个最简单的例子是下面的二维时间序列，

$$\left.\begin{aligned}x(t_i)&=\sin(2\pi t_i)\\ y(t_i)&=\cos(2\pi t_i)\end{aligned}\right\} \tag{12.42}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t_i)&=\{x(t_i),y(t_i)\}=\{\sin(2\pi t_i),\cos(2\pi t_i)\}\\ &=\left\{\sin(2\pi t_i),\sin\left[2\pi\left(t_i+\frac{1}{4}\right)\right]\right\}\\ &=\left\{x(t_i),x\left(t_i+\frac{1}{4}\right)\right\}\equiv\xi(t_i)\end{aligned} \tag{12.43}$$

这表明$\{x(t_i),y(t_i)\}$与$\left\{x(t_i),x\left(t_i+\frac{1}{4}\right)\right\}$等价. 后者只由 $x(t)$决定. 因此，由一维时间序列 $x(t)$可以反映二维时间序列$\{x(t),y(t)\}$的某些信息. 或者，由一维时间序列 $x(t)$可构造二维矢量 $\xi(t_i)$.

应特别指出，这里并没给出 Takens 的证明，只是窥豹一斑.

12.5.2 由一维时间序列计算关联维数 D_2

由上面的说明可以提示我们怎样由一维时间序列 $x(t)$来建立 n 维矢量空间.

假定某动力学系统或方程具有奇异吸引子行为. 该奇异吸引子的一维时间序列是 $x(t)$. $x(t)$或者由计算机解方程得到，或者由实验测量或观察记录得到.

若 $x(t)$由实验测量或观测记录得到的，必须用 A－D 转换(变为数字信号). 这样就可以知道不同时刻的 $x(\tau)$，$x(2\tau)$，$x(3\tau)$，…，见图 12.11.

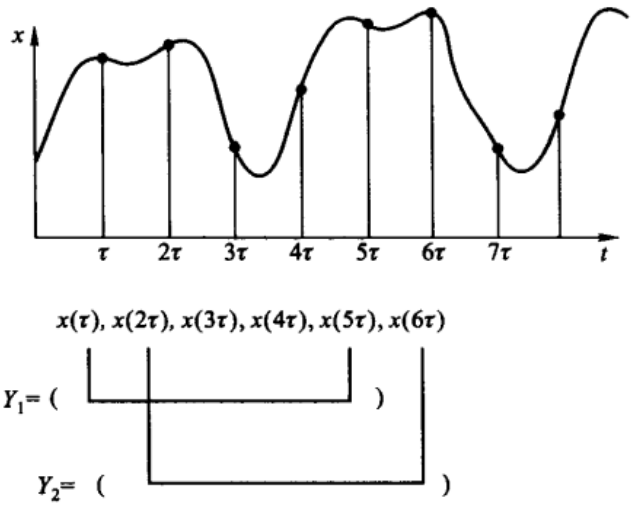


图 12.11 由一维时间序列建立 n 维矢量空间

这就是第一步，把一维时间序列数字化，或者称为取样. τ 是取样间隔.

由一维时间序列 $x(t_i)(t_i=i\tau)$，建立 n 维矢量 $\boldsymbol{Y}^{(n)}$ 空间的要点如下：

第一个矢量 $\boldsymbol{Y}_1^{(n)}$ 的第一个分量是 $x(\tau)$，依次到第 n 个分量 $x(n\tau)$.

第二个矢量 $\boldsymbol{Y}_2^{(n)}$ 的第一个分量是 $x(2\tau)$，依次到第 n 个分量 $x((n+1)\tau)$. 这相当于把 $\boldsymbol{Y}_1^{(n)}$ 向右位移一步；

同理 $\boldsymbol{Y}_3^{(n)}$ 相当于把 $\boldsymbol{Y}_2^{(n)}$ 再向右位移一步. 依次类推.

将以上过程总结起来，则一维时间序列 $x(t_i)(t_i=i\tau)$ 是

$$x(\tau),x(2\tau),x(3\tau),\cdots,x(n\tau),x[(n+1)\tau],x[(n+2)\tau],\cdots$$

n 为矢量 $\boldsymbol{Y}_1^{(n)},\boldsymbol{Y}_2^{(n)},\cdots,\boldsymbol{Y}_N^{(n)}$ 分别为

$$\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{Y}_1^{(n)}=\{x(\tau),x(2\tau),\cdots,x(n\tau)\}\\
&\boldsymbol{Y}_2^{(n)}=\{x(2\tau),x(3\tau),\cdots,x[(n+1)\tau]\}\\
&\quad\vdots\qquad\qquad\qquad\vdots\\
&\boldsymbol{Y}_N^{(n)}=\{x(N\tau),x[(N+1)\tau],\cdots,x[(N+n-1)\tau]\}
\end{aligned}\right\}\tag{12.44}$$

若 $x(i\tau)$ 共有 m 个点（即取样点的数目是 m 个），则 $N=m-n+1$.

这样，就从一维时间序列建立了 n 维空间. $\boldsymbol{Y}_1^{(n)},\cdots,\boldsymbol{Y}_N^{(n)}$ 都是 n 维矢量. 每个矢量对应于 n 维空间中的一个点. 其中每个点就代表一个态或轨道的一个点. 进而利用类似（12.35）和（12.36）式的公式计算 $C(\varepsilon)$ 和 D_2，即

$$C^{(n)}(\varepsilon)=\lim_{\substack{N\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\frac{1}{N^2}\sum_{i\neq j}\theta(\varepsilon-|\boldsymbol{Y}_i^{(n)}-\boldsymbol{Y}_j^{(n)}|)\tag{12.45}$$

$$D_2=\lim_{\varepsilon\to\infty}\frac{\lg C^{(n)}(\varepsilon)}{\lg\varepsilon}\tag{12.46}$$

特别注意，(12.45)与(12.36)式的差别在于，在(12.36)式中，$\boldsymbol{x}$ 是真正代表轨道. 例如，对于洛伦兹方程，$\boldsymbol{x}=(X,Y,Z)$. 因此，由(12.35)和(12.36)式计算关联和 $C(\varepsilon)$以及关联维数 D_2，是由全部的变量和真正的轨道来计算 $C(\varepsilon)$和 D_2. 相反，由(12.45)和(12.46)式计算 $C(\varepsilon)$和 D_2，却是只由一维时间序列计算 $C(\varepsilon)$和 D_2.

12.5.3 洛伦兹方程的关联维数 D_2

图 12.12 是由洛伦兹方程计算关联维数 D_2 的结果. 其中上边的线是由三维时间序列$\{X(t_i),Y(t_i),Z(t_i)\}$按(12.36)式计算的结果，上边的线是由一维时间序列 $X(t_i)$按公式(12.45)计算的结果. 显然，二者平行，斜率相等. 因此用两种方法计算的关联维数相等. 图 12.13 表示 $\lg C(\varepsilon)-\lg\varepsilon$ 曲线的斜率与镶嵌维数 n 的关系. 实际上，当 n 大到一定程度，由(12.45)式计算的斜率达到饱和，该饱和值才是关联维数 D_2，对应于饱和点的镶嵌维数 n'，表示描述该动力学系统所需要的最少的动力变量数. 该图表明，由洛伦兹方程的一维时间序列 $x(t_i)$计算 $C(\varepsilon)$时，当 $n=3$ 时，$\lg C(\varepsilon)-\lg\varepsilon$ 的斜率达到饱和，即该动力学系统至少用 3 个变量描述，这正与洛伦兹方程有 3 个变量完全相符.

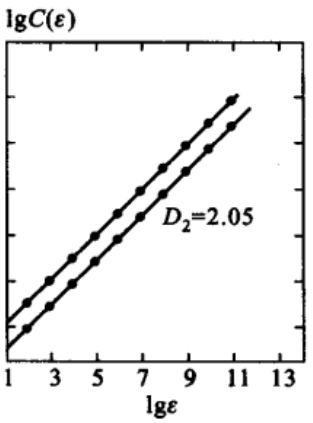


图 12.12 洛伦兹方程的关联维数

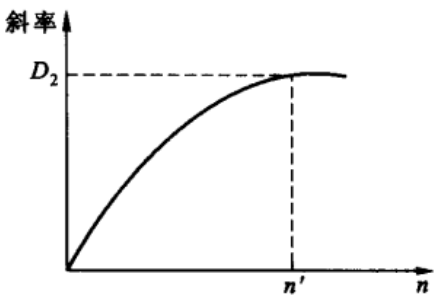


图 12.13 $\lg C(\varepsilon)-\lg\varepsilon$ 曲线斜率的饱和值

12.5.4 由一维时间序列计算 D_2 的步骤和要点

当我们从测量得到的一维时间序列来计算关联维数时，主要步骤如下：

(1) 将记录的一维时间序列(信号)例如脑电，进行 A－D 转换. 取样

频率不能太低，对 τ 有适当的考虑.

(2) 计算功率谱. 若功率谱是低频连续的，则初步表明该信号是混沌信号(但不一定是奇异吸引子).

(3) 绘制 $x(t+\tau)\sim x(t)$ 的图，分别用 $x(t+\tau)$ 和 $x(t)$ 作为纵、横坐标，绘出相空间图. 若该图具有奇异吸引子的基本特征，再用公式(12.45)和(12.46)计算.

(4) 初步选定 ε 和 n，用公式(12.45)和(12.46)计算 $C(\varepsilon)$ 和 D_2，若 ε 太大，则不能精确得到 D_2；若 ε 太小，则计算量太大. 应根据具体情况尝试选择适当的 ε. 对 n 的选择，应从小到大，当 n 达到一定值时，$\lg C(\varepsilon)\sim\lg\varepsilon$ 的斜率饱和了(即 n 再增大时，得到一系列平行线)，取这时的斜率作为 D_2.

(5) 在采样和 A-D 转换时，不可避免地会有噪声. 由于噪声的影响，$\lg C(\varepsilon)$ 不是一条直线. 在计算中应取较平直的一段. 在采样时应尽量滤去噪声. 用计算机处理数据时，也可滤波. 但要注意动力学系统本身也有噪声，在滤波时要特别注意这点.

(6) 在计算 D_2 时，有时发现当 n 很大时，$\lg C(\varepsilon)-\lg\varepsilon$ 的斜率也不饱和. 这表明系统的自由度数很大，变量非常多. 在计算偏微分方程的混沌的关联维数时，就会遇到这种情况. 在处理某些混沌信号时，也不易达到饱和.

12.6 单模均匀加宽激光器的哈肯-洛伦兹模型

前苏联学者最早在研究 Maser 的麦克斯韦-布洛赫方程时，发现单模均匀加宽的 Maser 的 M-B 方程与洛伦兹方程等价，但他们的文章似乎没引起人们的注意. 直到 1975 年，哈肯重新确认 Maser 的 M-B 方程与洛伦兹方程等价. 从而促使人们开始重视激光器的混沌问题.

然而一般的单模均匀加宽激光器的混沌实验，要求激发的反转粒子数密度远远高于阈值，使实验工作遇到了严重困难. 后来人们另辟蹊径，对光学混沌进行了系统、深入、定量的研究，大大推动和丰富了混沌理论.

本节重点介绍单模均匀加宽激光器的洛伦兹方程及其产生混沌的条件.

12.6.1 从 M-B 方程到洛伦兹方程

考虑单模均匀加宽的行波激光方程(4.156)、(4.157)和(4.158)，在共振条件下 $\delta=\Delta=0$，变为

$$\frac{d\mathscr{E}}{dt}=-\kappa\mathscr{E}-g\mathscr{P} \tag{12.47}$$

$$\frac{d\mathscr{P}}{dt}=-\gamma_{\perp}\mathscr{P}-g\mathscr{E}D \tag{12.48}$$

$$\frac{dD}{dt}=-\gamma_{\perp}(D-D_0)+2g(\mathscr{P}\mathscr{E}^*+\mathscr{P}^*\mathscr{E}) \tag{12.49}$$

其中 g 是实数，$g=\theta_{ab}\sqrt{\frac{\Omega_\lambda}{2\varepsilon_0\hbar}}$

引入如下的变量

$$\left.\begin{aligned}X&=2g\mathscr{E}/\gamma_{\perp}\\Y&=-2g^2\mathscr{P}/(\kappa\gamma_{\perp})\\Z&=g^2(D_0-D)/(\kappa\gamma_{\perp})\end{aligned}\right\} \tag{12.50}$$

容易证明上述方程与洛伦兹方程是等价的.

用 $2g/\gamma_{\perp}^2$ 乘(12.47)式的两边，则有

$$\frac{1}{\gamma_{\perp}}\frac{dX}{dt}=-\frac{\kappa}{\gamma_{\perp}}(X-Y) \tag{12.51}$$

用 $(-2g^2/\kappa\gamma_{\perp}^2)$ 乘(12.48)式的两边，

$$\frac{1}{\gamma_{\perp}}\frac{dY}{dt}=-XZ-Y+\frac{g^2}{\kappa\gamma_{\perp}}D_0X \tag{12.52}$$

用 $(-g^2/\kappa\gamma_{\perp}^2)$ 乘(12.49)式的两边，则

$$\frac{1}{\gamma_{\perp}}\frac{dZ}{dt}=-\frac{\gamma_{\parallel}}{\gamma_{\perp}}Z+XY \tag{12.53}$$

定义新的参数

$$\left.\begin{aligned}\tau&=\gamma_{\perp}t\\\sigma&=\kappa/\gamma_{\perp}\\r&=\frac{g^2}{\kappa\gamma_{\perp}}D_0=D_0/D_t\\b&=\gamma_{\parallel}/\gamma_{\perp}\end{aligned}\right\} \tag{12.54}$$

用 $\dot{X},\dot{Y},\dot{Z}$ 分别表示 X,Y,Z 对 τ 的导数，则(12.51)，(12.52)和(12.53)式变为

$$\left.\begin{aligned}\dot{X}&=-\sigma(X-Y)\\\dot{Y}&=-XZ-Y+rX\\\dot{Z}&=-bZ+XY\end{aligned}\right\} \tag{12.55}$$

这就是洛伦兹方程，又称为哈肯-洛伦兹激光方程. 注意在求(12.53)式时，考虑到了共振时 $\mathscr{P}\mathscr{E}^*=\mathscr{P}^*\mathscr{E}=\mathscr{P}\mathscr{E}$.

12.6.2 从归一化的 M-B 方程得到洛伦兹方程

下面从归一化的 M-B 方程出发，推导洛伦兹方程，并求出洛伦兹方

程有混沌解的条件.

在共振时,由方程(4.172)、(4.173)、(4.174)得到:

$$\dot{\hat{E}}+\kappa\hat{E}=\kappa\hat{P} \tag{12.56}$$

$$\dot{\hat{P}}+\gamma_{\perp}\hat{P}=\gamma_{\perp}\hat{E}\hat{D} \tag{12.57}$$

$$\dot{\hat{D}}+\gamma_{\parallel}\hat{D}=\gamma_{\parallel}(\Lambda+1-\Lambda\hat{E}\hat{P}) \tag{12.58}$$

其中考虑到了在共振时,$\hat{E}$和$\hat{P}$都是实数,并且光场不随X变化,故$\dot{\hat{E}}=0$.令

$$\tau=\gamma_{\perp}t \tag{12.59}$$

$$X=\sqrt{\Lambda\gamma_{\parallel}/\gamma_{\perp}}\hat{E} \tag{12.60}$$

$$Y=\sqrt{\Lambda\gamma_{\parallel}/\gamma_{\perp}}\hat{P} \tag{12.61}$$

$$Z=\Lambda+1-\hat{D} \tag{12.62}$$

代入上列方程,则得到

$$\dot{X}=-\frac{\kappa}{\gamma_{\perp}}(X-Y) \tag{12.63}$$

$$\dot{Y}=-Y-X[Z-(\Lambda+1)] \tag{12.64}$$

$$\dot{Z}=-\frac{\gamma_{\parallel}}{\gamma_{\perp}}Z+XY \tag{12.65}$$

引入

$$\sigma=\kappa/\gamma_{\perp} \tag{12.66}$$

$$b=\gamma_{\parallel}/\gamma_{\perp} \tag{12.67}$$

$$r=\Lambda+1=D_0/D_t \tag{12.68}$$

则(12.63)～(12.64)式变为

$$\dot{X}=-\sigma(X-Y) \tag{12.69}$$

$$\dot{Y}=-XZ-Y+rX \tag{12.70}$$

$$\dot{Z}=XY-bZ \tag{12.71}$$

令$\dot{X}=\dot{Y}=\dot{Z}$容易得到洛伦兹方程的定态解.

$$\left.\begin{aligned}\overline{X}&=\pm\sqrt{b(r-1)}\\ \overline{Y}&=\pm\sqrt{b(r-1)}\\ \overline{Z}&=r-1\end{aligned}\right\} \tag{12.72}$$

显然,定态光强正比于$\overline{X}^2$,即正比于(D_0/D_t-1).这与半经典理论的结果一样.

为了研究洛伦兹方程产生混沌的条件,我们宁愿用方程(12.56),(12.57)和(12.58).因为它们与洛伦兹方程本质上一样,而定态解是归一的,即

$$\hat{E}_s=\hat{P}_s=\hat{D}_s=1 \tag{12.73}$$

下标 s 代表定态解. 令 e,p,d 代表对定态解的微小的偏离，即

$$\left.\begin{aligned}\hat{E}&=\hat{E}_s+e\\ \hat{P}&=\hat{P}_s+p\\ \hat{D}&=\hat{D}_s+d\end{aligned}\right\} \tag{12.74}$$

将(12.74)式代入方程(12.56)，(12.57)和(12.58)，则

$$\dot{e}+\kappa(e-p)=0 \tag{12.75}$$

$$\dot{p}+\gamma_\perp(p-e-d)=0 \tag{12.76}$$

$$\dot{d}+\gamma_\perp[\delta+\Lambda(e+p)]=0 \tag{12.77}$$

令 e,p,d 的试解为

$$e=e_0\exp(\beta t) \tag{12.78}$$

$$p=p_0\exp(\beta t) \tag{12.79}$$

$$d=d_0\exp(\beta t) \tag{12.80}$$

代入上面的方程，(12.75)，(12.76)和(12.77)式有非零解的条件是

$$\beta^3+(\gamma_\parallel+\gamma_\perp+\kappa)\beta^2+\gamma_\parallel(\gamma_\perp+\kappa+\gamma_\perp\Lambda)\beta+2\gamma_\parallel\gamma_\perp\kappa\Lambda=0 \tag{12.81}$$

如果该方程有负实根($\beta<0$)，则解是稳定的，这个稳定条件要求

$$\kappa\ll\gamma_\parallel+\gamma_\perp \tag{12.82}$$

$$\Lambda<\Lambda_c \tag{12.83}$$

$$\Lambda_c=(\gamma_\parallel+\gamma_\perp+\kappa)(\gamma_\perp+\kappa)/[(\kappa-\gamma_\parallel-\gamma_\perp)\gamma_\perp] \tag{12.84}$$

如果

$$\kappa>\gamma_\parallel+\gamma_\perp \tag{12.85}$$

$$\Lambda>\Lambda_c \tag{12.86}$$

则 β 是正实根. 由(12.76)式可知，这时方程的解是不稳定的. 考虑到洛伦兹方程用 r 作为控制参数，利用 $r=(\Lambda+1)$，则洛伦兹方程产生混沌的条件便是

$$\left.\begin{aligned}&\kappa>\gamma_\parallel+\gamma_\perp\\ &r>r_c=(\gamma_\parallel+\gamma_\perp+\kappa)(\gamma_\perp+\kappa)/[(\kappa-\gamma_\parallel-\gamma_\perp)\gamma_\perp]\end{aligned}\right\} \tag{12.87}$$

12.6.3 洛伦兹方程的计算机解

用计算机求解洛伦兹方程，主要结果如下：

(1) 当 $r<r_c$ 时，解是稳定的.

(2) $r>r_c$ 时，X,Y,Z 随 τ 的变化是混沌的.

(3) 混沌解 $X(t)$ 的功率谱在低频部分是连续的.

(4) 混沌解 $X(t)$的关联函数是迅速衰减的.

(5) 混沌解的关联维数 $D_2=2.05$,而且 D_2 在 $n=3$ 时饱和(对应于洛伦兹方程有三个变量).

12.7 CO_2 激光器的混沌实验

著名的量子光学专家 Arecchi 对 CO_2 激光器的混沌进行了系统的实验研究. Arecchi 等在光学混沌实验中使用高气压的 CO_2 激光器,这有三个特点:(1)由于工作气压较高,所以该激光器属于均匀加宽的激光器(低压的 CO_2 激光器用于非均匀加宽). (2)采用选模技术,实现单模振荡. (3)这种激光器属于 B 类激光器,即 $\gamma_\perp \gg \kappa \geqslant \gamma_\parallel$. 因此在 M-B 方程中可以绝热消除极化强度 P,只剩下 $\mathscr{E}$ 和 D 的方程.

把方程(12.47),(12.48)和(12.49)稍加变化,在共振条件下,$\delta=\Delta=0$,得到它们的定态解 $\bar{D}$, $\bar{\mathscr{E}}$, $\bar{P}$ 为

$$\bar{D}=\gamma_\perp \kappa / g^2 \tag{12.88}$$

$$\bar{\mathscr{E}}=\mathscr{E}_s \sqrt{\frac{D_0}{\bar{D}}-1} \tag{12.89}$$

$$\bar{P}=-\frac{g}{\gamma_\perp}\bar{D}\,\bar{\mathscr{E}} \tag{12.90}$$

$$\mathscr{E}_s=\gamma_\perp \gamma_\parallel /(4g^2) \tag{12.91}$$

引入与洛伦兹方程稍有区别的符号

$$x=\mathscr{E}/\mathscr{E}_s \tag{12.92}$$

$$y=\gamma_\perp P/(g\bar{D}\mathscr{E}_s) \tag{12.93}$$

$$\left.\begin{aligned} z&=D/\bar{D}\\ z_0&=D_0/\bar{D}\end{aligned}\right\} \tag{12.94}$$

利用 x,y,z 的符号,可把定态解 $\bar{\mathscr{E}}$, $\bar{P}$, $\bar{D}$ 变为

$$\bar{x}=\bar{y}=\sqrt{z_0-1} \tag{12.95}$$

$$\bar{z}=1 \tag{12.96}$$

而 M-B 方程变为

$$\dot{x}/\kappa=-(\mathrm{i}\bar{\delta}+1)x+y \tag{12.97}$$

$$\dot{y}/\gamma_\perp=-(\mathrm{i}\bar{\Delta}+1)y+xz \tag{12.98}$$

$$\dot{z}/\gamma_\parallel=-z+z_0-\frac{1}{2}(xy^*+x^*y) \tag{12.99}$$

当有注入信号时,(12.97)式右边还有一项 x_i.

求(12.97),(12.98)和(12.99)式的定态解,有

$$\bar{z}=(1+\mathrm{i}\bar{\delta})(1+\mathrm{i}\bar{\Delta}) \tag{12.100}$$

由于 $\bar{z}$ 是实数，因此方程有定态解的条件是

$$\delta=-\Delta \tag{12.101}$$

这个条件叫“推移条件”(pulling condition)，(12.101)式即

$$\frac{\bar{\omega}_c-\omega}{\kappa}=\frac{\omega-\bar{\omega}}{\gamma_\perp} \tag{12.102}$$

其中 ω_c 是腔的模频率，$\bar{\omega}$ 和 ω 分别是原子跃迁频率以及激光频率.

将(12.101)代入(12.100)式，容易得到

$$\bar{z}=1+\bar{\delta}^2 \tag{12.103}$$

同样可求出光场的定态值

$$(\bar{x})^2=z_0-(1+\bar{\delta}^2) \tag{12.104}$$

$$(\bar{y})^2=|\bar{x}|^2 \tag{12.105}$$

(12.104)式的物理意义是在失谐时，定态激光光强低于共振时的激光光强.

由于 CO_2 激光器属于 B 类激光器，可绝热消去极化强度(对应于 y)即令 $\dot{y}=0$，则

$$y=\frac{xz}{1+\mathrm{i}\bar{\Delta}} \tag{12.106}$$

将 y 代入 x 和 z 的方程(12.97)和(12.99)，则

$$\dot{x}/\kappa=-(1+\mathrm{i}\bar{\delta})x+\frac{xz}{1+\mathrm{i}\bar{\Delta}} \tag{12.107}$$

$$\dot{z}/\gamma_\parallel=z-z_0-z\frac{|x|^2}{1+\bar{\Delta}^2} \tag{12.108}$$

当非共振时，$\bar{\Delta}\neq 0$，$\dot{x}$ 有实部和虚部两个方程. 因此，(12.107)和(12.108)式实际上是三个方程，但在共振时，只有两个方程了. 为了在共振时能够观察到混沌，还需要有第三个方程.

Arecchi 采用了一个巧妙而简单的方法，即对损耗进行调制使 $\kappa=\kappa(t)$. 这就增加了一个方程. 这时，三个方程是

$$\dot{x}=-\kappa(t)x(1-z) \tag{12.109}$$

$$\dot{z}=-\gamma_\parallel(t)(z-z_0+z|x|^2) \tag{12.110}$$

$$\kappa(t)=\kappa_1(1+M\cos\Omega t) \tag{12.111}$$

其中 M 是调制度，Ω 是调制频率，在技术上，可用电光效应对损耗进行调制. 也可将上面的方程用光强表示.

$$\dot{I}=-2\kappa I(1-z) \tag{12.112}$$

$$\dot{z}=-\gamma_\parallel(z-z_0+zI) \tag{12.113}$$

$$\kappa=\kappa_1(1+M\cos\Omega t) \tag{12.114}$$

这三个方程与下面的速率方程完全等价，即

$$\dot{n}=WnD-\kappa n \tag{12.115}$$

$$\dot{D}=R-2Wn-\gamma_{\parallel}D \tag{12.116}$$

$$\kappa=\kappa_1(1+M\cos\Omega t) \tag{12.117}$$

Arecchi 在实验中，使用的 CO_2 激光器及其损耗调制参数如下：

$\kappa_1=3\times10^7/s$

$\gamma_{\parallel}\approx10^4/s$

$z_0-1\approx0.1$（阈值之上 10%）

$f=\Omega/2\pi\approx50$ kHz（调解范围 60～180 kHz）

$M=1\%$

CO_2 激光器是稳频的，放电电流稳定在 10^{-4}，损耗调制器用电光材料 CdTe. 该晶体长 6 cm，镀增透膜，吸收损耗小于 0.2%. 腔内有 1/4 波片和扩束器. 腔的总单程损耗约 20%. 激光信号探测器的上升时间为 2.5 ns. 激光信号（正比于 n）及其微分信号（正比于 $\dot{n}$），输入到 $x-y$ 记录仪，以绘制相图（即 $\dot{n}-n$）. 探测器还把信号输入到谱分析仪.

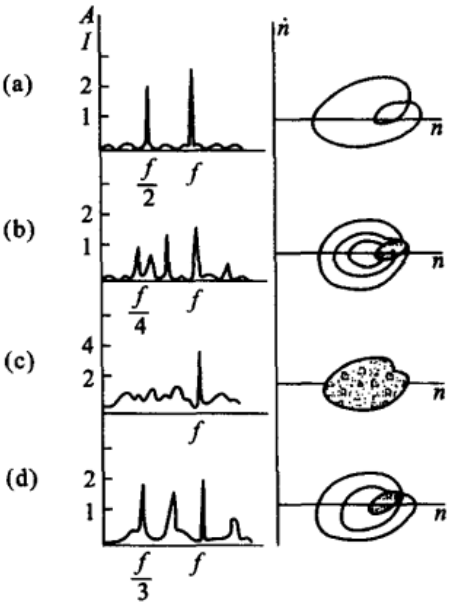


图 12.14 损耗调制的 CO_2 激光混沌 (a)倍周期分岔，$f=62.7$ kHz；(b)4 倍周期分岔，$f=63.8$ kHz；(c)奇异吸引子及相应的低频连续谱，f=60.4 kHz；(d)3 倍周期，$f=64.2$ kHz，纵坐标 A 为任意单位

图 12.14 是改变调制频率（62.7～64.25 kHz）得到的分岔及混沌. 当调制频率 $f=63.85$ kHz 对，有两个稳定的极限环，即 4 倍周期和 3 倍周期共存. 这与第 10 章讲的双稳态不同. 这里有两个极限环共存，可称为广义双稳态.

用计算机求解方程（12.112），（12.113）和（12.114），并使用实验参数，已得到与图 12.14 相似的相图和功率谱.

为了计算 CO_2 混沌激光的关联维数，Arecchi 又改进了激光器稳定性，并用微机控制损耗的调制频率. 当固定调制频率，而控制调制深度 M 从 1%逐渐增加到 20%，这时 CO_2 激光器的输出便由倍周期分岔趋向混沌.

将混沌光强经 A－D 转换（变成数字式信号），利用 12.4 和 12.5 节的方法，用计算机算出的关联维数 $D_2=2.3$. 图 12.15 所示的是利用方程

(12.112),(12.113)和(12.114)以及实验参数,在同样条件下,得到的关联维数 $D_2=2.3$,理论和实验定量符合.特别应强调指出,这里用计算机计算 D_2 时,没有任何浮动的自由调节的参数,全部参数均取自实验.

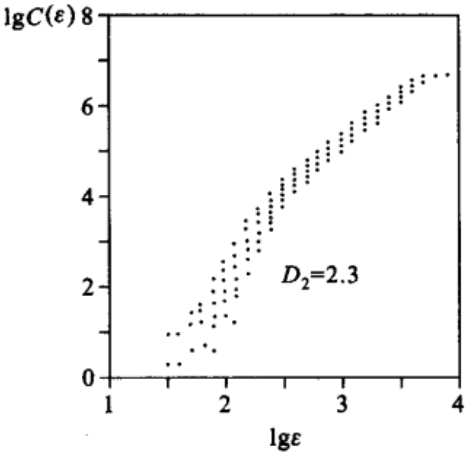


图 12.15 由实验参数和 M-B 方程计算 D_2

对于共振条件的 B 类激光器,还可以利用电信号反馈而引入第三个方程.这样也可能得到奇异吸引子类型的混沌.Arecchi 等采用的具体方法如下:在 CO_2 激光器内放入一个损耗调制器,但是该调制器上的电压与该激光器的输出光强成正比.

利用方程(12.112)和(12.113),并考虑反馈,则

$$\left.\begin{aligned}\dot{I}&=-2\kappa I(1+\alpha\sin^2 V-z)\\ \dot{z}&=-\gamma_{\parallel}(z-z_0+zI)\\ \dot{V}&=-\beta(V-B+fI)\end{aligned}\right\} \tag{12.118}$$

其中光强方程中的 $2\kappa(1+\alpha\sin^2 V)$ 是电压 V 引起的对光强损耗的调制,$\alpha=R/T$ 是分束器的反射率(R)与透射率(T)之比,β 是反馈线路的弛豫

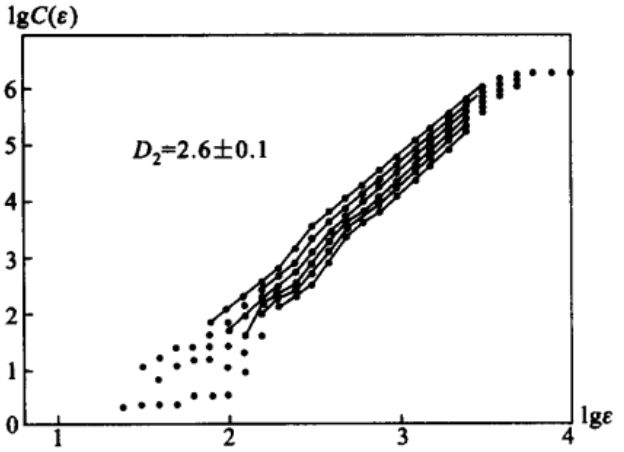


图 12.16 有电反馈的激光器的混沌

常数，B 是加在调制器上的偏压，f 是探测器接收的光强与电压之间的耦合常数. 电压 V 是以半波电压为单位的.

在实验中，取 $2\kappa=1.17\times10^{7}(s^{-1})$，$\gamma_{\parallel}=0.98\times10^{4}(s^{-1})$，$\beta=3.0\times10^{4}(s^{-1})$，归一化的泵浦粒子数 $z_0=4.2$. 调节常数 f，可以观察到双稳态及混沌. 由实验数据计算的混沌信号的关联维数 $D_2=2.6\pm0.1$，见图 12.16.

另一方面，对方程(12.118)求数值解，取参数 $\beta=\gamma_{\parallel}=3.0\times10^{4}$，$B=0.383$，计算得到 $D_2=2.6$.

12.8 非均匀加宽的单模行波激光器的混沌

以上两节研究的哈肯-洛伦兹模型，只适于均匀加宽的单模行波激光器. 本节考虑非均匀加宽的情况.

12.8.1 M-B 方程及计算机求解

对于多普勒加宽的单模行波激光器，需对 M-B 方程稍加修正，即场方程右边的极化强度应写成积分形式

$$\left.\begin{aligned}\dot{\mathscr{E}}&=(-\mathrm{i}\delta-\kappa)\mathscr{E}-g\int\mathscr{P}(s,t)W(s)\mathrm{d}s\\ \dot{\mathscr{P}}(s,t)&=(-\mathrm{i}\Delta'-\gamma_{\perp})\mathscr{P}(s,t)-g\mathscr{E}D(s,t)\\ \dot{D}(s,t)&=-\gamma_{\parallel}[D(s,t)-D_0(s,t)]+2g[\mathscr{P}(s,t)\mathscr{E}^{*}+\mathscr{P}^{*}(s,t)\mathscr{E}]\end{aligned}\right\}\tag{12.119}$$

其中 $W(s)$ 是高斯分布函数. 为了避免与布洛赫矢量的分量 v 混淆，这里用 s 代表原子运动速度. $\mathscr{P}(s,t)$ 是速度为 s 的那些原子的极化强度(注意以原子偶极矩的矩阵元 μ 为单位). 场方程右边的积分便是气体激光介质的极化强度. $D(s,t)$ 是速度为 s 的反转粒子数. Δ' 是运动原子与光场的频率的失谐量，即 $\Delta'=(\Delta'-\dot{\phi}-ks)$. 这里 Δ 是静止原子对光场频率的失谐量($\Delta=\bar{\omega}-\Omega_{\lambda}$)，$\phi$ 是极化强度的实部对光场位相的影响，$\dot{\phi}$ 是对频率的影响.

用计算机求解方程(12.119)～(12.121)，在一定参数范围，可得到混沌解. 但在文献中，常把这三个方程变为布洛赫矢量的分量形式，即

$$\left.\begin{aligned}\dot{u}&=-(\Delta-\dot{\phi}-ks)v-\gamma_{\perp}u\\ \dot{v}&=(\Delta-\dot{\phi}-ks)u+\frac{\mu E}{\hbar}(\dot{\rho}_{aa}-\dot{\rho}_{bb})\\ \dot{\rho}_{aa}&=R_1-\gamma_a\rho_{aa}-\frac{1}{2}\frac{\mu E}{\hbar}v\\ \dot{\rho}_{bb}&=R_2-\gamma_b\rho_{bb}+\frac{1}{2}\frac{\mu E}{\hbar}v\end{aligned}\right\}\tag{12.120}$$

$$\left.\begin{aligned}\dot{E}&=(-\mathrm{i}\delta-\kappa)E+A\int_{-\infty}^{\infty}v(s,t)W(s,t)\mathrm{d}s\\ \dot{\phi}&=-A\int_{-\infty}^{\infty}v(s,t)W(s,t)\mathrm{d}s\end{aligned}\right\}\tag{12.121}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}W(s)&=\frac{1}{\sqrt{\pi}x}\exp(-s^2/x^2)\\ x&=(2RT/M)^{1/2}\end{aligned}\right\}\tag{12.122}$$

x 是最可几速度，R 是气体常数. 常数 A 与总的粒子数目 N' 有关

$$A=2\pi N'\mu\bar{\omega}\tag{12.123}$$

用计算机求解，发现随着参数 $\kappa, R_1, R_2, \Delta, \gamma_\perp, \gamma_a, \gamma_b$ 等的不同，会出现倍周期分岔、阵发混沌和奇异吸引子：

(1) 倍周期分岔到混沌：$R_1=0$，$\gamma_\perp=61\times10^6\ \mathrm{s}^{-1}$，$\kappa=5.4\gamma_\perp$，$\gamma_a=0.012\gamma_\perp$，$\gamma_b=0.8\gamma_\perp$，$\Delta=0$，多普勒宽度 $\delta\upsilon_D=kx\left(\lg\frac{2}{\pi}\right)=110\ \mathrm{MHz}$，$\frac{\mu}{\hbar}A=6.4\times10^{23}\ \mathrm{s}^{-2}$，当 $R_2=9.0\times10^{-9}\gamma_\perp$，出现倍周期分岔. R_2 进一步增加到 $9.3\times10^{-9}\gamma_\perp$ 则出现混沌.

(2) 阵发混沌，如图 12.5 所示.

(3) 奇异吸引子：其他参数同(1)，当 $R_2=5.6\times10^{-9}\gamma_\perp$ 时，失谐量 $\Delta=3.725\gamma_\perp$ 时，则出现奇异吸引子.

12.8.2 非均匀加宽激光器的混沌实验

美国的 Arabham 等详细研究了多普勒加宽的单模行波的 He－Xe 激光器的混沌，他们用单向环行腔，激光波长 $\lambda=3.51\ \mu\mathrm{m}$，用 InAs 探测器，用电致伸缩方法调节腔长以改变腔的失谐量 Δ. 这样用实验证实了光学的奇异吸引子，并计算了关联维数 D_2.

图 12.17 所示的是 He－Xe 单模行波激光混沌信号的功率谱. 显然

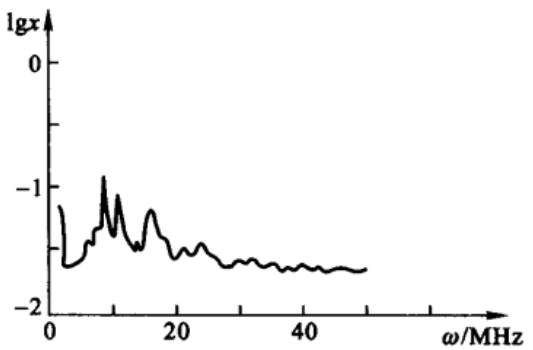


图 12.17 He－Xe 混沌激光的功率谱

在低频部分为连续谱.

图 12.18 是由实验得到的混沌激光信号计算的$\lg C^{(n)}(\varepsilon)-\lg\varepsilon$曲线.

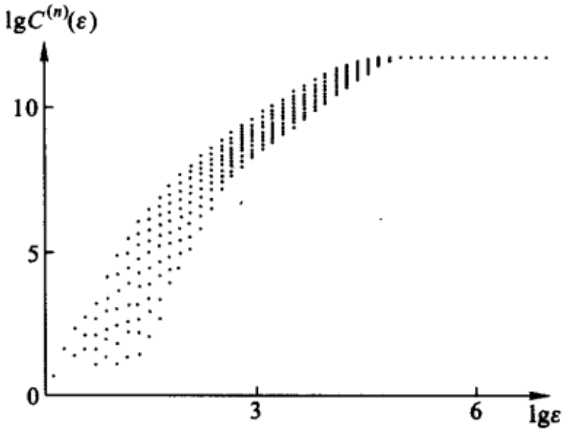


图 12.18 He-Xe 混沌激光的关联维数计算

图 12.19 所示的是$\lg C^{(n)}(\varepsilon)-\lg\varepsilon$斜率的平台区. 计算表明 D_2 是分数.

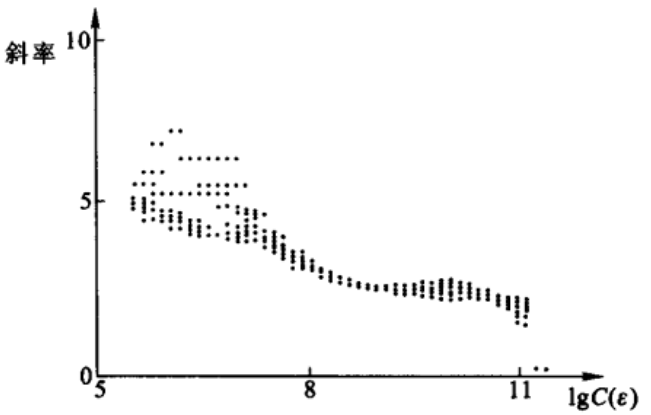


图 12.19 关联和 $\lg C(\varepsilon)$的斜率

12.9 光学双稳态的混沌

光学双稳态的动力学问题引起人们广泛兴趣. 为了方便,将 M-B 方程重写如下

$$\left.\begin{aligned}\dot{\mathscr{E}}&=(-\mathrm{i}\delta-\kappa)\mathscr{E}-gP+\kappa\mathscr{E}_i\\ \dot{P}&=(-\mathrm{i}\Delta-\gamma_\perp)P-g\mathscr{E}D\\ \dot{D}&=-\gamma_\parallel(D-D_0)+2g(P\mathscr{E}^*+P^*\mathscr{E})\end{aligned}\right\}\tag{12.124}$$

为了便于研究光学双稳态的动力学问题,引入

$$\left.\begin{aligned} x&=2g\mathscr{E}/\sqrt{\gamma_{\parallel}\gamma_{\perp}}\\ y&=2g\mathscr{E}_i/\sqrt{\gamma_{\parallel}\gamma_{\perp}}\\ p&=2\sqrt{\frac{\gamma_{\perp}}{\gamma_{\parallel}}}P/D_0\\ d&=D/D_0 \end{aligned}\right\} \tag{12.125}$$

$$\left.\begin{aligned} C&=-g^2D_0/(2\kappa\gamma_{\perp})\\ \Theta&=\delta/\kappa=(\omega_c-\omega_L)/\kappa\\ \bar{\Delta}&=\Delta/\gamma_{\perp}=(\bar{\omega}-\omega_L)/\gamma_{\perp} \end{aligned}\right\} \tag{12.126}$$

将(12.125)式代入方程(12.124)，并利用关系式(12.126)，则得到文献中常用的光学双稳态动力学方程

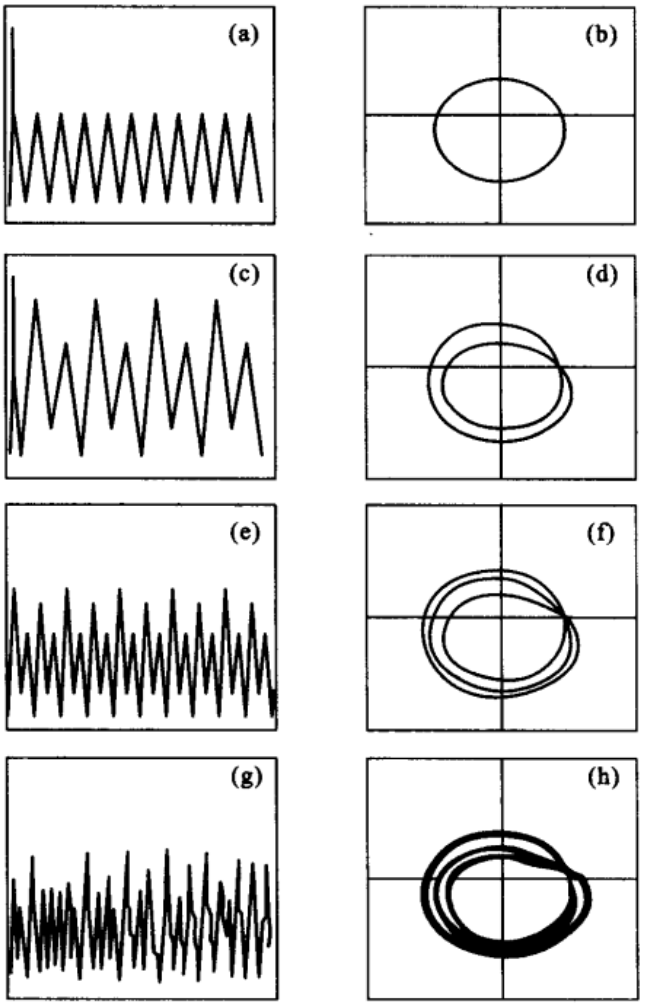


图 12.20 光学双稳态的混沌(入射光场，在(a)，(c)，(e)，(g)中分别为 $y=2\,000,1\,350,1\,225,950$)

$$\left.\begin{aligned}\kappa^{-1}\dot{x}&=-(1+\mathrm{i}\Theta)x+y-2Cp\\ \gamma_{\perp}\dot{p}&=-(1+\mathrm{i}\Delta)p+xd\\ \gamma_{\parallel}\dot{d}&=-\frac{1}{2}(px^{*}+p^{*}x)+d-1\end{aligned}\right\}\tag{12.127}$$

该方程组清楚表明了合作参数 C、腔的失谐参数 Θ 和原子失谐参数 $\bar{\Delta}$ 的影响，非常适于用计算机研究光学双稳态的动力学问题：

(1) 在定态，即 $\dot{x}=\dot{p}=\dot{d}=0$，由方程(12.127)即得到光学双稳态的状态方程(10.44).

(2) 若 $\dot{p}=\dot{d}=0$，而 $\dot{x}\neq 0$，即得到光学双稳态的状态方程(10.43).

(3) 在适当的参数范围，会出现自脉动(self-pulsing)，即输入光强是常数，而输出光强却是脉冲式的.

(4) 在一定条件下，光学双稳态的输出则成为混沌的.

图 12.20 所示的是由方程(12.127)计算的由分岔到混沌的图形.

12.10 有延迟的光学双稳态的混沌

1976 年 Lugiato 建立了光学双稳态理论，1978 年比如 Feigenbaum 研究了倍周期分岔，1979 年 Ikeda 研究了有延迟的力学双稳态的分岔与混沌.

图 12.21 所示的是有延迟的光学双稳态的分岔与混沌的实验示意图，其中的单模光纤既作为双稳态材料又提供时间延迟.

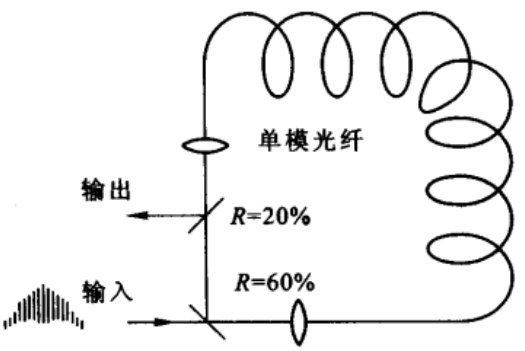


图 12.21 有延迟的光学双稳态的混沌实验

设腔长为 L，腔内均匀加宽的介质的初始条件为

$$\left.\begin{aligned}w_0&=-1\\ u_0&=v_0=0\end{aligned}\right\}\tag{12.128}$$

M－B 方程为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial E'}{\partial z}&=\frac{c\mu_0\omega}{2}N'v\\ E'\frac{\partial\phi}{\partial z}&=-\frac{c\mu_0\omega}{2}N'u\end{aligned}\right\}\tag{12.129}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial\tau}&=-\Delta v-\gamma_\perp u\\ \frac{\partial v}{\partial\tau}&=\Delta u+\left(\frac{\mu}{\hbar}\right)E'-\gamma_\perp v\\ \frac{\partial w}{\partial\tau}&=-\left(\frac{\mu}{\hbar}\right)E'-\gamma_\parallel(w+1)\end{aligned}\right\}\tag{12.130}$$

E'和ϕ分别是复数光场的振幅和位相

$$\left.\begin{aligned}\tau&=t-z/c\\ E&=E'e^{i\phi}\end{aligned}\right\}\tag{12.131}$$

利用三个近似条件：(1)$\gamma_\perp\gg\kappa,\gamma_\parallel$（即对应于B类激光器的情况）.(2)$t_R=L/c\gg T_1$，即光场在腔内循行一周的时间远大于介质的纵向弛豫时间.(3)远离共振，即介质对光场的吸收很弱，反转粒子数几乎保持不变，即$w\approx w_0$.

经过严密的推导，由上述M-B方程得到

$$e(t)=A+Be(t-t_R)\exp\{i\,|e(t-t_R)|^2-\delta_0\}\tag{12.132}$$

其中$e(t)$是腔内光场，A代表入射光场，$B=R\exp\left(-\frac{1}{2}\alpha L\right)$，$\alpha$是介质吸收系数，$R$是腔的反射率，$t_R$是光场在腔内循行一周的时间，$\delta_0$是位相.(12.132)表示$e(t)$比$e(t-t_R)$延迟的时间是$t_R$，$e(t)$与$A$的关系即代表输出与输入光场的关系.把$e(t-t_R)$看成循行第$(n-1)$周的光场，$e(t)$是第$n$周的光场，写成离散变量方程为

$$e_n=A+Be_{n-1}\exp\{i[|e_{n-1}|^2-\delta_0]\}\tag{12.133}$$

用计算机求解此方程，令$\delta_0=0$，$B=0.5$.则A从0增加到1.247 75时出现倍周期分岔.例如当$A=1.5$时，$|e_n|$在两个数值间跳动，且$|e_n|=$1.807 953，0.622 651 7，1.807 953，0.622 651 7，….当$A=1.511\ 525$时，则出现四倍周期.当$\delta_0=0$，$B=0.8$，$A=3.0$时，可以得到混沌解.用12.5节的方法计算出该混沌信号的关联维数$D_2=1.41$.

利用图12.21所示的装置，输入信号是锁模的YAG激光器（脉宽约7.6 ns），腔的参数$B\approx0.4\sim0.5$，调节输入的光强便可改变A.当输入的峰值功率从50 W增加到160 W时，观察到倍周期分岔.输入的峰值功率到300 W时，观察到混沌.实验结果与上述理论模型一致.

此外，还有其他许多种方法可产生光学混沌，包括有注入信号的激光

器、对反转粒子数调制、对注入信号调制和四波混频等.

习题与思考

(1) 计算 $x_{n+1}=rx_n(1-x_n)$的分岔,并求出普适常数 α 和 δ.

(2) 证明单模均匀加宽激光器的 M-B 方程与洛伦兹方程等价.

(3) 分析洛伦兹方程的稳定性,求出产生混沌的条件.

(4) 对不同的控制参数,求洛伦兹方程的数值解,并进而绘出相空间图和功率谱.

(5) 简述计算关联维数的方法与步骤,并计算洛伦兹方程的混沌解的关联维数 D_2.

参 考 文 献

[1] Lorenz E N. Deterministic nonperiodic flow. J. Atmos. Sci,1963,20:130-135.

[2] Haken H. Theory of intensity and phase fluctuations of a homogeneously broadened laser. Z. Phys,1966,190:327-330.

[3] Risken H,Schmid C,Weidlich W. Quantum fluctuation,master equation and Fokker-Planck equation. Z. Phys,1966,193,37.

[4] Risken H,Schmid C,Weidlich W. Fokker-Planck equation,distribution and correlation functions for laser noise. Z. Phys,1966,194:337-340.

[5] Haken H Z. Analogy between higher instabilities in fluids and lasers. Phys. Lett. ,1975,53A:77-80.

[6] Landau L D,Lifshitz E M. Course in Thoeretical Physics. London:Pergamon,1959,6.

[7] Hopf E. A mathematical example displaying features of turbulence. Commum. Pure Appl. Math. ,1948,1:303-310.

[8] Ruede D,Takens F. On the nature of turbulence. Commum. Math. Phys. ,1971,20:167-170.

[9] Newhouse S,Ruelle D,Takens F. Occurrence of strange axiom attractors near quasi periodic flows on T^M,$M\geqslant 3$. Commum. Math. Phys. ,1978,64:35-40.

[10] Feigenbaum M. The onset spectrum of turbulence. J. Stat. Phys. ,1978,19,25-30.

[11] Collet P,Eckmann J P. Iterated maps on the intervalas dynamic Systems. Boston:Borkhauser,1980.

[12] Lugiato L A,Narducci L M,Bandy D K,et al. Instabilities in inhomogenous broaden single-mode lasers. Opt. Comm. ,1983,46:115-120.

[13] Mandel P. Influence of Doppler broadening on the stability of monomode ring lasers. Opt. Comm. 1983,44:400-405.

[14] Arecchi F T, Meuci R, Puccioni C P, et al. Experimental evidence of sub-harmonic bifurcations, multistability and turbulence in a Q-switched gas laser. Phys. Rev. Lett., 1982, 49: 1217 - 1220.

[15] Weiss C O, Godone A, Olafsson A. Routes to chaotic emission in a cw He-Ne Laser. Phys. Rev., 1983, A28: 892 - 900.

[16] Weiss C O, King H. Oscillation period doubling chaos in a laser. Opt. Comm., 1982, 44: 59 - 62.

[17] 郝柏林. 分岔、混沌、奇怪吸引子、湍流及其他——关于确定论系统中的内在随机性. 物理学进展, 1983, 3: 63 - 150.

[18] 王鹏业, 戴建华, 张洪钧. 液晶混合光学双稳装置中的分叉、混沌和暂态行为. 物理学报, 1985, 5: 11 - 17.

[19] 杨世平, 戴建华, 张洪钧等. 光学双稳态中从三频准周期运动过渡到混沌. 物理学报, 1989, 12: 39 - 46.

[20] 牛鹏飞, 李福利. 非均匀加宽的混沌激光器的关联函数与混沌控制. 量子电子学, 1989, 3: 3 - 11.

第 13 章　辐射场的量子化

在前几章中，建立了激光器以及激光与物质作用的半经典理论. 半经典理论显然成功地解释了一些激光问题，但是却不能解释自发辐射、激光的光子统计和线宽等问题. 为了解释这些问题，必须用全量子理论——电磁场和原子都是量子化的，为此就必须把电磁场量子化. 本章就研究电磁场的量子化以及量子化的电磁场的性质. 13.1 节研究电磁场的量子化和光子数算符；13.2 节研究光子的位相算符；13.3 节研究光子数态和位相态的性质并由此可知量子化的电磁场与经典电磁场的基本区别；13.4 节研究相干态，这是激光物理和量子光学的重要理论工具；13.5 节研究态矢量和算符（特别是密度算符）按相干态的展开；在 13.6 节研究量子化的相干函数.

13.1　辐射场的量子化

众所周知，由麦克斯韦方程表明光就是电磁波. 但一些实验表明光也具有粒子性，即光场的能量是量子化的. 有些激光现象也必须用光的量子化理论才能解释. 本节从麦克斯韦方程出发，采用与谐振子的量子化相同步骤，将电磁场量子化.

13.1.1　单模电磁场的量子化

首先我们从真空中的麦克斯韦方程出发，在 MKS 单位制中

$$\nabla \times \boldsymbol{H}=\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{13.1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E}=-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{13.2}$$

$$\left.\begin{aligned}\nabla \cdot \boldsymbol{B}&=0\\ \nabla \cdot \boldsymbol{E}&=0\end{aligned}\right\} \tag{13.3}$$

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{B}&=\mu_0 \boldsymbol{H}\\ \boldsymbol{D}&=\varepsilon_0 \boldsymbol{E}\end{aligned}\right\} \tag{13.4}$$

$$c^2=1/(\mu_0 \varepsilon_0) \tag{13.5}$$

进一步考虑对激光物理学特别重要的谐振腔内的驻波场，偏振方向

在 x 方向，

$$E_x(z,t)=q(t)N_n\sin kz \tag{13.6}$$

其中 $q(t)$ 是光场的时间部分，$\sin kz$ 是空间部分(驻波)，N_n 是归一化常数.

由方程(13.1)有

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z}=\varepsilon_0\frac{\partial E_x}{\partial t} \tag{13.7}$$

将(13.6)式代入，得

$$-\frac{\partial}{\partial z}H_y=\varepsilon_0\dot{q}(t)N_n\sin kz$$

$$H_y=-\int\varepsilon_0\dot{q}(t)N_n\sin kz$$

$$=\frac{\varepsilon_0}{k}\dot{q}(t)N_n\cos kz \tag{13.8}$$

考虑到其中 $k=\Omega/c$，并利用 $c^2=1/(\mu_0\varepsilon_0)$，则

$$H_y=\frac{1}{\mu_0}\frac{1}{\Omega c}\dot{q}(t)N_n\cos kz \tag{13.9}$$

引入

$$p=\dot{q}(t)/\Omega \tag{13.10}$$

$$H_y=\frac{1}{\mu_0}\left(\frac{p}{c}\right)N_n\cos kz \tag{13.11}$$

再利用方程(13.2)，则有

$$\frac{\partial}{\partial z}E_x=-\mu_0\frac{\partial}{\partial t}H_y$$

将 E_x，H_y 的表达式(13.6)，(13.11)代入，则

$$\dot{p}=-\Omega q \tag{13.12}$$

由(13.10)和(13.12)式，则得到频率为 Ω 的谐振子方程

$$\ddot{q}=-\Omega^2 q \tag{13.13}$$

(13.10)和(13.12)式可以写成哈密顿方程的形式

$$\left.\begin{aligned}\dot{q}&=\frac{\partial H}{\partial p}\\ \dot{p}&=-\frac{\partial H}{\partial q}\end{aligned}\right\} \tag{13.14}$$

由(13.14)，(13.10)和(13.12)式可以知道哈密顿量是，

$$H=\frac{1}{2}\Omega(p^2+q^2) \tag{13.15}$$

如果引入 q' 和 p'，它们与 q 和 p 的关系是

$$\left.\begin{aligned} q&=\sqrt{M\Omega}q' \\ p&=\frac{1}{\sqrt{M\Omega}}p' \end{aligned}\right\} \tag{13.16}$$

代入(13.15)式,则

$$H=\frac{1}{2}\left[M\Omega^2 q'^2+\frac{1}{M}p'^2\right] \tag{13.17}$$

(13.17)式与简谐振子的哈密顿量完全一样,M 相当于振子的质量.在简谐振子量子化时曾引入对易关系

$$[q',p']=\mathrm{i}\hbar \tag{13.18}$$

由(13.16)式可知,q 和 p 也有同样的对易关系

$$[q,p]=\mathrm{i}\hbar \tag{13.19}$$

下边求出归一化常数 N_n,利用电磁场的哈密顿量的公式,并将 E_x,H_y 代入,则

$$\begin{aligned} H&=\frac{1}{2}\int[\varepsilon_0 E_x^2+\mu_0 H_y^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &=\frac{1}{2}\varepsilon_0 N_n\int[q^2\sin^2 kz+p^2\cos^2 kz]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \end{aligned} \tag{13.20}$$

考虑到谐振腔的截面积为 S,长度为 L 和$\sin^2 kz$ 积分公式

$$\begin{aligned} S&=\int\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^L\sin^2 kz\mathrm{d}z=\int_0^L\cos^2 kz\mathrm{d}z \\ &=\frac{1}{2}L \end{aligned} \tag{13.21}$$

代入(13.20)式,并注意谐振腔体积为 $V=LS$,则

$$H=\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 N_n\right)\left(\frac{1}{2}V\right)(q^2+p^2) \tag{13.22}$$

比较(13.22)和(13.15)式,则

$$N_n=\sqrt{\frac{2\Omega}{V\varepsilon_0}} \tag{13.23}$$

与简谐振子的量子化过程一样,引入产生算符和消灭算符 a^+ 和 a,它们与 q 和 p 的关系是

$$q=\sqrt{\frac{\hbar}{2}}(a^++a) \tag{13.24}$$

$$p=\mathrm{i}\sqrt{\frac{\hbar}{2}}(a^+-a) \tag{13.25}$$

利用 q 和 p 的对易关系,并将(13.24),(13.25)代入

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\hbar&=[q,p]=\mathrm{i}\frac{\hbar}{2}[(a^++a),(a^+-a)] \\ &=\mathrm{i}\hbar[a,a^+] \end{aligned} \tag{13.26}$$

由此得到. a 和 a^+ 的对易关系

$$[a,a^+]=1 \tag{13.27}$$

将 q 和 N_n 的表达式(13.24)和(13.23)代入光场的表达式(13.6),则

$$\begin{aligned} E_x &= \sqrt{\frac{\hbar\Omega}{V\epsilon_0}}(a+a^+)\sin kz \\ &= \mathscr{E}(a+a^+)\sin kz \end{aligned} \tag{13.28}$$

$$\mathscr{E}=\sqrt{\frac{\hbar\Omega}{V\epsilon_0}} \tag{13.29}$$

以后将看到 $\mathscr{E}$ 是一个光子的电场.

将 q,p 和 N_n 代入 H 的公式(13.22),并利用 a 和的 a^+ 对易关系,则有

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{4}\hbar\Omega[(a^+ +a)(a^+ +a),(a^+ -a)(a^+ -a)] \\ &= \hbar\Omega\left(a^+a+\frac{1}{2}\right) \end{aligned} \tag{13.30}$$

利用(13.30)式和 a 与 a^+ 的对易关系,可知

$$\begin{aligned} [H,a] &= \hbar\Omega[a^+a,a] \\ &= \hbar\Omega[a^+,a]a=-\hbar\Omega a \end{aligned} \tag{13.31}$$

$$[H,a^+]=\hbar\Omega a^+ \tag{13.32}$$

由海森堡方程可证明 a 和 a^+ 分别对应于光场的正频分量与负频分量,

$$\dot{a}(t)=\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[H,a]=-\mathrm{i}\Omega a \tag{13.33}$$

$$\dot{a}^+(t)=-\mathrm{i}\Omega a \tag{13.34}$$

$$a(t)=a(0)\exp(-\mathrm{i}\Omega t) \tag{13.35}$$

$$a^+(t)=a^+(0)\exp(\mathrm{i}\Omega t) \tag{13.36}$$

13.1.2 光子数态$|n\rangle$

由于简谐振子在量子光学中的重要性,下边求出光子数算符 a^+a 的本征态,即光子数态$|n\rangle$.

$$H|H\rangle=\hbar\omega|H\rangle \tag{13.37}$$

$$Ha|H\rangle=[aH,\hbar\Omega a]|H\rangle=\hbar(\omega-\Omega)a|H\rangle \tag{13.38}$$

因此 $a|H\rangle$ 也是能量的本征态,但本征值是 $\hbar(\omega-\Omega)$. 由于 a 使能量降低 $\hbar\Omega$,所以称为消灭算符. 重复使用消灭算符,便得到真空态,其本征能量最低,记为 $\hbar\omega_0$.

$$a|0\rangle=0 \tag{13.39}$$

由(13.39)和(13.30)式,可求出真空态的本征能量.

$$H|0\rangle=\hbar\Omega\left(a^{+}a+\frac{1}{2}\right)|0\rangle=\frac{1}{2}\hbar\Omega|0\rangle \tag{13.40}$$

$$\hbar\omega_0=\frac{1}{2}\hbar\Omega \tag{13.41}$$

$\frac{1}{2}\hbar\Omega$ 就称为零点能量.

同样可以分析 a^{+} 的作用. 利用(13.32)式,考虑

$$\begin{aligned}Ha^{+}|0\rangle&=[a^{+}H+\hbar\Omega a^{+}]|0\rangle\\&=\left(\hbar\Omega+\frac{1}{2}\hbar\Omega\right)a^{+}|0\rangle\end{aligned} \tag{13.42}$$

因此 a^{+} 的作用是把能量增加 $\hbar\Omega$. 将 a^{+} 连续作用 n 次,将得到的本征态称为 $|n\rangle$. 本征值为 $\hbar\omega_n$,

$$H(a^{+})^{n}|0\rangle=\left(n\hbar\Omega+\frac{1}{2}\hbar\Omega\right)(a^{+})^{n}|0\rangle \tag{13.43}$$

因此 $(a^{+})^{n}|0\rangle$ 的能量本征值是

$$\hbar\omega_n=n\hbar\Omega+\frac{1}{2}\hbar\Omega \tag{13.44}$$

因为 $\langle n|H|n\rangle=\hbar\Omega\langle n|\left(a^{+}a+\frac{1}{2}\right)|n\rangle=n\hbar\Omega+\frac{1}{2}\hbar\Omega$,则有

$$\langle n|a^{+}a|n\rangle=n \tag{13.45}$$

下面求出 a^{+} 和 a 作用于 $|n\rangle$ 的公式以及 $|n\rangle$ 的归一化的形式.

由(13.38)式可知,a 的作用是使光子数减少一个,

$$a|n\rangle=S_n|n-1\rangle \tag{13.46}$$

由于 a 不是厄米算符,所以 S_n 是复数. 将(13.46)式两端取共轭,

$$\langle n|a^{+}=(a|n\rangle)^{+}=S_n^{*}\langle n-1| \tag{13.47}$$

将(13.46)式与(13.47)式相乘

$$\langle n|a^{+}a|n\rangle=|S_n|^{2}\langle n-1|n-1\rangle=|S_n|^{2}=n \tag{13.48}$$

S_n 的位相是任意的,我们令它的相位为零. 则

$$\left.\begin{aligned}S_n&=\sqrt{n}\\a|n\rangle&=\sqrt{n}|n-1\rangle\end{aligned}\right\} \tag{13.49}$$

另一方面,产生算符 a^{+} 使光子数增加一个

$$a^{+}|n\rangle=S_{n+1}\langle n+1| \tag{13.50}$$

$$\langle n|a=S_{n+1}^{*}\langle n+1| \tag{13.51}$$

$$\left.\begin{aligned}\langle n|aa^{+}|n\rangle&=|S_{n+1}|^{2}\\\langle n|aa^{+}|n\rangle&=\langle n|(aa^{+}+1)|n\rangle=n+1\end{aligned}\right\} \tag{13.52}$$

$$S_{n+1}=\sqrt{n+1} \tag{13.53}$$

$$a^+|n\rangle=\sqrt{n+1}|n+1\rangle \tag{13.54}$$

由(13.54)式还可看出，$|n\rangle$的归一化形式是

$$|n\rangle=\frac{1}{\sqrt{n!}}(a^+)^n|0\rangle \tag{13.55}$$

容易看出是，$|n\rangle$是a^+a的本征态

$$a^+a|n\rangle=n|n\rangle \tag{13.56}$$

与简谐振子一样，也可写出本征函数在坐标表象中的表达式，引入新的变量ξ，有

$$q'=\sqrt{\frac{\hbar}{M\Omega}}\xi \tag{13.57}$$

则本征函数$\phi_n(\xi)=\langle q'|n\rangle$.

光子数态$|n\rangle$的一个重要而有趣的性质是光场的平均值为零

$$\begin{aligned}\langle n|E_x|n\rangle&=\langle n|\mathscr{E}(a+a^+)\sin kz|n\rangle\\&=\mathscr{E}\langle n|(a+a^+)|n\rangle\sin kz\\&=0\end{aligned} \tag{13.58}$$

同样，H_y的平均值也为零

$$\langle n|H_y|n\rangle=0 \tag{13.59}$$

然而，光强的平均值却不为零

$$\begin{aligned}\langle n|E_x^2|n\rangle&=\mathscr{E}^2\sin^2(kz)\langle n|(a+a^+)(a+a^+)|n\rangle\\&=\mathscr{E}^2\sin^2(kz)\langle n|aa+aa^++a^+a+a^+a^+|n\rangle\\&=2\mathscr{E}^2\sin^2(kz)\left(n+\frac{1}{2}\right)\end{aligned} \tag{13.60}$$

考虑$\overline{\sin^2 kz}=\frac{1}{2}$，因此

$$\langle n|E_x^2|n\rangle=\mathscr{E}^2\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

其中$\frac{1}{2}\mathscr{E}^2$是零点振动的光强，$n\mathscr{E}^2$那是n个光子的光强. 因此$\mathscr{E}$就是一个光子的光场.

既然$|n\rangle$表示有n个光子的态，为什么光场的平均值为零呢？这是因为，光子n与位相是一对测不准量，满足测不准关系. 既然态$|n\rangle$的光子数是完全确定的，就必然使位相完全混乱. 频率为Ω而位相完全混乱的电场的测量值便是零.

13.1.3 电磁场的量子化的其他形式

在激光物理学和量子光学中，有时还用到矢量势的量子化、行波场的

量子化以及多模场的量子化.

(1) 矢量势的量子化

利用矢量势与光场 E 的关系式

$$E(z,t)=-\frac{\partial}{\partial t}A(z,t) \tag{13.61}$$

考虑到

$$a=a(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t}$$

$$\int a\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{i}}{\Omega}a(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t}=\frac{\mathrm{i}}{\Omega}a(t)$$

$$\int a^{+}\mathrm{d}t=-\frac{\mathrm{i}}{\Omega}a^{+}(t)$$

$$A(z,t)=-\int E_x(z,t)\mathrm{d}t=-\sqrt{\frac{\hbar\Omega}{V\varepsilon_0}}\sin kz\int(a+a^{+})\mathrm{d}t$$

$$=\sqrt{\frac{\hbar}{V\varepsilon_0\Omega}}\mathrm{i}(a-a^{+})\sin kz \tag{13.62}$$

(2) 行波场的量子化

与驻波场的量子化方法相似,也可对行波量子化.

$$E(z,t)=\mathrm{i}\sqrt{\frac{\hbar\Omega}{2\varepsilon_0 V}}[a(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t+\mathrm{i}kz}-a^{+}(0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t-\mathrm{i}kz}]$$

$$=\mathrm{i}\sqrt{\frac{\hbar\Omega}{2\varepsilon_0 V}}[a\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}-a^{+}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz}] \tag{13.63}$$

$$A=\sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\Omega V}}[a\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}-a^{+}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz}] \tag{13.64}$$

(3) 多模场的量子化

多模场可看成许多单模场的叠加.

$$H=\sum_s\hbar\Omega_s\left[a_s^{+}a_s+\frac{1}{2}\right] \tag{13.65}$$

$$E_x(z,t)=\sum_s\mathscr{E}_s(a_s+a_s^{+})\sin k_s z \tag{13.66}$$

$$[a_s,a_{s'}^{+}]=\delta_{ss'} \tag{13.67}$$

对于第 s 个模,

$$H_s|n_s\rangle=\hbar\Omega_s\left(n_s+\frac{1}{2}\right)|n_s\rangle \tag{13.68}$$

若多模场的第 $1,2,\cdots,s$ 模内的光子数分别是 $n_1,n_2,\cdots,n_s$,则多模场的本征态是

$$|n_1\rangle|n_2\rangle\cdots|n_s\rangle\cdots \tag{13.69}$$

或简记为

$$|n_1 n_2 \cdots n_s\rangle \equiv |\{n_s\}\rangle = \prod_s \frac{(a_k^+)^s}{n_s!}|0\rangle \tag{13.70}$$

第 s 个模的算符 a_s 只影响该模内的光子数，

$$a_s|n_1 n_2 \cdots n_s \cdots\rangle = \sqrt{n_s}|n_1 n_2 \cdots n_s - 1 \cdots\rangle \tag{13.71}$$

$$|\psi\rangle = \sum_{n_1}\sum_{n_2}\cdots\sum_{n_s}\cdots C_{n_1 n_2 \cdots n_s \cdots}|n_1 n_2 \cdots n_s \cdots\rangle = \sum_{\{n_s\}} C_{(n_s)}|\{n_s\}\rangle \tag{13.72}$$

13.2 光子的位相算符

在上节对电磁场量子化以后，我们看到算符 a 和 a^+ 分别对应于经典场的正频分量和负频分量的振幅，而没考虑电磁场的位相. 还特别证明了在光子数态表象中，光场平均值为零，即

$$\langle n|E_x|n\rangle = 0 \tag{13.73}$$

并且指出其原因在于光子数确定时，位相变成完全无规则的，光子数与位相是一对测不准量. 本节引入光子位相算符的概念，并讨论光子位相完全确定的态及其性质.

13.2.1 光子的位相算符

在经典的电磁场理论中，通常把复数振幅写成实数振幅与位相因子的乘积. 与此相似，也可以把 a 和 a^+ 写成振幅与位相因子的乘积. 考虑到实数振幅对应于厄米算符，以及有

$$aa^+ = \hat{n} + 1$$

可以把 $\sqrt{\hat{n}+1}$ 看成振幅，再引入位相算符 $\hat{\Phi}$

$$a = (\hat{n}+1)^{1/2}\exp(\mathrm{i}\hat{\Phi}) \tag{13.74}$$

$$a^+ = (\hat{n}+1)^{1/2}\exp(-\mathrm{i}\hat{\Phi}) \tag{13.75}$$

可以证明，在适当的极限下，$\hat{\Phi}$ 与经典场的位相有同样的物理意义.

从 a 和 a^+ 的性质，容易知道这样定义的位相算符的性质. 将(13.74)和(13.75)式变为

$$\exp(\mathrm{i}\hat{\Phi}) = (\hat{n}+1)^{-1/2}a \tag{13.76}$$

$$\exp(-\mathrm{i}\hat{\Phi}) = a^+(\hat{n}+1)^{-1/2} \tag{13.77}$$

将两式左右两边分别相乘，并考虑 $a^+a = n+1$，则

$$\exp(\mathrm{i}\hat{\Phi})\exp(-\mathrm{i}\hat{\Phi})=1 \tag{13.78}$$

但是由于$\hat{\Phi}$是算符，不满足乘法交换律.

$$\exp(-\mathrm{i}\hat{\Phi})\exp(\mathrm{i}\hat{\Phi})=a^{+}(\hat{n}+1)^{-1/2}a \tag{13.79}$$

$$[\exp(\mathrm{i}\hat{\Phi}),\exp(-\mathrm{i}\hat{\Phi})]=1-a^{+}(\hat{n}+1)^{-1}a \tag{13.80}$$

显然，$\hat{n}\gg 1$时，(13.78)与(13.79)式相等，这说明光子数很多时，量子理论便过渡到经典理论.

由(13.76)和(13.77)式，可以计算位相算符对光子数态$|n\rangle$的作用

$$\begin{aligned}\exp(\mathrm{i}\hat{\Phi})|n\rangle&=(\hat{n}+1)^{-1/2}a|n\rangle\\&=(\hat{n}+1)^{-1/2}\sqrt{n}|n-1\rangle\end{aligned} \tag{13.81}$$

考虑到

$$(\hat{n}+1)^{-1/2}\sqrt{n}|n-1\rangle=\sqrt{n}[(n-1)+1]^{-1/2}|n-1\rangle \tag{13.82}$$

代入(13.81)式，则

$$\exp(\mathrm{i}\hat{\Phi})|n\rangle=\begin{cases}|n-1\rangle, & n\neq 0\\ 0, & n=0\end{cases} \tag{13.83}$$

$$\begin{aligned}\exp(-\mathrm{i}\hat{\Phi})|n\rangle&=a^{+}(\hat{n}+1)^{-1/2}|n\rangle=a^{+}(n+1)^{-1/2}|n\rangle\\&=|n+1\rangle\end{aligned} \tag{13.84}$$

由(13.82)和(13.84)式，可求$\exp(\pm\mathrm{i}\hat{\Phi})$的矩阵元

$$\left.\begin{aligned}\langle n-1|\exp(\mathrm{i}\hat{\Phi})|n\rangle&=1\\ \langle n+1|\exp(-\mathrm{i}\hat{\Phi})|n\rangle&=1\end{aligned}\right\} \tag{13.85}$$

其他的矩阵元都是零. 这与a和a^{+}矩阵元相似. 上边的方程显示了位相算符的性质. 但是，由定义式(13.76)和(13.77)看出，$\exp(\pm\mathrm{i}\hat{\Phi})$不是厄米算符，因此不代表可测的物理量. 但是可以由$\exp(\pm\mathrm{i}\hat{\Phi})$定义如下的厄米算符

$$\cos\hat{\Phi}=\frac{1}{2}[\exp(\mathrm{i}\hat{\Phi})+\exp(-\mathrm{i}\hat{\Phi})] \tag{13.86}$$

$$\sin\hat{\Phi}=\frac{1}{2\mathrm{i}}[\exp(\mathrm{i}\hat{\Phi})-\exp(-\mathrm{i}\hat{\Phi})] \tag{13.87}$$

由(13.84)和(13.85)式可知

$$\left.\begin{aligned}\langle n-1|\cos\hat{\Phi}|n\rangle&=\frac{1}{2}\langle n-1|[\exp(\mathrm{i}\hat{\Phi})+\exp(-\mathrm{i}\hat{\Phi})]|\mathrm{n}\rangle=\frac{1}{2}\\ \langle n-1|\sin\hat{\Phi}|n\rangle&=\frac{1}{2\mathrm{i}}\end{aligned}\right\} \tag{13.88}$$

由 $\cos\hat{\Phi}$ 和 $\sin\hat{\phi}$ 的定义式(13.86)和(13.87)可证

$$[\cos\hat{\phi},\sin\hat{\phi}]=\frac{1}{4\mathrm{i}}[\exp(\mathrm{i}\hat{\Phi}),-\exp(-\mathrm{i}\hat{\Phi})]+$$

$$\frac{1}{4\mathrm{i}}[\exp(-\mathrm{i}\hat{\Phi}),\exp(\mathrm{i}\hat{\Phi})]$$

$$=\frac{1}{2\mathrm{i}}[\exp(\mathrm{i}\hat{\Phi}),-\exp(-\mathrm{i}\hat{\Phi})] \tag{13.89}$$

将(13.79)式代入,则

$$[\cos\hat{\Phi},\sin\hat{\Phi}]=\frac{1}{2\mathrm{i}}[a^{+}(\hat{n}+1)^{-1}a-1] \tag{13.90}$$

这表明 $\cos\hat{\Phi}$ 和 $\sin\hat{\Phi}$ 是非对易的,因此不能同时精确测量它们. 由(13.91)式还可看出,只有下面的矩阵元不为零

$$\langle 0|[\cos\hat{\Phi},\sin\hat{\Phi}]|0\rangle=\frac{\mathrm{i}}{2} \tag{13.91}$$

其他的矩阵元都为零.

由 a 和 a^{+} 对易关系与位相算符的定义,可以求出它们与光子数算符 $\hat{n}$ 的对易关系.

$$[\hat{n},a]=[a^{+}a,a]=a^{+}aa-aa^{+}a$$

$$=(a^{+}a-aa^{+})a=-a \tag{13.92}$$

$$[\hat{n},a]=a^{+} \tag{13.93}$$

$$[\hat{n},\exp(\mathrm{i}\hat{\Phi})]=[\hat{n},(\hat{n}+1)^{-1/2}a]$$

$$=(\hat{n}+1)^{-1/2}[\hat{n},a]=-(\hat{n}+1)^{-1/2}a$$

$$=-\exp(\mathrm{i}\hat{\Phi}) \tag{13.94}$$

$$[\hat{n},\exp(-\mathrm{i}\hat{\Phi})]=\exp(-\mathrm{i}\hat{\Phi}) \tag{13.95}$$

利用(13.92)和(13.93)式,容易证明

$$[\hat{n},\cos\hat{\Phi}]=\frac{1}{2}\{[\hat{n},\exp(\mathrm{i}\hat{\Phi})]+[\hat{n},\exp(-\mathrm{i}\hat{\Phi})]\}$$

$$=-\mathrm{i}\sin\hat{\Phi} \tag{13.96}$$

$$[\hat{n},\sin\hat{\Phi}]=\mathrm{i}\cos\hat{\Phi} \tag{13.97}$$

这些对易关系表明,$\hat{n}$ 和$\hat{\Phi}$不可能同时准确测量. 与 $\hat{n}$ 联系的振幅和与 $\cos\hat{\Phi}$ 和 $\sin\hat{\Phi}$ 联系的位相$\hat{\Phi}$,也不能同时测量.

由量子力学可知,若算符 O_1 和 O_2 不对易,并且

$$[O_1,O_2]=O_1O_2-O_2O_1 \tag{13.98}$$

则 O 的平均值和均方差分别为

$$\langle O\rangle=\langle\Phi|O|\Phi\rangle \tag{13.99}$$

$$\Delta O=[\langle(O-\langle O\rangle)^2\rangle]^{1/2} \tag{13.100}$$

由量子力学可证明测不准关系为

$$\Delta O_1\cdot\Delta O_2\geqslant\frac{1}{2}|\langle[O_1,O_2]\rangle| \tag{13.101}$$

动量 p 与坐标 x 的测不准关系是(13.101)的一个著名的例子. 令 $x=O_1$, $p=O_2$, 则

$$\Delta x\Delta p\geqslant\frac{1}{2}|\langle[x,p]\rangle|=\frac{1}{2}|\langle i\hbar\rangle|=\frac{1}{2}\hbar \tag{13.102}$$

令

$$\hat{n}=O_1,\quad \cos\hat{\Phi}=O_2$$

利用(13.101),(13.96)及(13.97)式,则

$$\begin{aligned}\Delta n\Delta\hat{\Phi}&\geqslant\frac{1}{2}|\langle[\hat{n},\cos\hat{\Phi}]\rangle|\\&=\frac{1}{2}|\langle-i\sin\hat{\Phi}\rangle|\\&=\frac{1}{2}|\langle\sin\hat{\Phi}\rangle|\end{aligned} \tag{13.103}$$

$$\Delta n\Delta\sin\hat{\Phi}\geqslant\frac{1}{2}|\langle[\cos\hat{\Phi}]\rangle| \tag{13.104}$$

或者,令 $C\equiv\cos\hat{\Phi}$, $S\equiv\sin\hat{\Phi}$, 则

$$\Delta n\Delta C\geqslant\frac{1}{2}|\langle S\rangle| \tag{13.105}$$

$$\Delta n\Delta S\geqslant\frac{1}{2}|\langle C\rangle| \tag{13.106}$$

由(13.105)和(13.106)式,可定义一个量 U

$$U\equiv(\Delta n)^2\frac{(\Delta S)^2+(\Delta C)^2}{\langle S\rangle^2+\langle C\rangle^2}\geqslant\frac{1}{4} \tag{13.107}$$

(13.105),(13.106)式表示光子数与位相不能同时精确地测量. 这是量子化电磁场与经典电磁场的根本区别.

13.2.2 位相算符的本征态$|\phi\rangle$

在 13.1 节已经讨论过光子数算符 $\hat{n}$ 的本征态$|n\rangle$,现在研究位相算符的本征态$|\phi\rangle$.

我们已经引入两个算符 $\cos\hat{\Phi}$ 和 $\sin\hat{\Phi}$ 来表示量子化的电磁场的性

质.但是,在计算中可以只选择一个位相算符($\cos\hat{\Phi}$),因为另一个算符($\sin\hat{\Phi}$)的计算相似.

按照(13.91)式,$\cos\hat{\Phi}$和$\sin\hat{\Phi}$是非对易的,因此它们不能同时精确测量,也就没有共同的本征态.但是,由(13.91)式只有$\langle 0|[\cos\hat{\Phi},\sin\hat{\Phi}]|0\rangle$这个矩阵元不为零,这样,在一定的极限条件下,$\cos\hat{\Phi}$和$\sin\hat{\Phi}$却可以有共同的本征态$|\phi\rangle$.

将$|\phi\rangle$定义为全部的光子数态$|n\rangle$的线性叠加,但每个$|n\rangle$的权重是位相因子$\exp(in\phi)$.

$$|\phi\rangle=\lim_{s\to\infty}(s+1)^{-1/2}\sum_{n=0}^{s}\exp(in\phi)|n\rangle \tag{13.108}$$

由于$|n\rangle$是正交归一的,$|\phi\rangle$也是正交归一的.

$$\begin{aligned}\langle\phi|\phi\rangle&=\lim_{s\to\infty}(s+1)^{-1}\sum_{m}^{s}\sum_{n}^{s}\exp[i(n-m)\phi]\langle m|n\rangle\\&=\lim_{s\to\infty}(s+1)^{-1}\sum_{n=0}^{s}1=1\end{aligned} \tag{13.109}$$

接着考虑$\cos\hat{\Phi}$对$|\phi\rangle$的作用

$$\cos\hat{\Phi}|\phi\rangle=\frac{1}{2}[\exp(i\hat{\Phi})+\exp(-i\hat{\Phi})]|\phi\rangle \tag{13.110}$$

前边(13.83)和(13.84)式已经给出了$\exp(\pm i\hat{\Phi})$对$|n\rangle$的作用,代入方程(13.110),则

$$\begin{aligned}\cos\hat{\Phi}|\phi\rangle=\frac{1}{2}\lim_{s\to\infty}(s+1)^{-1/2}\Big[&\sum_{n=1}^{s}\exp(in\phi)|n-1\rangle+\\&\sum_{n=0}^{s}\exp(in\phi)|n+1\rangle\Big]\end{aligned} \tag{13.111}$$

其中第一个求和来自$\exp(i\hat{\Phi})|n\rangle$,$n=0$的那项为零.(13.111)中的两个求和分别为:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{s}\exp(in\phi)|n-1\rangle&=\exp(i\phi)\sum_{n=1}^{s}\exp[i(n-1)\phi]|n-1\rangle\\&=\exp(i\phi)\sum_{m=0}^{s}\exp(im\phi)|m\rangle\\&=\exp(i\phi)\sum_{m=0}^{s}\exp(im\phi)|m\rangle-\exp(i\phi)\exp(is\phi)|s\rangle\end{aligned} \tag{13.112}$$

$$\sum_{n=0}^{s}\exp(in\phi)|n+1\rangle=\exp(-i\phi)\sum_{n=0}^{s}\exp[i(n+1)\phi]|n+1\rangle$$
$$=\exp(-i\phi)\sum_{l=1}^{s+1}\exp(il\phi)|l\rangle$$
$$=\exp(-i\phi)\sum_{l=0}^{s}\exp(-il\phi)|l\rangle+$$
$$\exp(-i\phi)\exp[i(s+1)\phi]|s+1\rangle-\exp(-i\phi)|0\rangle \tag{13.113}$$

将(13.112)和(13.113)式代入(13.111)式,则

$$\cos\hat{\Phi}|\phi\rangle=\cos\phi|\phi\rangle+\frac{1}{2}\lim_{s\to\infty}(s+1)^{-1/2}\{\exp(i\phi)|s+1\rangle-$$
$$\exp[i(s+1)\phi]|s\rangle-\exp(-i\phi)|0\rangle\} \tag{13.114}$$

(13.114)式表明,$|\phi\rangle$并不是 $\cos\hat{\phi}$ 的严格的本征态,因为多出了后边的三项.但是,当 $s\to\infty$时,由于$(s+1)^{-1/2}\to 0$,所以在这个极限条件下,

$$\cos\hat{\Phi}|\phi\rangle=\cos\phi|\phi\rangle,\quad s\to\infty \tag{13.115}$$
$$\langle\phi|\cos\hat{\Phi}|\phi\rangle=\langle\phi|\cos\phi|\phi\rangle=\cos\phi \tag{13.116}$$

同理可证

$$\langle\phi|\sin\hat{\Phi}|\phi\rangle=\sin\phi \tag{13.117}$$

在 $s\to\infty$的极限条件下,还可计算出位相算符平方的期待值

$$\langle\phi|\cos^2\hat{\Phi}|\phi\rangle=\cos^2\phi \tag{13.118}$$
$$\langle\phi|\sin^2\hat{\Phi}|\phi\rangle=\sin^2\phi \tag{13.119}$$

$s\to\infty$的极限条件,就是光子数趋向无限大.这时,量子理论过渡到经典理论,$|\phi\rangle$变成 $\cos\hat{\Phi}$和 $\sin\hat{\Phi}$共同的本征态,$\hat{\Phi}$具有位相角的含义.

13.3 光子数态和位相态的性质

在以上两节中分别引入了光子数态$|n\rangle$和位相态$|\phi\rangle$.本节分别研究$|n\rangle$态和$|\phi\rangle$态的性质,并与经典的电磁场进行比较.

13.3.1 单模的光子数态的性质

光子数态,就是光子数 n 完全确定的态.对这样的态,光子数的测不准量为零,即

$$\Delta n=0 \tag{13.120}$$

在光子数态中,位相算符的期待值分别是

$$\langle n|\cos\hat{\Phi}|n\rangle=\langle n|\sin\hat{\Phi}|n\rangle=0 \tag{13.121}$$

$$\cos\hat{\Phi}\cos\hat{\Phi}=\frac{1}{4}\{e^{i\hat{\Phi}}e^{i\hat{\Phi}}+e^{-i\hat{\Phi}}e^{i\hat{\Phi}}+e^{i\hat{\Phi}}e^{-i\hat{\Phi}}+e^{-i\hat{\Phi}}e^{-i\hat{\Phi}}\}$$

$$=\frac{1}{4}\{1+e^{-i\hat{\Phi}}e^{i\hat{\Phi}}+e^{i\hat{\Phi}}e^{i\hat{\Phi}}+e^{-i\hat{\Phi}}e^{-i\hat{\Phi}}\} \tag{13.122}$$

根据 $e^{\pm i\hat{\Phi}}$ 的定义，有

$$\langle n|\cos^2\hat{\Phi}|n\rangle=\frac{1}{4},\quad \text{当 } n=0 \text{ 时}, \tag{13.123}$$

当 $n\neq 0$ 时，

$$\langle n|e^{i\hat{\Phi}}e^{i\hat{\Phi}}|n\rangle=\langle n|e^{-i\hat{\Phi}}e^{-i\hat{\Phi}}|n\rangle=0 \tag{13.124}$$

$$\langle n|e^{-i\hat{\Phi}}e^{i\hat{\Phi}}|n\rangle=\langle n|a^+(\hat{n}+1)^{-1}a|n\rangle$$

$$=n\langle n-1|(\hat{n}+1)^{-1}|n-1\rangle=1 \tag{13.125}$$

利用(13.124)、(13.125)以及(13.122)式，则得到

$$\langle n|\cos^2\hat{\Phi}|n\rangle=\frac{1}{2},\quad \text{当 } n\neq 0 \text{ 时} \tag{13.126}$$

$$\langle n|\sin^2\hat{\Phi}|n\rangle=\frac{1}{2},\quad \text{当 } n\neq 0 \text{ 时} \tag{13.127}$$

如果排除 $n=0$ 的态，则

$$\langle n|\cos^2\hat{\Phi}|n\rangle=\langle n|\sin^2\hat{\Phi}|n\rangle=\frac{1}{2} \tag{13.128}$$

由量子力学的平均值的定义，可知

$$\frac{1}{2}=\langle n|\cos^2\hat{\Phi}|n\rangle=\overline{\cos^2\phi} \tag{13.129}$$

$$\frac{1}{2}=\langle n|\sin^2\hat{\Phi}|n\rangle=\overline{\sin^2\phi} \tag{13.130}$$

但是我们知道当 ϕ 在 $0\sim 2\pi$ 内无规则分布时有下式，

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\phi\mathrm{d}\phi=\frac{1}{2} \tag{13.131}$$

所以由(13.129)、(13.130)式与(13.131)式比较，得到

$$\overline{\cos^2\phi}=\overline{\sin^2\phi}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\phi\mathrm{d}\phi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2\phi\mathrm{d}\phi=\frac{1}{2}$$

这表明 ϕ 是在 0 和 2π 之间无规分布的. 因此，对于光子数有精确值的态 $|n\rangle$，位相 ϕ 是在 $0\sim 2\pi$ 之间无规分布的.

单模光子数态的这个性质，可以用图 13.1 表示. 对于单模行波场，由(13.64)，

$$\hat{E}=i\left(\frac{\hbar\Omega}{2\varepsilon_0 V}\right)^{1/2}\{a\exp(ikz)-a^+\exp(-ikz)\} \tag{13.132}$$

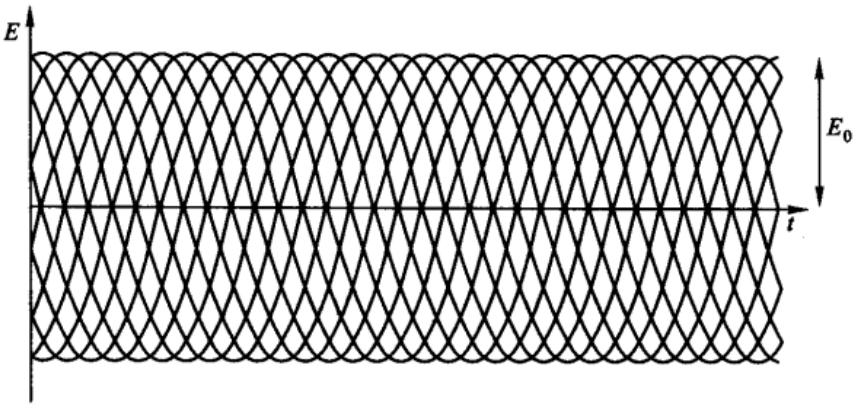


图 13.1 单模光子数态$|n\rangle$的光场在一个固定点随时间 t 的变化：振幅是确定的，但位相是在 0～2π 之间无规则分布的

$$\langle n|\hat{E}|n\rangle=0 \tag{13.133}$$

$$\langle n|\hat{E}^2|n\rangle=\left(\frac{\hbar\Omega}{\varepsilon_0 V}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)=E^2\left(n+\frac{1}{2}\right) \tag{13.134}$$

$$\begin{aligned}\Delta E&=[\langle(E-\langle E\rangle)^2\rangle]^{1/2}\\&=[\langle E^2\rangle-\langle E\rangle^2]^{1/2}\\&=\left(\frac{\hbar\Omega}{\varepsilon_0 V}\right)^{1/2}\left(n+\frac{1}{2}\right)^{1/2}\end{aligned} \tag{13.135}$$

图 13.1 表明，频率为 Ω 的单模电磁场，其振幅是有确定的值，但是位相是在 0 到 2π 之间无规则分布的，其中每个正弦波的频率都是 Ω，振幅都有起伏值 ΔE. 但是这些正弦波的位相是混乱的. 因此$\langle E\rangle=0$，但是$\langle E^2\rangle\neq 0$.

13.3.2 单模场的位相态

单模场的位相态，当 $s\to\infty$时，由(13.116)式和(13.117)式可知位相有确定的值，故测不准量为零，

$$\left.\begin{aligned}\Delta\cos\phi&=0\\\Delta\sin\phi&=0\end{aligned}\right\} \tag{13.136}$$

但在这种情况，光子数却是不确定的：

$$\begin{aligned}\langle\phi|\hat{n}|\phi\rangle&=\lim_{s\to\infty}(s+1)^{-1}\sum_{m=0}^{s}\exp(-im\phi)\langle m|\hat{n}|\sum_{n=0}^{s}\exp(in\phi)|n\rangle\\&=\lim_{s\to\infty}(s+1)^{-1}\sum_{n=0}^{s}n=\lim_{s\to\infty}\frac{1}{2}s\end{aligned} \tag{13.137}$$

其中用到级数 $\sum_{n=0}^{s}n=\frac{1}{2}(1+s)s$.

$$\langle\phi|\hat{n}^2|\phi\rangle=\lim_{s\to\infty}(s+1)^{-1}\sum_{n=0}^{s}n^2=\lim_{s\to\infty}\frac{1}{6}s(2s+1) \tag{13.138}$$

因此光子数的起伏是无穷大，

$$\begin{aligned}\Delta n&=\lim_{s\to\infty}[\langle n^2\rangle-\langle n\rangle^2]^{1/2}\\&=\lim_{s\to\infty}\left[\frac{1}{12}(s+2)s\right]\to\infty\end{aligned} \tag{13.139}$$

由$\hat{E}$的表达式可知

$$\langle\phi|\hat{E}|\phi\rangle=-2\left(\frac{\hbar\Omega}{2\varepsilon_0 V}\right)^{1/2}\sin(kr-\Omega t+\phi)\lim_{s\to\infty}(s+1)^{-1}\sum_{n=0}^{s}\sqrt{n+1} \tag{13.140}$$

当$s\to\infty$，其中的求和是按$s^{3/2}$发散的，因此$\langle E\rangle\to\infty$. 电场的测不准量也是无穷大. 但是电场的频率$\Omega$和位相$\phi$是固定的. 图 13.2 表明，光场是无穷多个振幅不同但Ω,ϕ固定的波的叠加. 这样，腔内的光子数是完全不确定的.

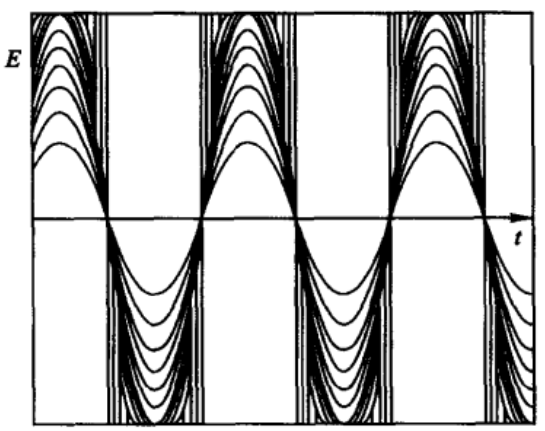


图 13.2 单模位相态$|\phi\rangle$的光场在一个固定点随时间t的变化：位相是完全确定的，但振幅是在 0～∞之间完全不确定的

由(13.137)式看出，在位相态$\langle n\rangle\to\infty$，这就意味着从真空态激发的能量的期待值也是无穷大，这在实际实验中能否实现值得讨论. 我们之所以讨论位相态，主要目的就在于说明量子化的电磁场的位相与光子数不可能同时确定.

13.4 相 干 态

从光子数态$|n\rangle$和位相态$|\phi\rangle$的讨论看出，它们与确定的振幅和确定

的位相的经典电磁场差别很大. 因此，寻找和研究与经典电磁场相似而且当光子数很大时即过渡到经典电磁场的光子态是有重要意义的. 这样的光子态，最接近经典电磁场，而且可以证明，这样的光子态是完全相干的(相干度等于1)，因此称为相干态.

从测不准关系来看，本节将要讨论的相干态是介于光子数态$|n\rangle$和位相态$|\phi\rangle$之间的情况，即相干态的$\Delta n\neq 0$，$\Delta\cos\phi=0$，Δn和$\Delta\cos\phi$由测不准关系决定. 但是当光子数n趋于无限大时，过渡到$\Delta n=0$及$\Delta\cos\phi=0$. 这就是有稳定的振幅和确定的位相的经典电磁场.

相干态在激光物理学和量子光学中的重要性在于：(1)它在电磁场的量子理论与经典理论之间起着桥梁作用，经典电场等于量子化电场在相干态中的平均值，当光子数n趋向无穷大时，量子化的电磁场即过渡到经典电磁场. (2)它是处理激光及其与物质作用的许多问题的重要理论工具. 特别是使用相干态时，能深刻揭示激光全量子理论的3个学派——拉姆学派、拉各斯和路易塞尔学派、哈肯学派的理论的内在联系. (3)当激光器在远高于阈值工作时，激光器产生的激光就是相干态的光子.

本节研究相干态的定义和性质. 下节研究算符、态矢量按相干态的展开.

13.4.1 相干态的定义

相干态记为$|\alpha\rangle$. 相干态有3种定义：

(1) 相干态是光子消灭算符的本征态

$$a|\alpha\rangle=\alpha|\alpha\rangle \tag{13.141}$$

(2) 相干态是由位移算符$D(\alpha)$作用于真空态产生的

$$|\alpha\rangle=D(\alpha)|0\rangle \tag{13.142}$$

$$D(\alpha)=\exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right)\exp(\alpha a^+) \tag{13.143}$$

(3) 满足下列的分解规则的光子态称为相干态

$$\langle|\psi^{(-)}(x_1)\cdots\psi^{(-)}(x_p)\psi^{(+)}(x_p)\cdots\psi^{(+)}(x_1)|\rangle=\prod_i\langle\psi^{(-)}(x_i)\psi^{(+)}(x_i)\rangle \tag{13.144}$$

其中$\psi^{(-)}$和$\psi^{(+)}$是与a和a^+成比例的算符. 我们采用第一种定义，并将证明这样定义的相干态具有公式(13.142)和(13.144)表示的性质.

由于单模电磁场可分解为正频分量和负频分量，所以

$$E_x(z,t)=\mathscr{E}(a+a^+)\sin kz=E^{(+)}+E^{(-)} \tag{13.145}$$

$$E^{(+)}=\mathscr{E}a\sin kz \tag{13.146}$$

$$E^{(-)}=\mathscr{E}a^+\sin kz \tag{13.147}$$

由相干态的定义(13.141)及 $E^{(+)}$ 与 a 的关系(13.146),有

$$\left.\begin{aligned} a|\alpha\rangle &= \alpha|\alpha\rangle \\ E^{(+)}|\alpha\rangle &= \mathscr{E}|\alpha\rangle \end{aligned}\right\} \tag{13.148}$$

因此,相干态也是光场的正频分量的本征态.

对于多模场,如果

$$a_k|\alpha_k\rangle = \alpha_k|\alpha_k\rangle \tag{13.149}$$

多模场的相干态就是

$$|\{\alpha_k\}\rangle = \prod_k |\alpha_k\rangle \tag{13.150}$$

只要知道了单模场的相干态,就可以知道多模场的相干态.

应特别注意,由于 a 不是厄米算符,因此 $a|\alpha\rangle=\alpha|\alpha\rangle$ 的本征值 α 一般是复数.

13.4.2 相干态在光子数态中的表示

由于已经熟知 a 和 a^+ 的性质及其对 $|n\rangle$ 的作用,而且光子数 n 与实验有密切联系,因此,将 $|\alpha\rangle$ 用光子数态 $|n\rangle$ 表示出来,对于讨论相干态的性质和进行计算都是方便的.

已知光子数态的归一化形式是

$$\left.\begin{aligned} |n\rangle &= \frac{(a^+)^2}{\sqrt{n!}}|0\rangle \\ \langle n| &= \langle 0|\frac{(a)^2}{\sqrt{n!}} \end{aligned}\right\} \tag{13.151}$$

由于 $|n\rangle$ 是完备正交基

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = 1 \tag{13.152}$$

$$\langle n|m\rangle = \delta_{nm} \tag{13.153}$$

因此,利用(13.152)式,可将相干态按 $|n\rangle$ 展开为

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n|\alpha\rangle \tag{13.154}$$

再利用(13.151)式和相干态的定义式(13.141),可求出展开系数

$$\langle n|\alpha\rangle = \langle 0|\frac{(a)^n}{\sqrt{n!}}|\alpha\rangle = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\langle 0|\alpha\rangle \tag{13.155}$$

将展开系数代入(13.154)式,则

$$\left.\begin{aligned} |\alpha\rangle &= \langle 0|\alpha\rangle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \\ \langle\alpha| &= \langle\alpha|0\rangle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha^*)^n}{\sqrt{n!}}\langle n| \end{aligned}\right\} \tag{13.156}$$

由归一化条件还可进一步求出上式中的$\langle 0|\alpha\rangle$，

$$1=\langle\alpha|\alpha\rangle=|\langle 0|\alpha\rangle|^2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\frac{(\alpha^*)^m}{\sqrt{m!}}\langle m|n\rangle$$

$$=|\langle 0|\alpha\rangle|^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(|\alpha|^2)^n}{n!}$$

$$=|\langle 0|\alpha\rangle|^2\exp(|\alpha|^2) \tag{13.157}$$

$$\langle 0|\alpha\rangle=\exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \tag{13.158}$$

将(13.158)式代入(13.156)式

$$\left.\begin{aligned}|\alpha\rangle&=\exp\left[-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right]\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle\\ \langle\alpha|&=\exp\left[-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right]\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha^*)^n}{\sqrt{n!}}\langle n|\end{aligned}\right\} \tag{13.159}$$

利用(16.159)式，很容易讨论相干态的性质. 哈肯实际上就是以(13.159)式作为相干态的定义.

13.4.3 相干态的性质

(1) 相干态中的光子数及起伏

$$\langle\alpha|\hat{n}|\alpha\rangle=\langle\alpha|a^+a|\alpha\rangle=|\alpha|^2=\langle n\rangle \tag{13.160}$$

即相干态的本征值的模的平方就等于相干态的平均光子数. 由于光子数 n 与光强有关，因此 α 与光场有关，α 就是光场正频分量在相干态中的期待值

$$\langle\alpha|\hat{E}^{(-)}|\alpha\rangle=\mathscr{E}\sin(kz)\alpha=\langle\hat{E}^{(-)}\rangle \tag{13.161}$$

$$\langle\alpha|\hat{E}^{(+)}|\alpha\rangle=\mathscr{E}\sin(kz)\alpha^*=\langle\hat{E}^{(+)}\rangle \tag{13.162}$$

$$\langle\alpha|\hat{n}^2|\alpha\rangle=\langle\alpha|a^+aa^+a|\alpha\rangle$$

$$=\alpha^*\langle\alpha|aa^+|\alpha\rangle\alpha$$

$$=|\alpha|^2\langle\alpha|(1+a^+a)|\alpha\rangle=|\alpha|^2(1+|\alpha|^2) \tag{13.163}$$

或者

$$\langle\alpha|\hat{n}^2|\alpha\rangle=\langle n\rangle+\langle n\rangle^2 \tag{13.164}$$

$$\langle n^2\rangle-\langle n\rangle^2=\langle n\rangle \tag{13.165}$$

$$\Delta n\equiv[\langle n^2\rangle-\langle n\rangle^2]^{1/2}=\langle n\rangle^{1/2}=|\alpha| \tag{13.166}$$

以后将证明，远高于阈值的激光器的光子数的均方差与(13.165)式一样. 相对起伏是

$$\Delta n/\langle n\rangle=1/\langle n\rangle^{1/2} \tag{13.167}$$

(2) 相干态的光子的分布是泊松分布

从$|\alpha\rangle$按$|n\rangle$展开的公式(13.159),

$$|\alpha\rangle=\exp\left[-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right]\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle$$

其中的展开系数的模的平方的物理意义就是在相干态$|\alpha\rangle$中发现n个光子的几率

$$P_n(\alpha)=\left|\exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right)\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\right|^2$$

$$=\exp(-|\alpha|^2)\frac{(|\alpha|^2)^n}{n!} \tag{13.168}$$

注意到(13.160)式,$|\alpha|^2=\langle n\rangle$,所以

$$P_n(\alpha)=\frac{\langle n\rangle^n}{n!}e^{-\langle n\rangle} \tag{13.169}$$

这就是泊松分布.在激光的全量子理论中将证明,激光器在远高于阈值时,其光子分布就是泊松分布,因此对应相干态的光子.

(3) 相干态的相干度等于1

按照一级相干度的定义

$$\gamma=\frac{\langle E^{(+)}E^{(-)}\rangle}{\sqrt{\langle E^{(+)}E^{(-)}\rangle\langle E^{(+)}E^{(-)}\rangle}}$$

$$=\frac{\langle\alpha|a^+a|\alpha\rangle}{\sqrt{\langle\alpha|a^+a|\alpha\rangle\langle\alpha|a^+a|\alpha\rangle}}=\frac{|\alpha|^2}{|\alpha|^2}=1 \tag{13.170}$$

以后还可证明相干态的各级相干度都等于1.这就是把$|\alpha\rangle$称为相干态的原因.

(4) 相干态的本征值α的位相及位相起伏

因为a不是厄米算符,$a|\alpha\rangle=\alpha|\alpha\rangle$.$\alpha$是复数,可写成

$$\alpha=|\alpha|e^{i\theta},\quad \alpha^*=|\alpha|e^{-i\theta} \tag{13.171}$$

由简谐振子的a和a^+的定义,广义坐标算符如(13.24)式所示

$$q=\sqrt{\frac{\hbar}{2}}(a^++a) \tag{13.172}$$

在海森堡表象中变为

$$q=\sqrt{\frac{\hbar}{2}}(a^+e^{-i\Omega t}+ae^{i\Omega t}) \tag{13.173}$$

$$\langle\alpha|q|\alpha\rangle=\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\{\langle\alpha|a^+|\alpha\rangle e^{i\Omega t}+\langle\alpha|a|\alpha\rangle e^{-i\Omega t}\}$$

$$=\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\{\alpha^*e^{i\Omega t}+\alpha e^{-i\Omega t}\} \tag{13.174}$$

利用(13.171)

$$\langle\alpha|q|\alpha\rangle=\sqrt{\frac{\hbar}{2}}|\alpha|\{\exp[-\mathrm{i}(\Omega t+\theta)]+\exp[\mathrm{i}(\Omega t+\theta)]\}$$

$$=\sqrt{2\hbar}|\alpha|^2\cos(\Omega t-\theta) \tag{13.175}$$

因此，q 在相干态中的期待值，就相当于振幅为 $\sqrt{2\hbar}|\alpha|$、而位相为 θ 的简谐振子.

或者因为行波场

$$\hat{E}=\mathrm{i}\sqrt{\frac{\hbar\Omega}{2\varepsilon_0 V}}\{a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t+\mathrm{i}kz}-a^+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t-\mathrm{i}kz}\}$$

$$\langle\alpha|\hat{E}|\alpha\rangle=\mathrm{i}\sqrt{\frac{\hbar\Omega}{2\varepsilon_0 V}}\{\alpha\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t+\mathrm{i}kz}-\alpha^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t-\mathrm{i}kz}\}$$

$$=\sqrt{\frac{2\hbar\Omega}{\varepsilon_0 V}}|\alpha|\sin(\Omega t-\theta-kz) \tag{13.176}$$

即 $\hat{E}$ 在相干态中的期待值就是振幅为 $\sqrt{2}|\alpha|\mathscr{E}$，位相为 θ 的电磁场，但是量子化的光场有位相起伏.

由 $\cos\hat{\Phi}$ 和 $|\alpha\rangle$ 的表达式(13.86)和(13.159)可求出 $\cos\hat{\Phi}$ 在相干态中的期待值

$$\langle\alpha|\cos\hat{\Phi}|\alpha\rangle=\frac{1}{2}\exp(-|\alpha|^2)\sum_n\frac{(\alpha^*)^{n+1}\alpha^n+(\alpha^*)^n\alpha^{n+1}}{\{(n+1)!n!\}^{1/2}}$$

$$=|\alpha|\cos\theta\exp(-|\alpha|^2)\sum_n\frac{|\alpha|^{2n}}{n!(n+1)^{1/2}} \tag{13.177}$$

其中用到了(13.84)和(13.85)式，θ 来自 $\alpha=|\alpha|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. 同样可证

$$\langle\alpha|\cos^2\hat{\Phi}|\alpha\rangle=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\exp(-|\alpha|^2)+|\alpha|^2\left(\cos^2\theta-\frac{1}{2}\right)\times$$

$$\exp(-|\alpha|^2)\sum_n\frac{|\alpha|^{2n}}{n!\{(n+1)(n+2)\}^{1/2}} \tag{13.178}$$

$$\langle\alpha|\sin\hat{\Phi}|\alpha\rangle=|\alpha|\sin\theta\exp(-|\alpha|^2)\sum_n\frac{|\alpha|^{2n}}{n!(n+1)^{1/2}} \tag{13.179}$$

$$\langle\alpha|\sin^2\hat{\Phi}|\alpha\rangle=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\exp(-|\alpha|^2)+|\alpha|^2\left(\sin^2\theta-\frac{1}{2}\right)\times$$

$$\exp(-|\alpha|^2)\sum_n\frac{|\alpha|^{2n}}{n!\{(n+1)(n+2)\}^{1/2}} \tag{13.180}$$

由(13.179)和(13.180)式相加，则可以证明

$$\sum_n\frac{|\alpha|^{2n}}{n!(n+1)^{1/2}}=\frac{\exp(|\alpha|^2)}{|\alpha|}\left(1-\frac{1}{8|\alpha|^2}+\cdots\right),\quad |\alpha|^2\gg1$$

(13.181)

$$\sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!\{(n+1)(n+2)\}^{1/2}}=\frac{\exp(|\alpha|^2)}{|\alpha|^2}\left(1-\frac{1}{2|\alpha|^2}-\cdots\right),\ |\alpha|^2\gg 1 \tag{13.182}$$

$$\langle\alpha|\cos\hat{\Phi}|\alpha\rangle=\cos\theta\left(1-\frac{1}{8|\alpha|^2}+\cdots\right) \tag{13.183}$$

$$\langle\alpha|\sin\hat{\Phi}|\alpha\rangle=\sin\theta\left(1-\frac{1}{8|\alpha|^2}+\cdots\right) \tag{13.184}$$

$$\langle\alpha|\cos^2\hat{\Phi}|\alpha\rangle=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\exp(-|\alpha|^2)\left(\cos^2\theta-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{2|\alpha|^2}-\cdots\right) \tag{13.185}$$

$$\langle\alpha|\sin^2\hat{\Phi}|\alpha\rangle=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\exp(-|\alpha|^2)\left(\sin^2\theta-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{2|\alpha|^2}-\cdots\right) \tag{13.186}$$

式(13.183)～(13.186)表明，$\Delta C\neq 0$，$\Delta S\neq 0$，即有位相起伏.

当 $n\to\infty$ 时，$\langle\alpha|\cos\hat{\Phi}|\alpha\rangle=\cos\theta$，$\langle\alpha|\cos^2\hat{\Phi}|\alpha\rangle=\cos^2\theta$

$$\Delta\cos\hat{\Phi}=0 \tag{13.187}$$

$$\Delta\sin\hat{\Phi}=0 \tag{13.188}$$

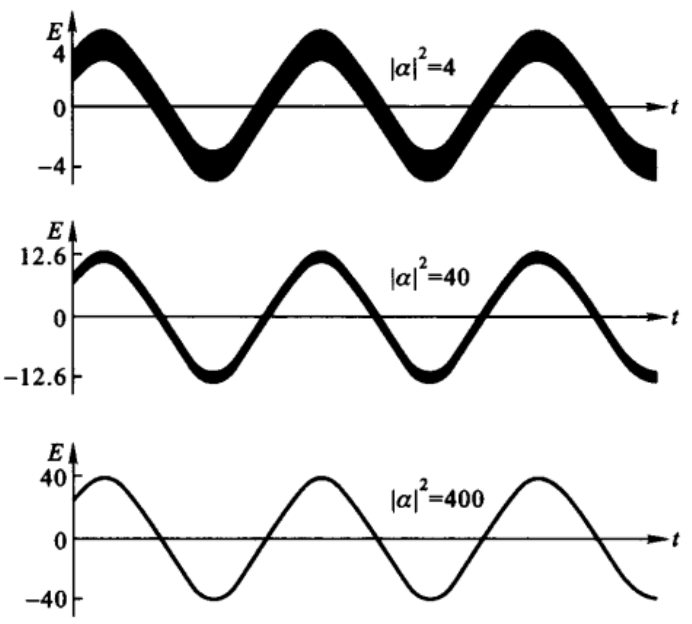


图 13.3 相干态 $|\alpha\rangle$ 的光场在一个固定点随时间 t 的变化；光子数较少时，$|\alpha|^2$ 较小，振幅和位相都有起伏；光子数很多时，$|\alpha|^2$ 很大，振幅和位相的起伏都变小

再考虑到量子化光场的相对强度起伏为

$$\Delta n/n=1/\langle n\rangle^{1/2}$$

因此，当光子数较少时，$|\alpha|^2$ 较小，量子化光场的振幅和位相都有起伏，而当 $|\alpha|^2$ 即光子数趋于无穷时，振幅和位相的起伏趋于零，即有固定的振幅和固定的位相，见图 13.3.

(5) 相干态与测不准关系

由光子的产生算符和消灭算符的定义可知，当把光子的产生看成简谐振子的激发时，简谐振子广义坐标和动量分别由(13.24)和(13.25)给出

$$q=\sqrt{\frac{\hbar}{2}}(a^+ +a) \tag{13.189}$$

$$p=\mathrm{i}\sqrt{\frac{\hbar}{2}}(a^+ -a) \tag{13.190}$$

由相干态按光子数态 $|n\rangle$ 的展开式可以证明

$$\left.\begin{aligned}
&\langle\alpha|q|\alpha\rangle=\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\langle\alpha|(a^+ +a)|\alpha\rangle=\sqrt{\frac{\hbar}{2}}(\alpha^* +\alpha)\\
&\langle\alpha|p|\alpha\rangle=\mathrm{i}\sqrt{\frac{\hbar}{2}}(\alpha^* -\alpha)\\
&\langle\alpha|q^2|\alpha\rangle=\sqrt{\frac{\hbar}{2}}[(\alpha^*)^2+\alpha^2+2\alpha^*\alpha+1]\\
&\langle\alpha|p^2|\alpha\rangle=-\frac{\hbar}{2}[(\alpha^*)^2+\alpha^2-2\alpha^*\alpha-1]
\end{aligned}\right\} \tag{13.191}$$

因此，由以上各式可得到

$$\left.\begin{aligned}
(\Delta q)^2=\langle q^2\rangle-\langle q\rangle^2=\frac{\hbar}{2}\\
(\Delta p)^2=\langle p^2\rangle-\langle p\rangle^2=\frac{\hbar}{2}
\end{aligned}\right\} \tag{13.192}$$

如果把 a 和 a^+ 写成实部和虚部，光场则有两个分量

$$\left.\begin{aligned}
&a=X_1+\mathrm{i}X_2,\quad a^+=X_1-\mathrm{i}X_2\\
&E(t)=A(a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t}+a^+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t})\\
&\quad=\frac{A}{2}(X_1\cos\Omega t+X_2\sin\Omega t)
\end{aligned}\right\} \tag{13.193}$$

因此 X_1 是光场的余弦分量，X_2 是正弦分量，X_1 和 X_2 分量的位相差是 90°. 与(13.189)，(13.190)式比较

$$X_1=\frac{1}{\sqrt{2\hbar}}q,\quad X_2=\frac{1}{\sqrt{2\hbar}}p \tag{13.194}$$

再由(13.192)式得

$$(\Delta X_1)^2=\frac{1}{4},\quad (\Delta X_2)^2=\frac{1}{4} \tag{13.195}$$

$$\Delta X_1=\frac{1}{2},\quad \Delta X_2=\frac{1}{2} \tag{13.196}$$

这里得到一个非常重要的结论:相干态的余弦分量和正弦分量测不准量相等.测不准关系为

$$\Delta q\Delta p=\hbar/2,\quad \Delta X_1\Delta X_2=\frac{1}{4} \tag{13.197}$$

由于测不准关系是 $\Delta q\Delta p\geqslant\hbar/2$,因此(13.197)表明,相干态是测不准量最小的量子态,而经典的物理量的测不准关系为零,因此相干态就是最接近于经典态的一种量子态.用噪声的概念来看,起伏越小则量子噪声越小,所以相干态又是量子噪声最小的量子态,但是光子的压缩态(squeezed state)比相干态的量子噪声更低,而且余弦分量和正弦分量的噪声相等.

综上所述,从物理特性来看,相干态有以下特性:

(1) 平均光子数 $\langle n\rangle=|\alpha|^2$;

(2) 光子数的均方差是 $\Delta n=\langle n\rangle^{1/2}=|\alpha|$;

(3) 相干态的光子分布是泊松分布;

(4) 相干态的相干度是 1;

(5) 当光子数 $n\to\infty$ 时,相干态的光场变成有固定的振幅和固定的位相的经典光场;

(6) 相干态是测不准量最小的量子态,或者最接近经典场的量子态,是噪声"最小"的量子态,这个最小的噪声就是量子起伏噪声.还要特别注意,相干态的光场的余弦分量和正弦分量的测不准量相等,均方差也相等.

13.5 态矢量和算符按相干态展开

相干态既有重要的物理意义,又是重要的理论工具.本节研究把相干态作为理论工具时所用到的正交性、超完备性、态矢量及算符按相干态的展开.

13.5.1 相干态的非正交性与超完备性

首先证明相干态满足如下的完备性公式

$$\frac{1}{\pi}\int|\alpha\rangle\langle\alpha|\,\mathrm{d}^2\alpha=1 \tag{13.198}$$

将复数 α 写成

$$\alpha=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=|\alpha|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \tag{13.199}$$

在极坐标中

$$d^2\alpha = r dr d\theta = |\alpha| d|\alpha| d\theta \tag{13.200}$$

利用$|\alpha\rangle$和$\langle\alpha|$按光子数态的展开式

$$|\alpha\rangle = \exp\left[-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right] \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} |m\rangle \tag{13.201}$$

$$\langle\alpha| = \exp\left[-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha^*)^n}{\sqrt{n!}} \langle n| \tag{13.202}$$

注意

$$(\alpha)^m = |\alpha|^m e^{im\theta} \tag{13.203}$$

$$(\alpha^*)^n = |\alpha|^n e^{-in\theta} \tag{13.204}$$

$$\int_0^{2\pi} \exp[i(m-n)\theta] d\theta = 2\pi\delta_{mn} \tag{13.205}$$

有

$$\begin{aligned}\int |\alpha\rangle\langle\alpha| d^2\alpha &= \int_0^{\infty} d|\alpha| \int_0^{2\pi} |\alpha| d\theta \sum_m \sum_n \exp(-|\alpha|^2) \frac{|\alpha|^m}{\sqrt{m!}} \exp(im\theta) \cdot \\ &\quad \frac{|\alpha|^n}{\sqrt{n!}} \exp(-in\phi) |m\rangle\langle n| \\ &= \pi \sum_n \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} (2d|\alpha|) |\alpha| |\alpha|^{2n} \exp(-|\alpha|^2) |n\rangle\langle m| \\ &= \pi \sum_n \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} x^n \exp(-x) |n\rangle\langle n| dx \\ &= \pi \sum_n |n\rangle\langle n| = \pi \end{aligned} \tag{13.206}$$

其中用到 $x=|\alpha|^2$，以及

$$\begin{aligned}\int x^n \exp(-x) dx &= -x^n \exp(-x)|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \exp(-x) dx^n \\ &= n \int_0^{\infty} \exp(-x) x^{n-1} dx = n! \end{aligned} \tag{13.207}$$

利用$|\alpha\rangle$按$|n\rangle$的展开式，还可以证明相干态是非正交的

$$\begin{aligned}\langle\beta|\alpha\rangle &= \sum_n \sum_m \frac{(\beta^*)^m}{\sqrt{m!}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \exp\left[-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)\right] \langle m|n\rangle \\ &= \exp\left[-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)\right] \sum_n \frac{(\beta^*\alpha)^n}{n!} \\ &= \exp\left[-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)\right] \exp(\beta^*\alpha) \end{aligned} \tag{13.208}$$

$$|\langle\beta|\alpha\rangle|^2 = \exp[-|(\beta-\alpha)|^2] \tag{13.209}$$

当$|(\beta-\alpha)| \gg 1$时，$|\langle\beta|\alpha\rangle|^2 \to 0$，$|\alpha\rangle$和$|\beta\rangle$几乎是正交的.

由于相干态是非正交的，因此一个相干态可按其他相干态展开，即

$$|\alpha\rangle=\frac{1}{\pi}\int|\beta\rangle\langle\beta|\alpha\rangle\mathrm{d}^2\beta$$

$$=\frac{1}{\pi}\int|\beta\rangle\exp\left[-\frac{1}{2}|\alpha|^2-\frac{1}{2}|\beta|^2+\beta^*\alpha\right]\mathrm{d}^2\beta \quad (13.210)$$

13.5.2 态矢量和算符按相干态展开

利用相干态的完备性公式(13.189)，可以将态矢量和算符按相干态展开. 对于态矢量$|f\rangle$

$$|f\rangle=\frac{1}{\pi}\int|\alpha\rangle\langle\alpha|f\rangle\mathrm{d}^2\alpha \quad (13.211)$$

另一方面，$|\alpha\rangle$和$|f\rangle$都可按光子数态的展开

$$|f\rangle=\sum_m|m\rangle\langle m|f\rangle\equiv\sum_m|m\rangle f_m \quad (13.212)$$

其中

$$f_m\equiv\langle m|f\rangle$$

$$\langle\alpha|=\exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right)\sum_n\frac{(\alpha^*)^n}{\sqrt{n!}}\langle n| \quad (13.213)$$

f_m是$|f\rangle$按$|m\rangle$展开的系数

$$|f\rangle=\frac{1}{\pi}\int|\alpha\rangle\sum_m\sum_n\exp\left[-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right]\frac{(\alpha^*)^n}{\sqrt{n!}}\langle n|m\rangle f_m\mathrm{d}^2\alpha$$

$$=\frac{1}{\pi}\int|\alpha\rangle\sum_n\exp\left[-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right]f_n\frac{(\alpha^*)^n}{\sqrt{n!}}\mathrm{d}^2\alpha$$

$$=\frac{1}{\pi}\int|\alpha\rangle\exp\left[-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right]f(\alpha^*)\mathrm{d}^2\alpha \quad (13.214)$$

$$f(\alpha^*)=\sum_{n=0}^{\infty}\langle n|f\rangle\frac{(\alpha^*)^n}{\sqrt{n!}} \quad (13.215)$$

算符F也可按相干态展开. 在光子数表象中，将F写成矩阵形式，可利用$|n\rangle$的完备性得到

$$F=\sum_m\sum_n|m\rangle\langle m|F|n\rangle\langle n| \quad (13.216)$$

将F按相干态展开时，利用$|\alpha\rangle$的完备性，则

$$F=\frac{1}{\pi^2}\int\mathrm{d}^2\alpha'\int|\alpha'\rangle\langle\alpha'|F|\alpha\rangle\langle\alpha|\mathrm{d}^2\alpha \quad (13.217)$$

其中

$$\langle\alpha'|F|\alpha\rangle=\sum_m\sum_n\langle\alpha'|m\rangle F_{mn}\langle n|\alpha\rangle$$

$$=\sum_m\sum_n F_{mn}\frac{(\alpha'^*)^m\alpha^n}{\sqrt{m!n!}}\exp\left[-\frac{1}{2}|\alpha'|^2-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right]$$

(13.218)

将(13.218)式代入(13.217)式,则

$$F=\frac{1}{\pi^2}\int \mathrm{d}^2\alpha' \int \exp\left[-\frac{1}{2}|\alpha'|^2-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right]F(\alpha'^*,\alpha)|\alpha'\rangle\langle\alpha|\,\mathrm{d}^2\alpha$$

$$F(\alpha'^*,\alpha)\equiv\sum_m\sum_n F_{mn}\frac{(\alpha'^*)^m\alpha^n}{\sqrt{m!n!}} \tag{13.219}$$

13.5.3 场的密度算符

辐射场通常用密度算符描述,用密度算符比用态矢量更方便.对于纯态,$|\psi\rangle$是已知的,有

$$\rho=|\psi\rangle\langle\psi| \tag{13.220}$$

对于混态,只知道辐射场处于态$|\psi\rangle$的几率 P_ψ

$$\rho=\sum_\psi \rho_\psi|\psi\rangle\langle\psi| \tag{13.221}$$

(1) 纯态的辐射场的密度算符

正如已经指出的,纯态的$|\psi\rangle$是已知的.光子数态$|n\rangle$和位相态$|\phi\rangle$都是纯态.

光子数态的密度算符是

$$\rho=|n\rangle\langle n| \tag{13.222}$$

唯一的非零的矩阵元是

$$\langle n|\rho|n\rangle=1 \tag{13.223}$$

力学量 O 的平均值是

$$\begin{aligned}\langle O\rangle&=\mathrm{tr}(\rho O)=\mathrm{tr}(|n\rangle\langle n|O)\\&=\langle n|O|n\rangle\end{aligned} \tag{13.224}$$

位相态$|\phi\rangle$有确定的位相,也是纯态,位相态的密度算符是

$$\rho=|\phi\rangle\langle\phi| \tag{13.225}$$

由相干态的归一化条件(13.157),$\langle\alpha|\alpha\rangle=1$,则有

$$\langle\alpha|\rho|\alpha\rangle=\langle\alpha|\alpha\rangle\langle\alpha|\alpha\rangle=1 \tag{13.226}$$

由于相干态是非正交的,(13.226)并不是唯一的非零的矩阵元,实际上任一矩阵元都是非零的,如

$$\langle\alpha|\rho|\beta\rangle=\langle\alpha|\alpha\rangle\langle\alpha|\beta\rangle=\langle\alpha|\beta\rangle\neq0 \tag{13.227}$$

由于相干态的非正交性,给相干态的密度算符理论带来了复杂性.但是这里我们完全可以设法避开这种复杂性.其方法是利用光子数表象,将$|\alpha\rangle$及 ρ 都写到光子数表象.例如,计算下面的矩阵元

$$\langle n|\rho|m\rangle=\exp[-|\alpha|^2]\frac{\alpha^n(\alpha^*)^m}{\sqrt{m!n!}} \tag{13.228}$$

多模相干态也是纯态.多模场相干态和密度算符分别是

$$|\{\alpha_k\}\rangle = |\alpha_{k_1}\rangle|\alpha_{k_2}\rangle|\alpha_{k_3}\rangle\cdots \tag{13.229}$$

$$\rho = |\{\alpha_k\}\rangle\langle\{\alpha_k\}| \tag{13.230}$$

(2) 混合态的辐射场的密度算符

混合态的辐射场的最著名的例子是热辐射. 下面分别考虑单模的热辐射及多模的热辐射.

单模热辐射的密度算符是

$$\rho = \sum_n P_n |n\rangle\langle n| \tag{13.231}$$

其中 P_n 是出现 n 个光子的几率. 由黑体辐射理论,得到

$$P_n = \{1-\exp(-\hbar\Omega/kT)\}\exp(-n\hbar\Omega/kT) \tag{13.232}$$

$$\rho = \{1-\exp(-\hbar\Omega/kT)\}\sum_m \exp(-n\hbar\Omega/kT)|n\rangle\langle n| \tag{13.233}$$

利用(13.233)及期待值的定义,可求平均光子数 $\bar{n}$

$$\langle n\rangle = \mathrm{tr}(\rho a^+ a) = \bar{n} \tag{13.234}$$

应用(13.233)和(13.234)式,可把密度算符写成

$$\rho = \sum_n \frac{\bar{n}^n}{(1+\bar{n})^{1+n}}|n\rangle\langle n| \tag{13.235}$$

其演算过程与黑体辐射理论一样.

(13.233)式的密度算符,将指数展开,则有

$$\rho = \{1-\exp(-\hbar\Omega/kT)\}\exp(-\hbar\Omega a^+ a/kT) \tag{13.236}$$

下面再考虑多模的热辐射. 由于对每个模,由(13.235)式可知

$$P_n = \frac{\bar{n}^n}{(1+\bar{n})^{1+n}} \tag{13.237}$$

因此多个模的情况有

$$P_{(n_k)} = \prod_k \frac{\bar{n}_k^{n_k}}{(1+\bar{n}_k)^{1+n_k}} \tag{13.238}$$

因此,多模的热辐射的密度算符是

$$\begin{aligned}\rho &= \sum_{n_k} P_{(n_k)}|\{n_k\}\rangle\langle\{n_k\}| \\ &= \sum_{n_k}|\{n_k\}\rangle\langle\{n_k\}|\prod_k \frac{\bar{n}_k^{n_k}}{(1+\bar{n}_k)^{1+n_k}}\end{aligned} \tag{13.239}$$

由(13.239)式可以证明

$$\bar{n} = \sum_k \bar{n}_k \tag{13.240}$$

$$\bar{n}_k = \{\exp(\hbar\Omega_k/kT)-1\}^{-1} \tag{13.241}$$

13.5.4 场的密度算符的相干态表示

先把密度算符写到光子数表象,再利用相干态与光子数态的关系,便

可求出场的密度算符 ρ 的相干态表示. 在光子数表象中

$$\rho = \sum_n \sum_m |n\rangle\langle n|\rho|m\rangle\langle m|$$

$$= \sum_n \sum_m \rho_{nm} |n\rangle\langle m| \tag{13.242}$$

利用相干态的完备性,也可将 ρ 按 $|\alpha\rangle$ 展开,

$$\rho=\pi^{-2}\int d^2\alpha \int |\alpha\rangle\langle\alpha|\rho|\beta\rangle\langle\beta| d^2\beta \tag{13.243}$$

$$\langle\alpha|\rho|\beta\rangle = \sum_n \sum_m \langle\alpha|n\rangle\langle n|\rho|m\rangle\langle m|\beta\rangle$$

$$= \sum_n \sum_m \rho_{nm} \frac{(\alpha^*)^n\beta^m}{\sqrt{n!m!}} \exp\left[-\frac{1}{2}|\alpha|^2-\frac{1}{2}|\beta|^2\right]$$

$$\equiv R(\alpha^*,\beta)\exp\left[-\frac{1}{2}|\alpha|^2-\frac{1}{2}|\beta|^2\right] \tag{13.244}$$

$$R(\alpha^*,\beta) = \sum_n \sum_m \frac{(\alpha^*)^n\beta^m}{\sqrt{n!m!}}\rho_{nm} \tag{13.245}$$

$$\rho=\pi^{-2}\int d^2\alpha \int R(\alpha^*,\beta)\exp\left[-\frac{1}{2}|\alpha|^2-\frac{1}{2}|\beta|^2\right]|\alpha\rangle\langle\beta| d^2\beta \tag{13.246}$$

只要知道了 ρ_{nm},便可由方程(13.245)立刻求出 $R(\alpha^*,\beta)$,再代入(13.246)式,就得到了场的密度算符的相干态表示,例如,对于单模的热辐射场,有

$$\rho = \sum_n P_n |n\rangle\langle n|$$

$$= \frac{\exp(-\hbar\Omega a^+ a/kT)}{\mathrm{tr}\{\exp(-\hbar\Omega a^+ a/kT)\}} \tag{13.247}$$

$$\rho_{nm} = \exp(-n\hbar\Omega/kT)\left[\sum_n \exp(-n\hbar\Omega/kT)\right]^{-1}\delta_{nm}$$

$$= \exp[-n\hbar\Omega/kT][1-\exp(-\hbar\Omega/kT)]\delta_{nm} \tag{13.248}$$

再利用 $R(\alpha^*,\beta)$ 的表达式(13.245),则

$$R(\alpha^*,\beta) = [1-\exp(-\hbar\Omega/kT)] \sum_n (\alpha^*\beta)^n \exp(-n\hbar\Omega/kT)\frac{1}{n!}$$

$$= [1-\exp(-\hbar\Omega/kT)]\exp[\alpha^*\beta\exp(-n\hbar\Omega/kT)] \tag{13.249}$$

在实际应用中,常用如下的对角展开

$$\rho= \int P(\alpha)|\alpha\rangle\langle\alpha| d^2\alpha \tag{13.250}$$

这种展开式,叫做 P 表示. 由于 ρ 是厄米算符,$P(\alpha)$ 必然是实数. 下面通过计算力学量的平均值可以看到,$P(\alpha)$ 起着统计权重函数的作用.

力学量 O 的期待值$\langle O\rangle=\mathrm{tr}(\rho O)$，可以通过(13.231)式用 $P(\alpha)$来表示期待值.

$$\begin{aligned}\langle O\rangle=\mathrm{tr}(\rho O)&=\sum_n\langle n|\int P(\alpha)\mathrm{d}^2\alpha|\alpha\rangle\langle\alpha|O|n\rangle\\&=\int P(\alpha)\sum_n\langle\alpha|O|n\rangle\langle n|\alpha\rangle\mathrm{d}^2\alpha\\&=\int P(\alpha)\langle\alpha|O|\alpha\rangle\mathrm{d}^2\alpha\end{aligned}\tag{13.251}$$

为便于计算(13.251)中的$\langle\alpha|O|\alpha\rangle$，把算符写成正常顺序的算符，即产生算符在左，消灭算符在右，将 O 按$(a^+)^m(a)^n$ 展开，即

$$O(a^+,a)=\sum_m\sum_n C_{mn}(a^+)^m(a)^n\tag{13.252}$$

因此，很容易计算 $O(a^+,a)$在相干态中的期待值

$$\begin{aligned}\langle\alpha|O|\alpha\rangle&=\langle\alpha|\sum_m\sum_n C_{mn}(a^+)^m(a)^n|\alpha\rangle\\&=\sum_m\sum_n(\alpha^*)^m(\alpha)^n\\&=O(\alpha^*,\alpha)\end{aligned}\tag{13.253}$$

其中用到$|\alpha\rangle$的定义及(13.252)式. 将(13.253)代入(13.251)

$$\langle O\rangle=\int P(\alpha)O(\alpha^*,\alpha)\mathrm{d}^2\alpha\tag{13.254}$$

(13.254)式表明 $P(\alpha)$就是权重函数. 只要知道了权重函数 $P(\alpha)$. 则求任一力学量的期待值的量子力学计算，就只需简单地把该力学量中的算符变成 C 数 $a\to\alpha,a^+\to\alpha^*$，再按(13.254)式积分.

在激光的全量子理论中，先求 $P(\alpha)$的运动方程即福克-普朗克方程，再求解该方程即得到 $P(\alpha)$.

最后，应该特别注意：

(1) 虽然(13.250)与密度算符公式(13.221)在形式上相似，P_ψ 是系统处于$|\psi\rangle$的几率，但是(13.250)式中的 $P(\alpha)$却不能解释为系统处于$|\alpha\rangle$的几率. 其根本原因在于$|\psi\rangle$是正交的，而相干态不正交.

(2) 从求力学量平均值的公式看出，$P(\alpha)$是权重函数. 由(13.250)式可证

$$\mathrm{tr}\rho=\int P(\alpha)\mathrm{d}^2\alpha=1\tag{13.255}$$

即统计权重函数 $P(\alpha)$满足归一化条件. 但是，$P(\alpha)$有时也可以是负值. 因此 $P(\alpha)$绝不是真实的分布几率.

(3) 对于激光器以及激光与物质的作用的全量子理论，$P(\alpha)$由福克-普朗克方程计算，在激光的全量子理论中将广泛应用 P 表示.

13.6 量子化的相干函数

在第一章中曾介绍了光的经典的相干函数，并且指出与量子化的相干函数的联系. 本节研究量子化的相干函数和相干度. 这是区分不同的辐射源的重要标志. 美国科学家 Glauber 就是在量子相干函数方面的研究做出了重大贡献而荣获了 2005 年诺贝尔物理学奖.

13.6.1 一级相干函数

量子化的一级相干函数，在形式上与经典的一级相干函数完全一样，定义为

$$g^{(1)}(r_1,t_1,r_2,t_2)\equiv g_{12}^{(1)}=\frac{|\langle E^{(-)}(r_1,t_1)E^{(+)}(r_2,t_2)\rangle|}{(\langle E^{(-)}(r_1,t_1)E^{(+)}(r_1,t_1)\rangle\langle E^{(-)}(r_2,t_2)E^{(+)}(r_2,t_2)\rangle)^{1/2}} \tag{13.256}$$

与经典相干函数不同之处在于，其中的光场 $E^{(\pm)}$ 都是算符，而且其中的平均必须按量子力学计算，例如

$$\langle E^{(-)}(r_1,t_1)E^{(+)}(r_2,t_2)\rangle=\mathrm{tr}(\rho E^{(-)}(r_1,t_1)E^{(+)}(r_2,t_2)) \tag{13.257}$$

其中的(r_1,t_1)、(r_2,t_2)是时空点，ρ 是辐射场的密度算符. 下面考虑几种不同的辐射场的一级相干函数，$g_{12}^{(1)}=1$ 的辐射场称为一级相干的场.

(1) 光子数态的光子

对于光子数 n 完全确定的态，态矢量是$|n\rangle$，场的密度算符是

$$\rho=|n\rangle\langle n|$$

考虑到 $E^{(+)}$，$E^{(-)}$分别与算符 a 和 a^+ 差一个常数因子，有下式

$$\begin{aligned}\langle E^{(-)}(r_1,t_1)E^{(+)}(r_2,t_2)\rangle&=\mathrm{tr}(\rho a^+a)\\&=\sum_n\langle n|\rho\hat{n}|n\rangle=\sum_n\langle n|n\rangle\langle n|\hat{n}|n\rangle\\&=\langle n|\hat{n}|n\rangle=n\end{aligned} \tag{13.258}$$

$$[\langle E^{(-)}(r_1,t_1)E^{(+)}(r_1,t_1)\rangle\langle E^{(-)}(r_2,t_2)E^{(+)}(r_2,t_2)\rangle]^{1/2}=n$$

$$g_{12}^{(1)}=1 \tag{13.259}$$

(2) 相干态的光子

$$\rho=|\alpha\rangle\langle\alpha|$$

$$\begin{aligned}\langle E^{(-)}E^{(+)}\rangle&=\mathrm{tr}(\rho a^+a)\\&=\sum_\alpha\langle\alpha|\rho a^+a|\alpha\rangle=\sum_\alpha\langle\alpha|\alpha\rangle\langle\alpha|a^+a|\alpha\rangle\end{aligned}$$

$$=|\alpha|^2 \tag{13.260}$$

同样可计算分母，得到 $g_{12}^{(1)}=1$. 其中用到 $|\alpha\rangle$ 的归一性.

(3) 热辐射

$$\rho=\sum_{(n_k)}|\{n_k\}\rangle\langle\{n_k\}|\prod_k\frac{(\bar{n}_k)^{n_k}}{(1+\bar{n}_k)^{1+n_k}}$$

由(13.356)式，可以证明

$$g_{12}^{(1)}=\frac{\left|\sum_k\bar{n}_k\omega_k\exp(\mathrm{i}\omega_k\tau)\right|}{\sum_k\bar{n}_k\omega_k} \tag{13.261}$$

$$\tau=t_1-t_2-(1/\omega_k)\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2) \tag{13.262}$$

如果光束是洛伦兹型，并且所有光子的波矢量是平行的，则

$$\bar{n}_k\omega_k\propto\frac{\gamma_\perp}{(\omega_0-\omega_k)^2+\gamma_\perp^2} \tag{13.263}$$

$$g_{12}^{(1)}=\exp(-\gamma_\perp|\tau|) \tag{13.264}$$

这与经典电磁场的结果一样.

13.6.2 二级相干函数

量子化的二级相干函数的定义是

$$g^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,t_1,\boldsymbol{r}_2,t_2;\boldsymbol{r}_2,t_2,\boldsymbol{r}_1,t_1)\equiv g_{12}^{(2)}$$
$$=\frac{\langle E^{(-)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)E^{(-)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)E^{(+)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)E^{(+)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\rangle}{\langle E^{(-)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)E^{(+)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\rangle\langle E^{(-)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)E^{(+)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)\rangle} \tag{13.265}$$

同样，其中的 $E^{(+)}$，$E^{(-)}$ 都是算符，平均值由场的密度算符计算. 在激光物理和量子光学中，二级相干函数是特别重要的.

(1) 光子数态的光子

$g_{12}^{(1)}$ 的分子和分母分别是(略去常数因子)

$$\begin{aligned}\langle E^{(-)}E^{(-)}E^{(+)}E^{(+)}\rangle&=\mathrm{tr}(\rho E^{(-)}E^{(-)}E^{(+)}E^{(+)})\\&=\mathrm{tr}(\rho a^+a^+aa)\\&=\sum_m\langle m|\rho a^+a^+aa|m\rangle\\&=\sum_m\langle m|n\rangle\langle n|a^+a^+aa|m\rangle\\&=\langle n|a^+a^+aa|n\rangle=n\langle n-1|a^+a|n-1\rangle=n(n-1)\end{aligned} \tag{13.266}$$

$$\begin{aligned}\langle E^{(-)}E^{(+)}\rangle\langle E^{(-)}E^{(+)}\rangle&=\mathrm{tr}(\rho a^+a)\mathrm{tr}(\rho a^+a)\\&=n^2\end{aligned} \tag{13.267}$$

$$\left.\begin{aligned} g_{12}^{(1)} &= \frac{n(n-1)}{n^2} = \frac{n-1}{n}, & n \neq 0 \\ g_{12}^{(1)} &= 0, & n = 0 \end{aligned}\right\} \tag{13.268}$$

因此，光子数态的光子，二级相干度总是小于 1. 若用$(g_{12}^{(1)}-1)$代表关联，必然得到负关联，见第 19 章图 19.1.

(2) 位相态的光子

$$g_{12}^{(2)} = 4/3 \tag{13.269}$$

(3) 相干态

由相干态的定义 $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$，可以证明，对单模相干态，

$$g_{12}^{(2)} = 1 \tag{13.270}$$

对于多模相干态，由其密度算符 $\rho = |\{\alpha_k\}\rangle\langle\{\alpha_k\}|$，也可以证明 $g_{12}^{(2)} = 1$. $g_{12}^{(2)}$ 的分子是

$$\begin{aligned} \langle E^{(-)}E^{(-)}E^{(+)}E^{(+)}\rangle &= \sum_{k'} \langle\alpha_{k'}|\{\alpha_k\}\rangle\langle\{\alpha_k\}|a_k^+ a_k^+ a_k a_k|\alpha_{k'}\rangle \\ &= \sum_{k'} \langle\alpha_{k'}|\{\alpha_k\}\rangle\langle\{\alpha_k\}|\alpha_{k'}\rangle \alpha_k^* \alpha_k^* \alpha_k \alpha_k \\ &= \alpha_k^* \alpha_k^* \alpha_k \alpha_k \end{aligned} \tag{13.271}$$

其中 $a_k^+ a_k^+ a_k a_k$ 都向左作用，即$\langle\{\alpha_k\}|a_k^+ a_k^+ a_k a_k = \alpha_k^* \alpha_k^* \alpha_k \alpha_k$. 最后用到了 $\mathrm{tr}\rho = \sum_{k'} \langle\alpha_{k'}|\{\alpha_k\}\rangle\langle\{\alpha_k\}|\alpha_{k'}\rangle = 1$. 同样也可以求出分母也是 $\alpha_k^* \alpha_k^* \alpha_k \alpha_k$，故有

$$g_{12}^{(2)} = 1$$

(4) 多模的热辐射

利用多模的热辐射的密度算符还可以计算它的二级相干度

$$\begin{aligned} g_{12}^{(2)} &= \frac{|\bar{n}_k \omega_k \exp(\mathrm{i}\omega_k \tau)|^2}{\left(\sum_k \bar{n}_k \omega_k\right)^2} + 1 \\ &= [g_{12}^1]^2 + 1 \end{aligned} \tag{13.272}$$

13.6.3 n 级相干函数

n 级相干函数的定义为

$$\begin{aligned} & g^{(n)}(\boldsymbol{r}_1, t_1, \cdots, \boldsymbol{r}_n, t_n, \cdots, \boldsymbol{r}_{2n}, t_{2n}) \\ &= \frac{|\langle E^{(-)}(\boldsymbol{r}_1, t_1)\cdots E^{(-)}(\boldsymbol{r}_n, t_n) E^{(+)}(\boldsymbol{r}_{n+1}, t_{n+1})\cdots E^{(+)}(\boldsymbol{r}_{2n}, t_{2n})\rangle|}{\{\langle E^{(-)}(\boldsymbol{r}_1, t_1) E^{(+)}(\boldsymbol{r}_1, t_1)\rangle\cdots\langle E^{(-)}(\boldsymbol{r}_{2n}, t_{2n}) E^{(+)}(\boldsymbol{r}_{2n}, t_{2n})\rangle\}^{1/2}} \end{aligned} \tag{13.273}$$

对单模相干态，容易证明 $g^{(n)} = 1$. 对多模相干态，由于$|\{\alpha_k\}\rangle$是光场正频分量 $E^{(+)}(\boldsymbol{r}, t)$的本征态，即 α_k 的本征态

$$E^{(+)}(\boldsymbol{r},t)|\{\alpha_k\}\rangle=\mathrm{i}\sum_k\left\{\sqrt{\frac{\hbar\Omega_k}{2\varepsilon_0 V}}a_k\exp(-\mathrm{i}\Omega_k t+\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\right\}\cdot|\{\alpha_k\}\rangle \tag{13.274}$$

可以证明 $g^{(n)}$ 的分子和分母都分解为一些因子相乘，且分子与分母相等. 因此对多模相干态，

$$g^{(n)}(\boldsymbol{r}_1,t_1,\cdots,\boldsymbol{r}_n,t_n;\boldsymbol{r}_{n+1},t_{n+1},\cdots,\boldsymbol{r}_{2n},t_{2n})=1 \tag{13.275}$$

即相干态各级相干度都等于 1. 这就是把它称为相干态的原因.

对于多模的热辐射，如果 $g^{(n)}$ 中的全部时空点都相同，则可以证明

$$g^{(n)}=n! \tag{13.276}$$

习题与思考

(1) 对于态 $|\psi\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}[|n\rangle+\exp(-\mathrm{i}\Omega t)|n+1\rangle]$，证明光场的均方差为 $\Delta E=\mathscr{E}\sqrt{n+1}(\sin kz)[1+\sin^2\Omega t]^{1/2}$（提示：光场为 $E_x(z,t)=\mathscr{E}(a+a^+)\sin kz$；$\Delta E=[\langle E^2\rangle-\langle E\rangle^2]^{1/2}$.）

(2) 对于未微扰的哈密顿算符 $H_0=\sum_n\hbar\omega_n|n\rangle\langle n|$，有下列关系式 $\exp(\mathrm{i}H_0t/\hbar)=\sum_n\exp(\mathrm{i}\omega_n t)|n\rangle\langle n|$.

(3) 对于一个热场，计算位移算符 $D(\alpha)$ 的期待值. 提示如下：$D(\alpha)=\exp(aa^+-a^+a)$. 首先证明 $\langle D(\alpha)\rangle=\mathrm{tr}(\rho D(\alpha))=\frac{1}{\pi\langle n\rangle}\cdot\int\exp(-|\beta|^2/\langle n\rangle)\langle\beta|D(\alpha)|\beta\rangle\mathrm{d}^2\beta$ 然后利用

$$\begin{aligned}|\psi(t)\rangle&=\prod_k\exp(\alpha_k a_k^+-\alpha_k^* a_k)|0\rangle\\&=\prod_k\exp(\alpha_k a_k^+)\exp(-\alpha_k^* a_k)\exp\left(-\frac{1}{2}\alpha_k\alpha_k^*\right)|0\rangle_k\\&=\prod_k\exp\left(-\frac{1}{2}\alpha_k\alpha_k^*\right)\exp(\alpha_k a_k^+)|0\rangle_k=\sum_k|\alpha_k\rangle_k\end{aligned}$$

计算 $\langle\beta|D(\alpha)|\beta\rangle$. 答案：$\langle D(\alpha)\rangle=\exp\left[-|\alpha|^2\left(\langle n\rangle+\frac{1}{2}\right)\right]$

(4) 求出相干态 $|\alpha\rangle=\sum_n C_n|n\rangle$ 中的展开系数. 先将本征值方程 $a|\alpha\rangle=\alpha|\alpha\rangle$ 投影到如 $\langle n|$ 上.

(5) 证明，由

$$P(\alpha)=\left[\frac{n!}{2\pi r(2n)!}\right]\exp(r^2)\left(-\frac{\partial}{\partial r}\right)^{2n}\delta(r)$$

式中 $\alpha=r\exp(\mathrm{i}\theta)$，可以得光子数态 $\rho=|n\rangle\langle n|$.

参 考 文 献

[1] Wigner E P. On the quantum correction for thermodynamic equilibrium. Phys. Rev. ,1932,40,749 - 759.

[2] Glauber R J. The quantum theory of optical coherence. Phys. Rev. Letter. ,1963, 10:84 - 88.

[3] Sudarshan E C G. Equivalence of semiclassical and quantum mechanical descriptions of statistical light beams. Phys. Rev. Letter,1963,10,277 - 279.

[4] Gordon J P. Quantum theory of a simple maser oscillator. Phys. Rev. ,1967,161: 367 - 370.

[5] Haken H, Risken H, Weidlich W Z. Quantum mechanical solutions of the laser master equation. Phys. ,1967,208,355 - 360.

[6] Loudon R. The quantum theory of ligt. New York:Oxford University Press,1974.

第 14 章　光与物质作用的全量子理论

研究了电磁场的量子化之后，电磁场和原子都能用量子理论描述，便可建立光与物质作用的全量子理论. 本章首先研究相互作用哈密顿量的全量子形式，用二次量子化的观点研究相互作用哈密顿量，然后，用全量子的哈密顿量导出布洛赫方程，最后给出自发辐射、受激辐射和吸收的全量子理论并讨论自发辐射的性质.

14.1　泡利算符与相互作用哈密顿量

在研究光与原子相互作用时，原子与光场及其耦合如图 14.1 所示. 总哈密顿量包括三部分：自由原子的哈密顿量 H_A，自由场的哈密顿量 H_F，场与原子相互作用的哈密顿量 H_{F-A}.

$$H=H_A+H_F+H_{F-A} \tag{14.1}$$

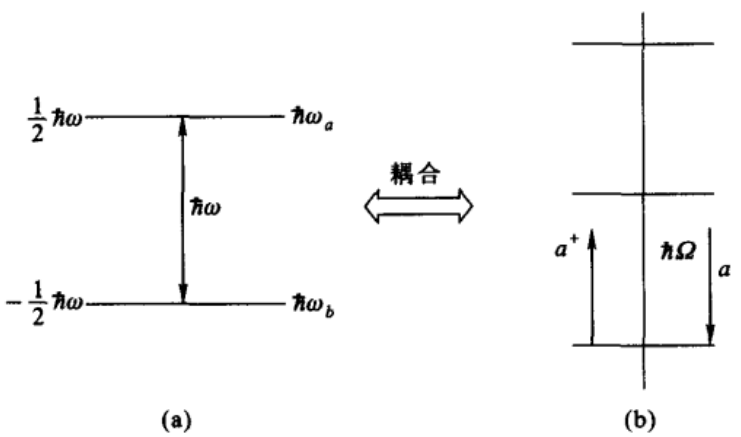


图 14.1　场与原子的耦合示意图

(a)二能级原子　(b)量子化的光场，a^+ 是产生算符，a 是消灭算符

未受微扰的哈密顿量是

$$\left.\begin{aligned} H_A&=\hbar\begin{pmatrix}\omega_a & 0\\ 0 & \omega_b\end{pmatrix}\\ H_F&=\hbar\Omega\left(a^+a+\frac{1}{2}\right)\end{aligned}\right\} \tag{14.2}$$

为了得到相互作用哈密顿量，只需把半经典理论的相互作用哈密顿量中的电磁场量子化(如图 14.1). 回顾半经典的相互作用哈密顿量是

$$\begin{aligned} V_{sc} &= -E\mu \\ &= -\mu E_x(z,t)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{14.3}$$

其中场是经典的 $E_x(z,t)$，原子是量子的. 用量子化的场 $E_x(z,t)$ 代替其中的经典理论，则得到全量子化的相互作用哈密顿量.

$$\begin{aligned} H_{F-A} &= -\mu\mathscr{E}\sin(kz)(a^+ + a)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \hbar g(a^+ + a)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{14.4}$$

$$g = -\frac{\mu}{\hbar}\mathscr{E}\sin(kz) \tag{14.5}$$

$$H = \hbar\Omega(a^+ a + 1) + \hbar\begin{pmatrix} \omega_a & 0 \\ 0 & \omega_b \end{pmatrix} + \hbar g(a^+ + a)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{14.6}$$

可将其中的矩阵写成泡利算符的形式. 注意

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_y &= \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{14.7}$$

$$\sigma^+ = \frac{1}{2}(\sigma_x + \mathrm{i}\sigma_y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{14.8}$$

$$\sigma^- = \frac{1}{2}(\sigma_x - \mathrm{i}\sigma_y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{14.9}$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma^+\sigma^- &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma^-\sigma^+ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{14.10}$$

$$\sigma_z = \sigma^+\sigma^- - \sigma^-\sigma^+ \tag{14.11}$$

(14.6)式可写成

$$\begin{aligned} H = \hbar\begin{pmatrix} \omega_a & 0 \\ 0 & \omega_b \end{pmatrix} + \hbar\Omega\left(a^+ a + \frac{1}{2}\right) \\ + \hbar g(a + a^+)(\sigma^- + \sigma^+) \end{aligned} \tag{14.12}$$

$$H=\hbar\Omega\left(a^{+}a+\frac{1}{2}\right)+\hbar\omega_{a}\sigma^{+}\sigma^{-}+\hbar\omega_{b}\sigma^{-}\sigma^{+}$$
$$+\hbar g(a+a^{+})(\sigma^{-}+\sigma^{+}) \tag{14.13}$$

若把二能级原子的能量选在二能级的中间，则上能级为$\frac{1}{2}\hbar\omega$，下能级为$-\frac{1}{2}\hbar\omega$.

$$H_{\mathrm{A}}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\hbar\omega & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\hbar\omega\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\hbar\omega\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\hbar\omega\sigma_{z} \tag{14.14}$$

$$H=\hbar\Omega\left(a^{+}a+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\hbar\omega\sigma_{z}+\hbar g(a+a^{+})(\sigma+\sigma^{+}) \tag{14.15}$$

(14.13)和(14.15)式在激光理论中是通用的.

14.1.1 泡利算符的物理意义和性质

仍用$|a\rangle$，$|b\rangle$分别表示二能级原子的两个本征态. σ^{+}，σ^{-}和σ_{z}也可采用如下的定义

$$|a\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad |b\rangle=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \tag{14.16}$$

$$\sigma^{+}=|a\rangle\langle b| \tag{14.17}$$

$$\sigma^{-}=|b\rangle\langle a| \tag{14.18}$$

$$\sigma_{z}=|a\rangle\langle a|-|b\rangle\langle b| \tag{14.19}$$

用(14.16)式可知，σ^{+}，σ^{-}和σ_{z}的这种定义与(14.7)，(14.8)及(14.9)式一样，也可用如下的方法验证

$$\sigma^{+}=\begin{bmatrix}\langle a|\sigma^{+}|a\rangle & \langle a|\sigma^{+}|b\rangle\\ \langle b|\sigma^{+}|a\rangle & \langle b|\sigma^{+}|b\rangle\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

由(14.16)、(14.17)以及(14.18)式，更容易看出σ^{+}，σ^{-}，σ_{z}的物理意义和对易关系(当然用矩阵形式也完全一样).

$$\sigma^{+}|b\rangle=|a\rangle\langle b|b\rangle=|a\rangle \tag{14.20}$$

$$\sigma^{+}|a\rangle=0 \tag{14.21}$$

$$\sigma^{-}|a\rangle=|b\rangle\langle a|a\rangle=|b\rangle \tag{14.22}$$

$$\sigma^{-}|b\rangle=0 \tag{14.23}$$

因此，σ^{+}作用于下能级本征态，则变为上能级本征态，即若一个原子原来在低能级，经过σ^{+}作用，则原子出现在上能级. 相当于下能级原子数减少一个，上能级原子数增加一个，因此，σ^{+}称为上升算符；同理，σ^{-}使上能级

粒子数减少一个，下能级粒子数增加一个，σ^- 称为下降算符.

此外，若用如下形式的波函数

$$\psi=c_a|a\rangle+c_b|b\rangle \tag{14.24}$$

$$\langle\sigma^+\rangle=\langle\psi|\sigma^+|\psi\rangle=(\langle a|c_a^*+\langle b|c_b^*)(|a\rangle\langle b|)(a|a\rangle+b|b\rangle)$$

$$=c_a^*c_b=\rho_{ba} \tag{14.25}$$

$$\langle\sigma^-\rangle=\langle\psi|\sigma^-|\psi\rangle=c_ac_b^*=\rho_{ab} \tag{14.26}$$

因此，σ^+ 的期待值是电极矩矩阵元 ρ_{ba}，σ^- 的期待值是 ρ_{ab}，所以 σ^+ 和 σ^- 又称为偶极矩算符. 同样

$$\langle\sigma_x\rangle=\langle(\sigma^++\sigma^-)\rangle=(\rho_{ab}+\rho_{ba})=u \tag{14.27}$$

$$\langle\sigma_y\rangle=(-\mathrm{i})\langle(\sigma^+-\sigma^-)\rangle=\mathrm{i}(\rho_{ab}-\rho_{ba})=v \tag{14.28}$$

$$\langle\sigma_z\rangle=\rho_{aa}-\rho_{bb}=w \tag{14.29}$$

这说明 σ_x 和 σ_y 分别是偶极矩算符的实部和虚部. 在哈肯激光理论中，将给出 $\dot{\sigma}^-$，$\dot{\sigma}_z$ 的方程.

利用 σ^+，σ^-，σ_x，σ_y 和 σ_z 的定义，容易证明它们的对易关系，例如：

$$[\sigma^+,\sigma^-]=\sigma^+\sigma^--\sigma^-\sigma^+=|a\rangle\langle b|b\rangle\langle a|$$

$$-|b\rangle\langle a|a\rangle\langle b|=|a\rangle\langle a|-|b\rangle\langle b|=\sigma_z \tag{14.30}$$

$$[\sigma^-,\sigma_z]=2\sigma^-,\quad [\sigma^+,\sigma_z]=-2\sigma^+ \tag{14.31}$$

$$[\sigma^\pm,\sigma_x]=\pm\sigma_z,\quad [\sigma^\pm,\sigma_y]=\mathrm{i}\sigma_z \tag{14.32}$$

$$\{\sigma^\pm,\sigma_x\}_+=I,\quad \{\sigma^\pm,\sigma_y\}_+=\pm\mathrm{i} \tag{14.33}$$

$$\{\sigma^\pm,\sigma_z\}_+=0,\quad \{\sigma^-,\sigma^-\}_+=I \tag{14.34}$$

$$(\sigma^+)^2=0,\quad (\sigma^-)^2=0 \tag{14.35}$$

其中$\{\}_+$表示$\{A,B\}_+=AB+BA$. 在处理光与物质的作用、哈肯激光理论以及超荧光、共振荧光和双稳态的全量子理论中，将用到上述形式的哈密顿量和对易关系.

14.1.2 旋转波近似

将相互作用哈密顿量写到相互作用表象(用(I)表示)，注意场和原子算符是独立的

$$H_{\mathrm{F-A}}^{(I)}=\hbar g\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(H_{\mathrm{A}}+H_{\mathrm{F}})t\right](a+a^+)\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$\times\exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(H_{\mathrm{A}}+H_{\mathrm{F}})t\right]$$

$$=\hbar g\exp\left[\mathrm{i}\Omega\left(a^+a+\frac{1}{2}\right)t\right](a+a^+)$$

$$\times\exp\left[-\mathrm{i}\Omega\left(a^+a+\frac{1}{2}\right)t\right]$$

$$\times\exp\left[\mathrm{i}\begin{pmatrix}\omega_a & 0\\ 0 & \omega_b\end{pmatrix}t\right]\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\times\exp\left[-\mathrm{i}\begin{pmatrix}\omega_a & 0\\ 0 & \omega_b\end{pmatrix}t\right] \tag{14.36}$$

为了揭示其中各项的物理意义和求出旋转波近似下的相互作用哈密顿量，需要利用如下的关系式

$$(a^+a)^n a = a\,(a^+a-1)^n \tag{14.37}$$

可用数学归纳法证明(14.37)：

$n=1$ 时 $(a^+a)^1a=a\,(a^+a-1)^1=(a^+a-1)^1a=a^+aa$

若 $n=n$ 时(14.37)成立，则

$$(a^+a)^{n+1}a=(a^+a)^n a^+aa=(a^+a)^n[a^+a-1]a$$

$$=(a^+a)^n a[a^+a-1]=a\,(a^+a-1)^{n+1}$$

$$\exp\left[\mathrm{i}\Omega\left(a^+a+\frac{1}{2}\right)t\right]a=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}\Omega t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}\Omega t)^n}{n!}(a^+a)^n a$$

$$=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}\Omega t}\sum_{n=0}^{\infty}a\,\frac{(\mathrm{i}\Omega t)^n}{n!}(a^+a-1)^n$$

$$=a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}\Omega t}\exp[\mathrm{i}\Omega(a^+a-1)t] \tag{14.38}$$

故有

$$\exp\left[\mathrm{i}\Omega\left(a^+a+\frac{1}{2}\right)t\right](a+a^+)\exp\left[-\mathrm{i}\Omega\left(a^+a+\frac{1}{2}\right)t\right]$$

$$=a\exp(-\mathrm{i}\Omega t)+a^+\exp(\mathrm{i}\Omega t) \tag{14.39}$$

或者从 a 是正频分量，a^+ 是负频分量，也可直接写出(14.39)式.

另一方面

$$H_{\mathrm{A}}=\begin{pmatrix}\hbar\omega_a & 0\\ 0 & \hbar\omega_b\end{pmatrix} \tag{14.40}$$

$$\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}H_{\mathrm{A}}t\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{i}t}{\hbar}\right)^2 H_{\mathrm{A}}^n \tag{14.41}$$

$$\left\langle a\left|\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}H_{\mathrm{A}}t\right)\right|a\right\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{i}t}{\hbar}\right)^2(\hbar\omega_a)^n=\exp(\mathrm{i}\omega_a t)$$

$$\left\langle b\left|\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}H_{\mathrm{A}}t\right)\right|b\right\rangle=\exp(\mathrm{i}\omega_b t)$$

$$\left\langle a\left|\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}H_{\mathrm{A}}t\right)\right|b\right\rangle=\left\langle b\left|\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}H_{\mathrm{A}}t\right)\right|a\right\rangle=0$$

$$\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}H_{\mathrm{A}}t\right)=\begin{pmatrix}\exp(\mathrm{i}\omega_a t) & 0\\ 0 & \exp(\mathrm{i}\omega_b t)\end{pmatrix} \tag{14.42}$$

所以

$$\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}H_{\mathrm{A}}t\right)\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}H_{\mathrm{A}}t\right)$$

$$=\begin{bmatrix}\exp(\mathrm{i}\omega_a t) & 0\\ 0 & \exp(\mathrm{i}\omega_b t)\end{bmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\times\begin{bmatrix}\exp(-\mathrm{i}\omega_a t) & 0\\ 0 & \exp(-\mathrm{i}\omega_b t)\end{bmatrix}$$

$$=\sigma^{+}\exp(\mathrm{i}\omega t)+\sigma^{-}\exp(-\mathrm{i}\omega t) \tag{14.43}$$

也可以从$\langle\sigma^{-}\rangle=\rho_{ab}$，$\langle\sigma^{+}\rangle=\rho_{ba}$，$\sigma^{-}$是偶极算符的正频分量，$\sigma^{+}$是偶极算符的负频分量，直接写(14.43)式.

应用(14.39)和(14.43)式，有

$$\begin{aligned}H_{\mathrm{F-A}}^{(\mathrm{I})}&=\hbar g[a\exp(-\mathrm{i}\Omega t)+a^{+}\exp(\mathrm{i}\Omega t)]\\&\quad\times[\sigma^{-}\exp(-\mathrm{i}\omega t)+\sigma^{+}\exp(\mathrm{i}\omega t)]\\&=\hbar g\{a\sigma^{-}\exp[-\mathrm{i}(\Omega+\omega)t]+a\sigma^{+}\exp[-\mathrm{i}(\Omega-\omega)t]\\&\quad+a^{+}\sigma^{-}\exp[\mathrm{i}(\Omega-\omega)t]+a^{+}\sigma^{+}\exp[\mathrm{i}(\Omega+\omega)t]\}\end{aligned} \tag{14.44}$$

其中各项代表的物理意义如图 14.2 所示. $a^{+}\sigma^{-}$是原子从$|a\rangle$跃迁到$|b\rangle$并发出一个光子，$a\sigma^{+}$是原子从$|b\rangle$跃迁到$|a\rangle$并吸收一个光子. 这两个过程都是贡献大的项$\exp[\pm\mathrm{i}(\Omega-\omega)t]$. $a^{+}\sigma^{+}$是原子从$|b\rangle$跃迁到$|a\rangle$并放出一个光子，$a\sigma^{-}$是原子从$|a\rangle$跃迁到$|b\rangle$并吸收一个光子，它们随 t 的变化是$\exp[\pm\mathrm{i}(\Omega+\omega)t]$. $a^{+}\sigma$和$a\sigma^{+}$是严格或近似严格地符合能量守恒定律，称为实过程. 按照量子力学，在作用时间很短时破坏能量守恒定律是允许的. 但我们知道$a^{+}\sigma^{+}$和$a\sigma^{-}$对光与二能级原子的作用之贡献可以忽略. 这就是我们在半经典理论中已用过的旋转波近似(RWA). 因此旋转波近似下相互作用哈密顿量是

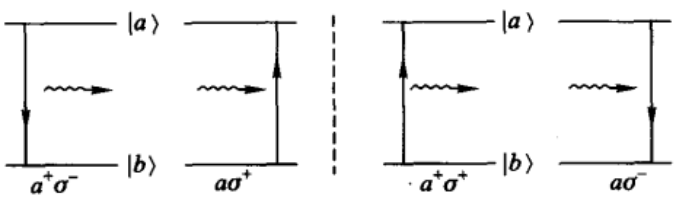


图 14.2 旋转波近似下，略去$\exp[\pm\mathrm{i}(\Omega+\omega)t]$项

(a)共振过程 (b)非共振过程

$$H_{\mathrm{F-A}}^{(\mathrm{I})}=\hbar g\{a\sigma^{+}\exp[-\mathrm{i}(\Omega-\omega)t]+a^{+}\sigma^{-}\exp[\mathrm{i}(\Omega-\omega)t]\} \tag{14.45}$$

下节将给出二次量子化的相互作用哈密顿量. 在 14.3 节中将用(14.45)式推导全量子化的布洛赫方程.

14.1.3 拉比振荡的全量子理论

由(14.45)式,容易建立拉比振荡的全量子理论.用相互作用表象,由于(14.45)式表示的作用只能引起$|a,n\rangle$和$|b,n+1\rangle$之间的跃迁,态矢量写为二者的线性叠加

$$|\psi(t)\rangle=c_{a,n}|a,n\rangle+c_{b,n+1}|b,n+1\rangle \tag{14.46}$$

由薛定谔方程

$$|\dot{\psi}^{(\mathrm{I})}(t)\rangle=-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}H_{\mathrm{F-A}}^{(\mathrm{I})}|\psi^{(\mathrm{I})}(t)\rangle \tag{14.47}$$

其中(I)表示相互作用表象,以下略去这个记号.将(14.45)和(14.46)式代入方程(14.47),则

$$\begin{aligned}|\dot{\psi}\rangle&=c_{a,n}(t)|a,n\rangle+c_{b,n+1}|b,n+1\rangle\\&=-\mathrm{i}g\{a\sigma^{+}\exp[-\mathrm{i}(\Omega-\omega)t]\\&\quad+a^{+}\sigma\exp[\mathrm{i}(\Omega-\omega)t]\}\\&\quad\times[c_{a,n}|a,n\rangle+c_{b,n+1}|b,n+1\rangle]\end{aligned} \tag{14.48}$$

两边乘$\langle a,n|$,则

$$\dot{c}_{a,n}=-\mathrm{i}g\sqrt{n+1}\exp[-\mathrm{i}(\Omega-\omega)t]c_{b,n+1}(t) \tag{14.49}$$

同样可得

$$\dot{c}_{b,n+1}=-\mathrm{i}g\sqrt{n+1}\exp[\mathrm{i}(\Omega-\omega)t]c_{a,n}(t) \tag{14.50}$$

对于共振作用的拉比问题$(\Omega-\omega)=0$,由(9.48)式得

$$\begin{aligned}\ddot{c}_{a,n}&=-\mathrm{i}g\sqrt{n+1}\dot{c}_{b,n+1}(t)\\&=-g^{2}(n+1)c_{a,n}(t)\end{aligned} \tag{14.51}$$

$$c_{a,n}(t)=A\sin(g\sqrt{n+1}t)+B\cos(g\sqrt{n+1}t) \tag{14.52}$$

$$\begin{aligned}c_{b,n+1}(t)&=(-\mathrm{i}g\sqrt{n+1})^{-1}\dot{c}_{a,n}(t)\\&=\mathrm{i}A\cos(g\sqrt{n+1}t)-\mathrm{i}B\sin(g\sqrt{n+1}t)\end{aligned} \tag{14.53}$$

若初始条件为原子在上能级,有 n 个光子,则

$$c_{a,n}(t)=\cos(g\sqrt{n+1}t) \tag{14.54}$$

$$c_{b,n+1}(t)=-\mathrm{i}\sin(g\sqrt{n+1}t) \tag{14.55}$$

若初始条件为原子在下能级,有 $n+1$ 个光子,则

$$c_{a,n}(0)=0,\quad c_{b,n+1}(0)=1$$

有

$$c_{a,n}(t)=-\mathrm{i}\sin(g\sqrt{n+1}t) \tag{14.56}$$

$$c_{b,n+1}(t)=\cos(g\sqrt{n+1}t) \tag{14.57}$$

与拉比问题的半经典理论比较可知,

$$g\sqrt{n+1}\to\frac{\mu E_0}{\hbar} \tag{14.58}$$

$$\frac{\mu}{\hbar}\mathscr{E}\sqrt{n+1}\to\frac{\mu}{\hbar}E_0 \tag{14.59}$$

当光子数 $n\gg1$ 时，

$$\mathscr{E}\sqrt{n}=E_0 \tag{14.60}$$

因此，$\mathscr{E}=\sqrt{\frac{\hbar\Omega}{V\varepsilon_0}}$，相当于一个光子的电场.

此外，由(14.54)～(14.59)式很容易看出 $|c_{a,n}(t)|^2$ 和 $|c_{b,n+1}(t)|^2$ 是以拉比频率 $g\sqrt{n+1}$ 而振荡的.

14.2 二次量子化与相互作用哈密顿量

本节用二次量子化方法求出相互作用哈密顿量. 可以证明，在偶极近似下，二次量子化的相互作用哈密顿量与 14.1 节中的形式一样. 而在 14.4 节中用二次量子化的相互作用哈密顿量讨论自发辐射的跃迁几率和线宽.

14.2.1 二次量子化

在上一章中曾把电磁场量子化，例如把光场按本征函数 $u_\lambda(z)$ 展开

$$E(z,t)=\sum_\lambda (a_\lambda^+ + a_\lambda)N_\lambda u_\lambda(z)$$

其中 $u_\lambda(z)$ 是本征函数，N_λ 是归一化因子. 把展开的振幅变成满足一定对易关系的算符，就把电磁场量子化了. 既然电子和其他基本粒子也有波动性，用波函数 $\psi(x,t)$ 描述，是否也可用类似方法把 $\psi(x,t)$ 量子化呢？这不但是可能的，而且是必须的，在历史上对 $\psi(x,t)$ 的量子化比光场 $E(z,t)$ 的量子化更晚，部分原因是发现基本粒子的波动性更晚些.

把 $\psi(x,t)$ 按本征函数 ϕ_j 展开

$$\left.\begin{aligned}\psi(x,t)&=\sum_j b_j\phi_j(x)\\ b_j(t)&=b_j e^{-i\frac{E_j}{\hbar}t}\end{aligned}\right\} \tag{14.61}$$

其中 ϕ_j 是正交归一的本征函数，E_j 是本征能量，在从经典力学过渡到量子力学时，曾引入对易关系

$$[x,p]=i\hbar$$

这称为第一次量子化. 而把 $\psi(x,t)$ 及薛定谔方程的量子化叫做二次量子

化. 与电磁场的量子化相似，若把 $\psi(x,t)$ 的展开系数看成复数，就是一次量子化的波函数，若把展开系数看成满足一定对易关系的算符，就是二次量子化了. 这时 $\psi(x,t)$ 也就成为算符，正如 $E(z,t)$ 成为算符一样.

为了进行二次量子化，我们先求能量算符的平均值

$$\langle H\rangle=\langle\psi^*\,|H|\psi\rangle$$

将 ψ 的表达式(14.46)代入，并利用

$$\left.\begin{aligned}H\phi_j&=E_j\phi_j\\ \langle H\rangle&=\sum_i E_i b_i^+ b_i\end{aligned}\right\}\tag{14.62}$$

必须注意，$\langle H\rangle$ 与 t 无关(即能量守恒). 这是因为

$$\left.\begin{aligned}b_j(t)&=b_j\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}E_j t}\\ b_j^+(t)&=b_j^+\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}E_j t}\\ b_j^+(t)b_j(t)&=b_j^+b_j\end{aligned}\right\}\tag{14.63}$$

因此(14.62)式的 $\langle H\rangle$ 就与 t 无关了，由海森堡方程

$$\frac{\partial b_j(t)}{\partial t}=\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\langle H\rangle b_j(t)-b_i(t)\langle H\rangle)\tag{14.64}$$

可得到

$$\left.\begin{aligned}\dot b_j(t)&=-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}E_j b_j\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}E_j t}\\ -E_j b_j&=\langle H\rangle b_j-b_j\langle H\rangle\\ -E_j b_j&=\sum_i E_i(b_i^+b_ib_j-b_jb_i^+b_i)\end{aligned}\right\}\tag{14.65}$$

此方程有两个解

$$\left.\begin{aligned}&b_jb_i^+-b_i^+b_j=\delta_{ij}\\ &[b_i,b_j]=0,(i\neq j\text{ 时})\end{aligned}\right\}\tag{14.66}$$

这对应于玻色子

$$\left.\begin{aligned}b_jb_i+b_ib_j&=0\\ b_j^+b_i+b_ib_j^+&=\delta_{ij}\end{aligned}\right\}\tag{14.67}$$

这时，(14.65)式的右边变为

$$\begin{aligned}&\sum_i E_i(-b_i^+b_jb_i-b_jb_i^+b_i)\\ =&-\sum_i E_i(b_i^+b_j-b_jb_i^+)b_i=-E_jb_j\end{aligned}\tag{14.68}$$

由 $\langle H\rangle$ 的表达式可知 b^+b 是粒子数算符，由(14.66)式可知，

$$b^2=(b^+)^2=0$$

若粒子数算符为 $\hat N$，则

$$b^+b=\hat{N} \tag{14.69}$$

$$\hat{N}^2=b^+bb^+b=b^+(1-b^+b)b=b^+b=\hat{N} \tag{14.70}$$

由(14.70)可求 $\hat{N}$ 的本征值

$$\hat{N}^2|n\rangle=\hat{N}|n\rangle$$
$$n^2|n\rangle=n|n\rangle$$
$$n^2=n,\quad n=1,0$$

即 $\hat{N}$ 的本征值只有 0 和 1,这就是泡利不相容原理,b^+,b 描述费米子.

14.2.2 费米子算符的作用

由 $b^2=0$ 和(14.67)式的$\{b,b^+\}_+=1$,容易证明 b 和 $\hat{N}$ 的对易关系是

$$[b,\hat{N}]=[b,b^+b]=bb^+b-b^+bb=bb^+b$$
$$=(1-b^+b)b=b \tag{14.71}$$

$$[b^+,\hat{N}]=b^+b^+b-b^+bb^+=-b^+bb^+$$
$$=-b^+(1-b^+b)=-b^+ \tag{14.72}$$

由(14.71)式有

$$\hat{N}b=b\hat{N}-b=b(\hat{N}-1) \tag{14.73}$$

$$\hat{N}b|n\rangle=b(\hat{N}-1)|n\rangle=b(n-1)|n\rangle=(n-1)b|n\rangle \tag{14.74}$$

因此,$b|n\rangle$是使粒子数减少一个. 即

$$b|n\rangle=S_n|n-1\rangle \tag{14.75}$$

$$\langle n|b^+b|n\rangle=n\langle n|n\rangle=|S_n|^2\langle n-1|n-1\rangle \tag{14.76}$$

(1) 若 $n=0$,$b|0\rangle=0$

(2) 若 $n=1$,由$\langle 0|0\rangle=1$,$\langle 1|1\rangle=1$,则

$$|S_n|^2=1$$

S_n 的位相是任意的,取其位相为零,则 $S_n=1$. 由(14.75)式,有

$$b|1\rangle=|0\rangle \tag{14.77}$$

综上所述,我们得到了费米子算符的关系

$$\{b_j,b_i\}_+=0$$
$$\{b_j^+,b_i\}_+=\delta_{ij}$$
$$b^2=(b^+)^2=0$$
$$b|0\rangle=0$$
$$b|1\rangle=|0\rangle$$

$$\psi = \sum_j b_j \phi_j$$

$$\psi^+ = \sum_j b_j^+ \phi_j^*$$

用矢量势表示的相互作用哈密顿量包括两部分：

$$H_{\mathrm{FA},1} = \left\langle \psi^+ \left| \left(-\frac{e}{m} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{P} \right) \right| \psi \right\rangle \tag{14.78}$$

$$H_{\mathrm{FA},2} = \left\langle \psi^+ \left| \left(\frac{e^2}{2m} \boldsymbol{A}^2 \right) \right| \psi \right\rangle \tag{14.79}$$

将 A 的表达式代入则得到

$$H_{\mathrm{FA},1} = \hbar \sum_{i,j,k} b_i^+ b_j g_{\lambda,ij} (a_\lambda + a_\lambda^+) \tag{14.80}$$

同样可求出 $H_{\mathrm{FA},2}$，$g_{\lambda,ij}$ 是耦合常数.

下边可以证明，对于单模光场与二能级原子的作用，(14.80)式与 $H_{\mathrm{FA}} = \hbar g(a\sigma^+ + a^+\sigma)$ 一样.

14.2.3 光与二能级原子作用的偶极近似

光与二能级原子作用，我们曾用

$$V = E(-e\boldsymbol{r}) \tag{14.81}$$

现在又用矢量势表示相互作用

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{e}{m}\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{P} \\ &\frac{e^2}{2m}\boldsymbol{A}^2 \end{aligned}\right\} \tag{14.82}$$

现在证明，在偶极近似下，$\frac{e}{m}\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{P}$ 项与 $E(-e\boldsymbol{r})$ 一样.

对二能级原子(原子中的电子)：

$$\psi = b_1 \phi_1 + b_2 \phi_2 \tag{14.83}$$

$$\psi^+ = b_1^+ \phi_1^* + b_2^+ \phi_2^* \tag{14.84}$$

这就相当于把原来的展开系数 c_a，c_b 看成了算符

$$H_{\mathrm{FA},1} = \left\langle \psi^+ \left| \frac{e}{m}\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{P} \right| \psi \right\rangle \tag{14.85}$$

在偶极近似下，在原子大小的范围内(波函数的范围)认为矢量势是常数，可提到积分号外：

$$H_{\mathrm{FA},1} = -(e/m)\boldsymbol{A}\langle \psi^+ | \boldsymbol{P} | \psi \rangle \tag{14.86}$$

$$\boldsymbol{P} = -\mathrm{i}\hbar\nabla \tag{14.87}$$

$$H_{\mathrm{FA},1} = -\frac{e}{m}\{\boldsymbol{A}^{(+)} p_{21} b_2^+ b_1 + \boldsymbol{A}^{(-)} p_{12} b_1^+ b_2\} \tag{14.88}$$

下面变到相互作用表象. 注意在相互作用表象中，

$$\boldsymbol{A}^{(+)}=a_\lambda \exp(-\mathrm{i}\Omega_\lambda t) \tag{14.89}$$

$$\boldsymbol{A}^{(-)}=a_\lambda^+ \exp(+\mathrm{i}\Omega_\lambda t) \tag{14.90}$$

$$(b_2^+ b)_t=b_2^+ b_1 \exp(\mathrm{i}\omega t) \tag{14.91}$$

此外，考虑到把二能级原子当成偶极子时，

$$ex_{21}(t)=ex_{21}\exp(\mathrm{i}\omega t) \tag{14.92}$$

$$p_{21}=m\dot{x}_{21}=\mathrm{i}\omega x_{21} m \tag{14.93}$$

将(14.93)式代入(14.88)式，则

$$H_{\mathrm{FA},1}=-e\{\mathrm{i}\omega \boldsymbol{A}^{(+)} x_{21}(b_2^+ b_1)_i+\mathrm{c.c.}\} \tag{14.94}$$

注意

$$-E^{(\pm)}=+\frac{\partial \boldsymbol{A}^{(\pm)}}{\partial t} \tag{14.95}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}^{(\pm)}}{\partial t}=\mp \mathrm{i}\omega \boldsymbol{A}^{(\pm)} \tag{14.96}$$

这里考虑到靠近共振，取 $\Omega_\lambda=\omega$. 而且这里(14.96)式是用了慢变振幅近似，a_λ^+ 比指数 $\exp(-\mathrm{i}\Omega_\lambda t)$ 变得慢. a_λ 比指数 $\exp(\mathrm{i}\Omega_\lambda t)$ 变得慢，注意对超短脉冲以及多光子过程，必须重新审查慢变振幅近似.

令(14.95)式与(14.96)式相等，则(14.94)式变为

$$H_{\mathrm{FA},1}=-E^{(+)}\mu_{21}(b_2^+ b_1)-E^{(-)}\mu_{12}(b_1^+ b_2) \tag{14.97}$$

其中

$$\mu_{21}=ex_{21}=\mu_{12} \tag{14.98}$$

对于驻波场，由(13.28)式，有

$$E^{(+)}=\sqrt{\frac{\hbar\Omega}{V\varepsilon_0}}a\ \sin kz=\mathscr{E}a\ \sin kz \tag{14.99}$$

$$E^{(-)}=\sqrt{\frac{\hbar\Omega}{V\varepsilon_0}}a^+\sin kz=\mathscr{E}a^+\sin kz \tag{14.100}$$

代入(14.97)，则

$$\begin{aligned}H_{\mathrm{FA},1}&=[-\mu\mathscr{E}(\sin kz)][ab_2^+ b_1+a^+ b_1^+ b_2]\\&=\hbar g[ab_2^+ b_1+a^+ b_1^+ b_2]\end{aligned} \tag{14.101}$$

$$g=-\frac{\mu}{\hbar}\mathscr{E}\sin kz \tag{14.102}$$

(14.101)式正是(14.80)式在二能级下的特例.

写到相互作用表象，注意

$$a(t)=a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t},\ a^+(t)=a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}$$

$$(b_2^+ b_1)t=b_2^+ b_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$$

$$(b_1^+ b_2)t=b_1^+ b_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$

$$H_{\mathrm{FA}.1}=\hbar g\{ab_2^+ b_1\exp[-\mathrm{i}(\Omega-\omega)t]$$
$$+a^+ b_1^+ b_2\exp[\mathrm{i}(\Omega-\omega)t]\} \tag{14.103}$$

前已提到泡利算符表示的 H_{FA}，即(14.45)式

$$H_{\mathrm{FA}}=\hbar g\{a\sigma^+\exp[-\mathrm{i}(\Omega-\omega)t]+a^+\sigma\exp[\mathrm{i}(\Omega-\omega)t]\}$$

比较(14.45)式和(14.103)式，可知，偶极近似只是考虑了$\left(-\frac{e}{m}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{P}\right)$，忽略了$\left(\frac{e^2}{2m}\boldsymbol{A}^2\right)$，而且费米子算符与泡利算符有如下关系

$$\sigma^+=b_2^+ b_1\equiv b_a^+ b_b \tag{14.104}$$
$$\sigma^-=b_1^+ b_2\equiv b_b^+ b_a \tag{14.105}$$

回顾(14.38)式，b_1，b_2 本来就是二能级原子波函数按两个本征函数展开的系数而变成了算符. 按 b，b^+ 的意义，$b_a^+ b_b$ 是下能级消灭一个粒子，上能级产生一个粒子，这正是与 $\sigma^+|b\rangle=|a\rangle$ 的作用一样. $b_a^+ b_a$ 是上能级消灭一个粒子，下能级产生一个粒子，这与 $\sigma^-|a\rangle=|b\rangle$ 的作用一样. 见图 14.3.

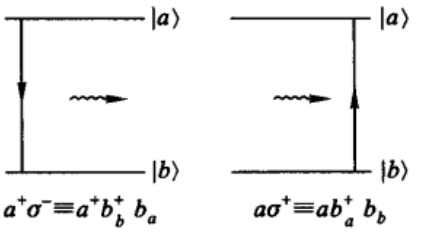


图 14.3 $a^+ b_b^+ b_a$ 与 $ab_a^+ b_b$ 的作用

二次量子化的相互作用哈密顿量(14.103)式在激光物理和量子光学中被广泛采用. 在 14.4 节中将用(14.103)式研究自发辐射的问题.

14.3 全量子化的麦克斯韦-布洛赫方程

本节利用海森堡表象求出麦克斯韦-布洛赫方程，然后求解拉比问题. 最后用较严格的方法给出旋转坐标系中的麦克斯韦-布洛赫方程. 本节是哈肯激光理论的重要基础，并将用于研究共振荧光等问题.

14.3.1 单原子与单模场作用的 M-B 方程

考虑一个二能级原子与单模光场作用

$$H=\hbar\Omega a^+ a+\frac{1}{2}\hbar\omega\sigma_z+\hbar g(a^+\sigma^-+a\sigma^+) \tag{14.106}$$

$$\dot{a}=\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[a,\hbar\Omega a^+ a]+\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[a,\hbar g(a^+\sigma^-+a\sigma^+)]$$
$$=-\mathrm{i}\Omega a-\mathrm{i}g\sigma^- \tag{14.107}$$
$$\dot{\sigma}^-=\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\left[\sigma^-,\frac{1}{2}\hbar\omega\sigma_z\right]+\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\sigma^-,\hbar g(a^+\sigma^-+a\sigma^+)]$$

$$=-\mathrm{i}\omega\sigma^{-}+\mathrm{i}ga\sigma_z \tag{14.108}$$

$$\dot{\sigma}^{+}=\mathrm{i}\omega\sigma^{+}-\mathrm{i}ga^{+}\sigma_z \tag{14.109}$$

$$\dot{\sigma}_z=\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\sigma_z,\hbar g(a^{+}\sigma^{-}+a\sigma^{+})]$$

$$=2\mathrm{i}g(a^{+}\sigma^{-}-a\sigma^{+}) \tag{14.110}$$

由 $\sigma_x=(\sigma^{+}+\sigma^{-})$，$\sigma_y=-\mathrm{i}(\sigma^{+}-\sigma^{-})$，则

$$\dot{\sigma}_x=-\omega\sigma_y-\mathrm{i}g(a^{+}-a)\sigma_z \tag{14.111}$$

$$\dot{\sigma}_y=\mathrm{i}g(a^{+}-a)\sigma^{+}+g(a^{+}+a)\sigma_y \tag{14.112}$$

方程(14.107)～(14.110)是哈肯激光理论的重要基础，也是研究共振荧光等问题的基本方程.

14.3.2 旋转坐标系

与半经典理论中的光学布洛赫方程相似，我们也可用类似的方法将(14.108)～(14.110)式或(14.111)，(14.112)式变到旋转坐标系.

令

$$\left.\begin{aligned}\sigma^{+}&=\tilde{\sigma}^{+}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}\\ \sigma^{-}&=\tilde{\sigma}^{-}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t}\\ a^{+}&=\tilde{a}^{+}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}\\ a&=\tilde{a}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t}\\ \sigma_z&=\tilde{\sigma}_z\end{aligned}\right\} \tag{14.113}$$

代入(14.108)，(14.109)以及(14..110)，则有

$$\dot{\tilde{\sigma}}^{-}=-\mathrm{i}(\omega-\Omega)\tilde{\sigma}^{-}+\mathrm{i}g\tilde{a}\sigma_z \tag{14.114}$$

$$\dot{\tilde{\sigma}}^{+}=\mathrm{i}(\omega-\Omega)\tilde{\sigma}^{+}-\mathrm{i}g\tilde{a}^{+}\sigma_z \tag{14.115}$$

$$\dot{\tilde{\sigma}}_z=2\mathrm{i}g(\tilde{a}^{+}\tilde{\sigma}^{-}-\tilde{a}\tilde{\sigma}^{+}) \tag{14.116}$$

利用关系式

$$\tilde{\sigma}_x=\tilde{\sigma}^{+}+\tilde{\sigma}^{-},\quad \tilde{\sigma}_y=-\mathrm{i}(\tilde{\sigma}^{+}+\tilde{\sigma}^{-})$$

得到

$$\left.\begin{aligned}\dot{\tilde{\sigma}}_x&=-(\omega-\Omega)\tilde{\sigma}_y-\mathrm{i}g(\tilde{a}^{+}-\tilde{a})\sigma_z\\ \dot{\tilde{\sigma}}_y&=(\omega-\Omega)\tilde{\sigma}_x-g(a^{+}+a)\sigma_z\\ \dot{\tilde{\sigma}}_z&=\mathrm{i}g(\tilde{a}^{+}-\tilde{a})\tilde{\sigma}_x+g(\tilde{a}^{+}+\tilde{a})\tilde{\sigma}_y.\end{aligned}\right\} \tag{14.117}$$

令

$$\boldsymbol{\sigma}=(\tilde{\sigma}_x,\tilde{\sigma}_y,\tilde{\sigma}_z)$$

$$\boldsymbol{\Omega}=(\Omega_x,\Omega_y,\Omega_z)$$

$$=[g(a^{+}+a),-\mathrm{i}g(a^{+}-a),(\omega-\Omega)]$$

则得到矢量形式的布洛赫方程(略去符号～)

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}=\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{\sigma} \tag{14.118}$$

其中 $\Omega_y=0$,正如半经典理论中 $\Omega_y=0$.

14.3.3 拉比问题的解

在共振条件下,有

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_z&=g(a^+ +a)\sigma_y\\ \dot{\sigma}_y&=-g(a^+ +a)\sigma_z\\ \ddot{\sigma}_z&=-g^2(a^+ +a)^2\sigma_z\\ &=-g^2(2aa^+ +1)\sigma_z\end{aligned}$$

因为 σ_z 只与粒子数有关,与场无关. 所以求平均值时,只将$(2a^+ a+1)$对场求平均. 有

$$\begin{aligned}\langle(2a^+ a+1)\rangle&=\langle n|(2a^+ a+1)|n\rangle+\langle n+1|(2a^+ a+1)|n+1\rangle\\ &=4(n+1)\\ \langle\ddot{\sigma}_z\rangle&=-4g^2(n+1)\langle\sigma_z\rangle\\ \langle\sigma_z\rangle&=\cos(2g\sqrt{n+1}t)\end{aligned}$$

考虑到

$$\begin{aligned}\langle\sigma_z\rangle&=|c_a|^2-|c_b|^2\\ |c_a|^2+|c_b|^2&=1\\ |c_a|^2=\frac{1}{2}(1-\langle\sigma_z\rangle)&=\cos^2(gt\sqrt{n+1})\\ |c_b|^2&=\sin^2(gt\sqrt{n+1})\end{aligned}$$

这就是拉比问题的解.

类似地还可求出非共振的拉比问题的解.

14.4 自发辐射、受激辐射和光的吸收

我们用相互作用表象来处理自发辐射、受激辐射和光的吸收. 这是光与物质作用的全量子理论的简单例子. 但是,本节的结果对理解激光原理以及对于激光器的全量子理论都是重要的.

14.4.1 含时间的一级微扰

考虑一个单个原子,它有两个能级,在初始时刻该原子在上能级. 特别注意这里把自发辐射、受激辐射和吸收辐射作为单光子过程,即一个跃迁只对应一个光子的产生和消灭,只需将(14.103)式给出的哈密顿量推

广到多模场(它是 a_λ^+ 和 a_λ 的线性函数),

$$H_{FA} = \hbar \sum_\lambda g_\lambda b_1^+ b_2 a_\lambda^+ \exp[\mathrm{i}(\Omega_\lambda - \omega)t] + g_\lambda^+ b_2^+ b_1 a_\lambda \exp[-\mathrm{i}(\Omega_\lambda - \omega)t] \tag{14.119}$$

由于自发辐射是多模场,因此这里使用多模场与二能级原子作用哈密顿量.将(14.119)代入薛定谔方程,便可计算自发辐射、受激辐射和吸收过程.

薛定谔方程是

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = H_{FA}\Phi \tag{14.120}$$

将(14.120)式两边从 $\tau=0$ 到 $\tau=t$ 积分,则

$$\Phi(t) = \Phi(0) + \left(\frac{-\mathrm{i}}{\hbar}\right)\int_0^t H_{FA}(\tau)\Phi(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{14.121}$$

其中 $\Phi(0)$是初始时刻的态矢量.将 $\Phi(0)$作为零级近似解,则一级微扰的解是

$$\Phi^{(1)}(t) = \Phi(0) + \left(\frac{-\mathrm{i}}{\hbar}\right)\int_0^t H_{FA}(\tau)\Phi(0)\mathrm{d}\tau \tag{14.122}$$

此式是处理自发辐射、受激辐射和吸收的基础.

14.4.2 自发辐射

由于初始时刻原子在激发态(电子被激发到$|a\rangle$),但是没有光子,光场与原子的总的态是

$$\Phi(0) = b_2^+ \Phi_0 \tag{14.123}$$

其中 Φ_0 是真空态.b_2^+ 表示有一个原子在$|2\rangle$,即从真空中产生电子.

将 $\Phi(0)$和 H_{FA}的表达式(14.123)和(14.119)代入(14.122),则

$$\Phi^{(1)}(t) = b_2^+\Phi_0 + (-\mathrm{i})\int_0^t \sum_\lambda \{g_\lambda b_1^+ b_2 a_\lambda^+ b_2^+ \times \exp[\mathrm{i}(\Omega_\lambda - \omega)\tau]\Phi_0 + g_\lambda^* b_2^+ b_1 a_\lambda b_2^+ \times \exp[-\mathrm{i}(\Omega_\lambda - \omega)\tau]\Phi_0\}\mathrm{d}\tau \tag{14.124}$$

由于 a 和 b 对易,(14.124)式积分中第二项有

$$b_2^+ b_1 a_\lambda b_2^+ \Phi_0 = b_2^+ b_1 b_2^+ a_\lambda \Phi_0 = 0 \tag{14.125}$$

其中用到 $a_\lambda\Phi_0 = a_\lambda|0\rangle = 0$. (14.124)式积分中的第一项中有

$$b_1^+ b_2 a_\lambda^+ b_2^+ \Phi_0 = b_1^+ b_2 b_2^+ a_\lambda^+ \Phi_0 = b_1^+(1 - b_2^+ b_2)a_\lambda^+\Phi_0 = b_1^+ a_\lambda^+ \Phi_0 \tag{14.126}$$

其中用到费米子算符的对易关系 $b_2\Phi_0 = 0$. 因此(14.124)式变

$$\Phi^{(1)}(t) = b_2^+\Phi_0 + (-\mathrm{i})\sum_\lambda \int_0^t g_\lambda \exp[\mathrm{i}\Delta\Omega_\lambda\tau] b_1^+ a_\lambda^+ \Phi_0 \mathrm{d}\tau$$

$$= b_2^+\Phi_0 + \sum_\lambda g_\lambda \frac{1}{\Delta\Omega_\lambda}[1-\exp(\mathrm{i}\Delta\Omega_\lambda t)]b_1^+ a_\lambda^+\Phi_0$$

(14.127)

其中 $\Delta\Omega_\lambda = \Omega_\lambda - \omega$，(14.127)式的物理意义是很清楚的：$b_2\Phi_0$ 是初始态，光子数为零，原子在激发态(即在$|2\rangle$上产生一个电子)．而 $b_1^+ a_\lambda^+\Phi_0$ 的系数的平方就是发现原子在下能级而在第 λ 个模有一个光子的几率，该几率即

$$\left|\frac{g_\lambda}{\Delta\Omega_\lambda}\right|^2 |[1-\exp(\mathrm{i}\Delta\Omega_\lambda t)]|^2 \tag{14.128}$$

由于自发辐射产生的是多模场，因此发生自发辐射的几率是

$$\sum_\lambda \left|\frac{g_\lambda}{\Delta\Omega_\lambda}\right|^2 |[1-\exp(\mathrm{i}\Delta\Omega_\lambda t)]|^2 \tag{14.129}$$

将此式对时间 t 微商，则得到每秒的跃迁几率 P

$$P = \sum_\lambda |g_\lambda|^2 2\frac{\sin(\Delta\Omega_\lambda t)}{\Delta\Omega_\lambda} \tag{14.130}$$

其中的$\frac{\sin(\Delta\Omega_\lambda t)}{\Delta\Omega_\lambda}$如图 14.4 所示，其中两个最靠近原点的零点是

$$\Delta\Omega_\lambda t = \pm\pi, \Delta\Omega_\lambda = \pm\left(\frac{\pi}{t}\right)$$

当 $t\to\infty$时，从图看出$\pm\left(\frac{\pi}{t}\right)$越趋向原点，同时在 $\Delta\Omega_\lambda \approx 0$ 附近 $\sin(\Delta\Omega_\lambda t)$变大．这在数学上可作为 δ 函数的定义，即

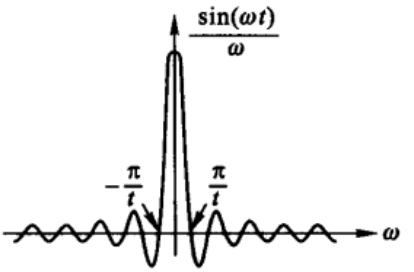


图 14.4 δ 函数

$$\lim_{s\to\infty}\frac{\sin(\Delta\Omega_\lambda t)}{\Delta\Omega_\lambda} = \pi\delta(\Delta\Omega_\lambda) \tag{14.131}$$

将(14.131)式代入(14.130)式，则

$$P = 2\pi\sum_\lambda |g_\lambda|^2\delta(\Omega_\lambda - \omega) \tag{14.132}$$

考虑到在体积 V 内、在频率 $\Omega\to\Omega+\mathrm{d}\Omega$ 内的模数是

$$D(\Omega) = \frac{\Omega^2 V}{\pi^2 c^3}\mathrm{d}\Omega \tag{14.133}$$

将(14.132)变成积分

$$P = \int_0^\infty 2\pi |g|^2\delta(\Omega-\omega)\frac{\Omega^2}{\pi^2 c^3}V\mathrm{d}\Omega$$

$$= \int_{-\infty}^\infty 2\pi |g|^2\delta(\Omega-\omega)\frac{\Omega^2}{\pi^2 c^3}V\mathrm{d}(\Omega-\omega)$$

$$\approx \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi \mid g \mid^2 \delta(\Omega-\omega)\frac{\Omega^2}{\pi^2 c^3}V\mathrm{d}(\Omega-\omega)$$

$$= 2\pi \mid g \mid^2 \frac{\Omega^2}{\pi^2 c^3}V \tag{14.134}$$

$$|g|^2 = \frac{\mu^2}{\hbar^2}\mathscr{E}^2\sin^2(kz) = \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{\hbar^2}\left(\frac{\hbar\Omega}{\varepsilon_0 V}\right) \tag{14.135}$$

其中用到了$\overline{\sin^2(kz)}=\frac{1}{2}$. 将(14.135)式代入(14.134)式,则

$$P=\frac{\mu^2\Omega^3}{\pi\hbar\varepsilon_0 c^2} \tag{14.136}$$

由于其中的 $\mu=ex_{ab}$,实际上只是 μ_x,考虑到 μ 的三个分量,则

$$\left.\begin{aligned}\mu^2 &= \mu_x^2+\mu_y^2+\mu_z^2\\ \mu_x^2 &= \frac{1}{3}\mu^2\end{aligned}\right\} \tag{14.137}$$

因此(14.136)应修改为

$$P=\frac{1}{3}\frac{\mu^2\Omega^3}{\pi\hbar\varepsilon_0 c^2} \tag{14.138}$$

这就是自发辐射几率,爱因斯坦 A 系数为 $A=P$.

14.4.3 受激辐射

受激辐射是激发态(上能态$|2\rangle$)的原子在外界光场作用下发生的. 因此初态是上能态有一个原子,同时第 λ_0 模有 n 个光子,即

$$\Phi(0)=b_2^+\frac{1}{\sqrt{n!}}(a_{\lambda_0}^+)^n\Phi_0 \tag{14.139}$$

将(14.139)式代入一级微扰公式(14.122),

$$\Phi^{(1)}(t)=\Phi(0)+\left(\frac{-\mathrm{i}}{\hbar}\right)\int_0^t H_{\mathrm{FA}}(\tau)\Phi(0)\mathrm{d}\tau$$

在积分号内,$H_{\mathrm{FA}}\Phi(0)$有两类情况

$$\lambda=\lambda_0:(b_1^+b_2a_{\lambda_0}^+)b_2^+\ (a_{\lambda_0}^+)^n\Phi_0 \tag{14.140}$$

$$\lambda\neq\lambda_0:(b_1^+b_2a_{\lambda_0}^+)b_2^+\ (a_{\lambda_0}^+)^n\Phi_0 \tag{14.141}$$

其中(14.141)式表明,激发光是第 λ_0 模,产生的光是 $\lambda\neq\lambda_0$ 的模,这是自发辐射. 而(14.140)式表明,第 λ_0 模的激发光在第 λ_0 模产生光子,这是受激辐射.

$\lambda\neq\lambda_0$ 时,自发辐射几率由(14.132)式给出,即为

$$P=2\pi\sum_{\lambda\neq\lambda_0}|g_\lambda|^2\delta(\Omega_\lambda-\omega)$$

$\lambda=\lambda_0$ 时,初态若写成$|n_{\lambda_0}\rangle|a\rangle$,末态为$|n_{\lambda_0}+1\rangle|b\rangle$,跃迁几率是

$$
\begin{aligned}
&|\{\langle b|\langle n_{\lambda_0}+1|H_{FA}|n_{\lambda_0}\rangle|a\rangle\}|^2\\
&=2\pi|g_{\lambda_0}|^2|\{\langle b|\langle n_{\lambda_0}+1|a_{\lambda_0}^{+}\sigma^{-}|n_{\lambda_0}\rangle|a\rangle\}|^2\cdot\delta(\Omega_\lambda-\omega)\\
&=2\pi|g_{\lambda_0}|^2(n_{\lambda_0}+1)\delta(\Omega_\lambda-\omega) \qquad (14.142)
\end{aligned}
$$

其中$(n_{\lambda_0}+1)$中的"1"与光场无关，所以也是自发辐射，但这是在第 λ_0 模内的自发辐射. 此式表明，当一个模内只有一个光子时 $n_{\lambda_0}=1$，该模内的自发辐射几率等于受激辐射几率. 把(14.141)式与第 λ_0 的自发辐射相加，则得到各个模内的总的自发辐射

$$P=2\pi\sum_{\lambda}|g_\lambda|^2\delta(\Omega_\lambda-\omega)$$

受激辐射几率是

$$P_{st}=2\pi n_{\lambda_0}|g_{\lambda_0}|^2\delta(\Omega_\lambda-\omega)$$

若原子的线宽为 $\Delta\omega$，则在 $\Delta\omega$ 内的模数是

$$D(\omega)=\frac{\omega^2V}{\pi^2c^3}\Delta\omega \qquad (14.143)$$

比较受激辐射 P_{st} 与自发辐射几率 P，可知 P 是向 $\Delta\omega$ 内各个模的自发辐射，P_{st} 是一个模内的受激辐射

$$P_{st}=\frac{nP}{D(\omega)\Delta\omega} \qquad (14.144)$$

$$\left[\frac{P_{st}}{P/D(\omega)\Delta\omega}\right]=n \qquad (14.145)$$

这个简单的关系含有极重要的物理意义：一个模内的受激辐射与该模内自发辐射之比，等于该模内的光子数 n.

下面求爱因斯坦系数之间的关系. 由于 n 个光子能量是 $n\hbar\omega$，所以在单位体积和单位频率范围的能密度是

$$\rho_E=\frac{n\hbar\omega}{V\Delta\omega} \qquad (14.146)$$

$$P_{st}=B_{21}\rho_E=B_{21}\frac{n\hbar\omega}{V\Delta\omega} \qquad (14.147)$$

利用(14.143)式，有

$$B_{21}=P_{st}\frac{V\Delta\omega}{n\hbar\omega}=\left(\frac{nP}{D(\omega)}\right)\frac{V\Delta\omega}{n\hbar\omega} \qquad (14.148)$$

因此得到爱因斯坦 A 系数和 B 系数的关系

$$\frac{A}{B_{21}}=\frac{P}{B_{21}}=\frac{\hbar\omega D(\omega)}{V\Delta\omega} \qquad (14.149)$$

将 $D(\omega)=\frac{\omega^2V}{\pi^2c^3}\mathrm{d}\omega$ 代入，则

$$\frac{A}{B_{21}}=\frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3} \qquad (14.150)$$

$$B_{21}=A\frac{\pi^2c^3}{\hbar\omega^3} \tag{14.151}$$

对吸收的计算与计算受激辐射完全相似，只不过把初始条件换成原子在下能级. 这时得到吸收速率为

$$\left.\begin{aligned}P_{\text{abs}}&=P_{\text{st}}\\B_{12}&=B_{21}\end{aligned}\right\} \tag{14.152}$$

因此，从全量子理论计算出了自发辐射几率、受激辐射几率和吸收几率，以及爱因斯坦系数之间的关系. 特别是得到了两个重要结论：

(1) 一个模内的受激辐射几率与自发辐射几率之比，等于该模内的光子数.

(2) 在计算受激辐射时，清楚地看到，入射光的光子是 λ_0 模(初始条件)，产生的光子数 n_{λ_0} 也是在该模内，即受激辐射产生的光子与引起该过程的光子的性质完全一样.

习题与思考

(1) 比较全量子化的 M-B 方程与半经典的 M-B 方程，它们有什么联系？

(2) 全量子的拉比振荡与半经典的拉比振荡的解有什么异同？

(3) 由全量子的 M-B 方程出发，在适当的近似条件下推导出半经典的光学双稳态方程.

(4) 简述自发辐射的根源及其影响.

参 考 文 献

[1] Haken H. Light, Wave, Photons, Atoms. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1981.

[2] Jordan P. Wigner E. Uber das Paulische Aquivalenzverbot. Z. Phys., 1928, 47: 631-638.

[3] Pauli W. Uber den zusammenhang des abschlusses der elektronengruppen im atom mit der komplexstruktur der spektren. Z. Phys., 1925, 31: 765-770.

[4] Weisskopf V, Wigner E. Uber das naturliche linienbreite in der strablung des harmonischen oszillators. Z. Phys., 1930, 65: 18-20.

第 15 章　激光器的全量子理论

本章介绍激光器的全量子理论——拉姆学派的密度算符方法. 15.1 节介绍激光器的全量子理论的模型(库的概念)和约化算符方法. 15.2 和 15.3 节分别用约化算符方法,建立激光器的全量子的四级微扰理论和强信号理论. 15.4 和 15.5 节分别研究激光的光子统计和线宽. 15.6 节利用相干态表象由密度算符方程得到激光器的福克-普朗克方程即拉克斯和路易塞尔学派的激光理论的主要结果.

15.1　激光器全量子理论模型与约化算符方法

本节首先介绍激光器的全量子理论的库的概念和理论模型,然后介绍拉姆学派的库理论的约化算符方法.

15.1.1　激光器全量子理论模型

激光器的全量子理论的模型见图 15.1. 其中增益介质仍是二能级原子,泵浦源把原子激发到上能级 a 的速率是 λ_a. 为了简化,令 $\lambda_b=0$. 处于粒子数反转的介质有非线性增益,使光场被放大. 另一方面,光场还有耗散. 我们假定耗散的具体机制不起重要作用. 在半经典理论中,用麦克斯韦方程来描述场,所以用等效的电导 σ 来代表损耗是很方便的. 在全量子理论中,可以用处于低能态的许多二能级原子的吸收来代表损耗. 光场与

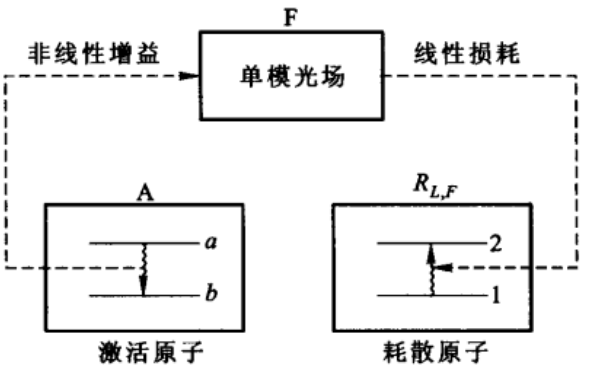


图 15.1　激光器全量子理论模型

损耗原子也有共振作用. 假定损耗原子数目非常多，光场被吸收不会饱和. 这实际上是考虑到库 $R_{L.F}$ 非常之大，光的吸收对激光影响很大，但对库几乎没有丝毫影响.

这种模型的特点在于增益介质和耗散的库都是二能级系统，其最大的优点就是可以用同样的方法和公式来计算增益和损耗，只不过增益介质的起始条件是原子都在上能级，耗散原子的初始条件都在下能级. 此外，还需考虑到增益是非线性的，需精确计算，或至少计算到四级微扰. 然而损耗是线性的，只需计算到二级微扰.

为了进一步简化计算，拉姆学派假定在时刻 t_0 有一个原子被泵浦到高能态 $|a\rangle$，在小于原子寿命 T 的时间内该原子完成对光场的贡献，并在时刻 (t_0+T) 离开光学谐振腔，如图 15.2 所示.

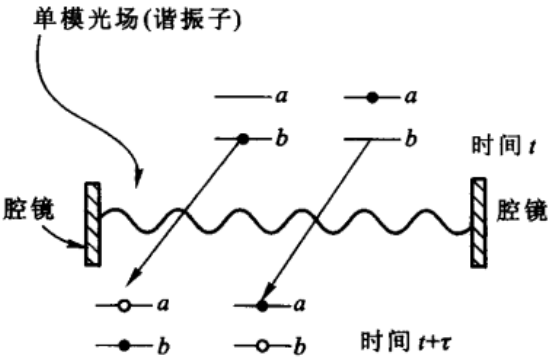


图 15.2 二能级原子通过谐振腔

这时应注意

$$T=1/\gamma_{ab} \tag{15.1}$$

$T\approx10^{-8}$ s. 在激光的全量子理论中，假定 T 是足够小的，只有这样才能用含时间的微扰理论计算一个原子对光场的密度算符 ρ_F 的贡献，即

$$\delta\rho_F=\rho_F(t_0+T)-\rho_F(t_0) \tag{15.2}$$

拉姆学派的全量子理论的重要任务就是先计算出 $\delta\rho_F$. 但是，由于光场与原子有相互作用(而不是互相独立的)，必须把原子与光场看成一个整体系统，该系统的总的密度算符是 ρ_{F-A}. 怎样由 ρ_{F-A} 计算 ρ_F 呢？这就需要下面的约化算符方法.

15.1.2 约化算符

我们研究激光器，感兴趣的是激光场与原子的作用. 在激光场与原子这两方面，我们最关心的是激光场的变化(有时也可能最关心原子). 这就是说要抓住主要矛盾的主要方面. 在统计物理和量子统计中，采用约化算符的方法就是为了研究问题时抓住主要的方面.

在经典统计中，考虑两个系统 A 和 B. A 和 B 作为一个整体的密度矩阵是

$$\rho_{AB}=\rho(q_A,p_A,q_B,p_B) \tag{15.3}$$

与两个系统都有关的物理量的统计平均是

$$\bar{O}=\int \rho_{AB}O\mathrm{d}q_A\mathrm{d}p_A\mathrm{d}q_B\mathrm{d}p_B \tag{15.4}$$

特别是当物理量 O_A 只对我们感兴趣的系统 A 有关，与 B 无关，则其统计平均值变为

$$\begin{aligned}\bar{O}_A&=\int \rho_{AB}O_A\mathrm{d}q_B\mathrm{d}p_B\mathrm{d}q_A\mathrm{d}p_A\\&=\int(\rho_{AB}\mathrm{d}q_B\mathrm{d}p_B)O_A\mathrm{d}q_A\mathrm{d}p_A\\&=\int\rho_A(q_A,p_A)O_A\mathrm{d}q_A\mathrm{d}p_A\end{aligned} \tag{15.5}$$

其中 $\rho_A(q_A,p_A)$ 是只与系统 A 有关的几率密度（与 B 的变量无关），即

$$\rho_A(q_A,p_A)=\int\rho_{AB}(q_A,p_A,q_B,p_B)\mathrm{d}q_A\mathrm{d}q_B$$

与此相似，在量子统计中，把系统 A 和 B 看成一个整体时，其密度算符是

$$\rho_{AB}=\rho_{\alpha\beta,\alpha'\beta'}$$

其中 α 和 α' 只与系统 A 有关，β 和 β' 只与系统 B 有关.

如果我们感兴趣的算符 O_A 只与系统 A 的变量 α 和 α' 有关，算符 O_{AB} 可看成 O_A 与系统 B 的单位算符的直接积

$$O_A\otimes I_B=O_{\alpha,\alpha'}\delta_{\beta,\beta'} \tag{15.6}$$

因此 O_A 的期待值变为

$$\begin{aligned}\langle O_A\rangle&=\mathrm{tr}(\rho_{AB}O_A\otimes I_B)=\sum_{\alpha,\alpha'}\sum_{\beta,\beta'}\rho_{\alpha\beta,\alpha'\beta'}O_{\alpha\alpha'}\delta_{\beta\beta'}\\&=\sum_{\alpha,\alpha'}O_{\alpha\alpha'}\sum_{\beta,\beta'}\rho_{\alpha\beta,\alpha'\beta'}\delta_{\beta\beta'}=\sum_{\alpha,\alpha'}O_{\alpha\alpha'}(\rho_A)_{\alpha\alpha'}\\&=\mathrm{tr}_A(\rho_AO_A)\end{aligned} \tag{15.7}$$

其中 $(\rho_A)_{\alpha\alpha'}=\sum_\beta\rho_{\alpha\beta,\alpha'\beta}=(\mathrm{tr}_B\rho_{AB})_{\alpha\alpha'}$，所以有

$$\rho_A=\mathrm{tr}_B(\rho_{AB}) \tag{15.8}$$

符号 ρ_A 表示 ρ_{AB} 中只与系统 A 有关的信息，ρ_A 就称为约化算符.

当然，如果系统 A 和 B 是独立的，则

$$\rho_{AB}=\rho_A\rho_B \tag{15.9}$$

$$\langle O_AO_B\rangle=\langle O_A\rangle\langle O_B\rangle \tag{15.10}$$

其中 O_A 只与 A 有关，O_B 只与 B 有关.

一般情况（包括激光器），即使在初始时刻 $t=0$ 时 A 和 B 是独立的，

由于 A 和 B 的作用(在 $t=0$ 时开始作用),到稍后的时刻 t,系统 A 和 B 也要耦合在一起,这时

$$\rho_A = \int \rho_{AB}(q_A, p_A, q_B, p_B)\mathrm{d}q_B\mathrm{d}p_B \tag{15.11}$$

由于对 B 的变量积分了,ρ_A 就不再包含 B 系统的任何信息,即损失了信息,而损失信息的原因则在于并不测量系统 B 的演化.

在激光的全量子理论中,用约化算符可以处理的问题包括:

(1) 在研究原子与场组成的系统与库的作用时,先对库的变量求迹,即用约化算符法消去库变量.

(2) 在激光场与原子的作用中,我们只对激光场感兴趣,而不管原子怎样演化.这样,首先考虑激光场与原子的总的密度算符 ρ_{FA},然后对原子变量求迹,即可得到激光场本身的密度算符

$$\rho_F = \mathrm{tr}_A(\rho_{FA}) \tag{15.12}$$

(3) 当然,在激光与原子(或其他介质)作用时,如果我们最关心的是原子(例如电离的原子数,分离的同位素原子数),则需先对光场的变量求迹

$$\rho_A = \mathrm{tr}_F(\rho_{FA}) \tag{15.13}$$

我们将在以下两节中用约化算符方法求激光场的变化,那时将清楚地看到对原子的变量求迹的具体方法.

15.2 激光器全量子的四级微扰计算及功率特性

在本节中,首先求ρ_{FA}的微扰解,然后用约化算符法求出 ρ_F 的运动方程,最后讨论激光器的阈值和功率特性,并与半经典理论的结果进行比较.

15.2.1 场与原子的密度算符 ρ_{FA} 的微扰解

在旋转波近似下,利用相互作用表象,则相互作用哈密顿量是

$$V^{(I)} = \hbar g(\sigma^+ a + \sigma a^+)\hbar g = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a^+ & 0 \end{pmatrix} \tag{15.14}$$

在拉姆学派的理论中,用相互作用表象的 V,略去表示相互作用表象的上标"I".

在(15.14)式中,$g\sigma^+ a$ 代表原子从低能态$|b\rangle$跃迁到高能态$|a\rangle$同时吸收一个光子,$g\sigma a^+$代表原子从$|a\rangle$跃迁到$|b\rangle$,同时发射一个光子.

在相互作用表象中,算符的运动方程是

$$\dot{\rho}_{FA} = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[V, \rho_{FA}] \tag{15.15}$$

令初始条件是 $\rho_{FA}(t_0)$，则(10.15)的形式解是

$$\rho_{FA}(t)=\rho_{FA}(t_0)-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}[V(t'),\rho_{FA}(t')]dt' \tag{15.16}$$

由于在初始时刻 t_0 原子与场是无关的，所以

$$\rho_{FA}(t_0)=\rho_F(t_0)\rho_A(t_0)\equiv\rho_0\rho_A(t_0) \tag{15.17}$$

$$\rho_0\equiv\rho_F(t_0) \tag{15.18}$$

为计算增益，假设原子在初始时刻 t_0 是处于高能态，即

$$\rho_A(t_0)=|a\rangle\langle a|=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} \tag{15.19}$$

所以(15.17)变为

$$\rho_{FA}(t_0)=\begin{pmatrix}\rho_0&0\\0&0\end{pmatrix} \tag{15.20}$$

利用初始条件 $\rho_{FA}(t_0)$，用微扰论可解方程(15.16)，

$$\rho_{FA}(t)=\rho_{FA}^{(0)}(t)+\rho_{FA}^{(1)}(t)+\rho_{FA}^{(2)}(t)+\cdots+\rho_{FA}^{(n)}(t) \tag{15.21}$$

$$\rho_{FA}^{(0)}(t)=\rho_{FA}(t_0)=\begin{pmatrix}\rho_0&0\\0&0\end{pmatrix} \tag{15.22}$$

$$\rho_{FA}^{(n+1)}(t)=\left(-\frac{i}{\hbar}\right)\int_{t_0}^{t}[V(t'),\rho_{FA}^{(n)}(t')]dt' \tag{15.23}$$

其中 $n=0,1,2,\cdots$

将(15.14)的 V 和(15.20)的 $\rho_{FA}(t_0)$ 代入(15.23)，

$$\begin{aligned}\rho_{FA}^{(1)}(t)&=ig-\int_{t_0}^{t}\left[\begin{pmatrix}0&a\\a^+&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\rho_0&0\\0&0\end{pmatrix}\right]dt'\\&=-ig(t-t_0)\begin{pmatrix}0&-\rho_0 a\\a^+\rho&0\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{15.24}$$

其中考虑到 ρ_0,a,a^+ 都与 t 无关. 再考虑到

$$(t-t_0)=(t_0+T)-t_0=T \tag{15.25}$$

$$\rho_{FA}^{(1)}=-igT\begin{pmatrix}0&-\rho_0 a\\a^+\rho&0\end{pmatrix} \tag{15.26}$$

将 $\rho_{FA}^{(1)}$ 代入迭代公式(15.23)，则

$$\rho_{FA}^{(2)}=(-ig)^2T^2\begin{pmatrix}(aa^+\rho_0+\rho_0aa^+)&0\\0&-2a^+\rho_0a\end{pmatrix} \tag{15.27}$$

类似地可得到 $\rho_{FA}^{(3)},\rho_{FA}^{(4)}$：

$$\rho_{FA}^{(3)}=(-ig)^3T^3\begin{pmatrix}0&(-\rho_0aa^+a-3aa^+\rho_0a)\\(a^+aa^+\rho_0+3a^+\rho_0aa^+)&0\end{pmatrix} \tag{15.28}$$

$$\rho_{FA}^{(4)}=(-ig)^4T^4$$
$$\times\begin{pmatrix}(aa^+aa^+\rho_0+6aa^+\rho_0aa^++\rho_0aa^+aa^+) & 0\\ 0 & (-4a^+\rho_0aa^+a-4a^+aa^+\rho_0a)\end{pmatrix} \tag{15.29}$$

下边用约化算符法求 ρ_F. 这里要特别注意，$\rho_{FA}^{(0)}$，$\rho_{FA}^{(1)}$，…，$\rho_{FA}^{(4)}$ 之所以是矩阵形式，完全是由于原子的密度矩阵 $\rho_0(t_0)$ 引入的. 场的量是用算符表示的，原子的量是用矩阵表示的. 因此，将 $\rho_{FA}^{(n)}$ 对原子变量求迹，就是将 $\rho_{FA}=\rho_{FA}^{(1)}+\rho_{FA}^{(2)}+\cdots$ 求对角元之和.

由于一个原子对增益的贡献是

$$\delta\rho_F=\mathrm{tr}_A[\rho_{FA}(t_0+T)]-\mathrm{tr}_A[\rho_{FA}(t_0)] \tag{15.30}$$

则四级微扰的结果是

$$\begin{aligned}(\delta\rho_F)_{增益}=&-g^2T^2(aa^+\rho_0+\rho_0aa^+-2a^+\rho_0a)\\&+g^4T^4(aa^+aa^+\rho_0+6aa^+\rho_0aa^+\\&+\rho_0aa^+aa^+-4a^+\rho_0aa^+a-4a^+aa^+\rho_0a)\end{aligned} \tag{15.31}$$

用同样的方法还可以计算耗散原子引起的损耗，这时初始条件是原子在下能态 $|b\rangle$，即

$$\rho_A(t_0)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \tag{15.32}$$

由于已假定场的耗散的库非常大，没饱和，只需计算到二级（光场的二次方，即光强的一次方）：

$$(\delta\rho_F)_{损耗}=-g^2T^2(a^+a\rho_0+\rho_0a^+a-2a\rho_0a^+) \tag{15.33}$$

15.2.2 约化算符的运动方程

现在利用绝热近似，即在原子的寿命 T 内，光场几乎没有变化，所以

$$\rho_F(t)\approx\rho_F(t_0)=\rho_0,\quad t_0\leqslant t\leqslant t_0+T \tag{15.34}$$

因此，在 $(\delta\rho_F)_{增益}$ 和 $(\delta\rho_F)_{损耗}$ 的表达式中的 ρ_0 可换成 $\rho_F(t)$.

我们考虑在时间 Δt 内的增益和损耗，这里

$$T\leqslant\Delta t\leqslant\tau_f \tag{15.35}$$

这里的 τ_f 是光场发生显著变化的时间，τ_f 对应于半经典理论中的光场指数上升时间，$\tau_f\approx10^{-6}$ s.

定义 r_a 代表单位时间内上能级粒子数增加的数目，则在 Δt 内

$$r_a\Delta t=\lambda_aV_c\Delta t \tag{15.36}$$

其中 V_c 是激光介质的体积. 这些原子对增益（用下角标 G 表示）的总贡献是

$$(\Delta\rho_F)_G=r_a\Delta t(\delta\rho_F)G \tag{15.37}$$

单位时间内 ρ_F 的变化是

$$\left(\frac{d\rho_F}{dt}\right)_G=\left(\frac{\Delta\rho_F}{\Delta t}\right)_G=r_a(\delta\rho_F)_G$$

$$=-\frac{A}{2}(aa^+\rho_F+\rho_F a^+a-2a^+\rho_F a)$$

$$+\frac{B}{8}(aa^+aa^+\rho_F+6aa^+\rho_F aa^++\rho_F aa^+aa^+$$

$$-4a^+\rho_F aa^+a-4a^+a\rho_F a) \tag{15.38}$$

$$A=2r_a g^2T^2 \tag{15.39}$$

$$B=8r_a g^4T^4 \tag{15.40}$$

$$\left(\frac{d\rho_F}{dt}\right)_1=-\frac{C}{2}(a^+a\rho_F+\rho_F a^+a-2a\rho_F a^+) \tag{15.41}$$

在(15.38)和(15.41)式中，已用绝热近似将原来的 ρ_0 换成 ρ_F，见(15.34)式. 我们将证明，C 就代表损耗，即

$$C=\omega/Q \tag{15.42}$$

略去脚标 F，则 ρ 的净变化是

$$\frac{d\rho}{dt}=\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_G+\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_1=-\frac{A}{2}(aa^+\rho+\rho aa^+-2a^+\rho a)$$

$$+\frac{B}{8}(aa^+aa^+\rho+6aa^+\rho aa^++\rho aa^+aa^+-4a^+\rho aa^+a$$

$$-4a^+aa^+\rho a)-\frac{C}{2}(a^+a\rho+\rho a^+a-2a\rho a^+) \tag{15.43}$$

将(15.43)式写到光子数表象中，则

$$\dot\rho_{nn}=-\frac{A}{2}\langle n|(aa^+\rho+\rho aa^+-2a^+\rho a)|n\rangle$$

$$+\frac{B}{8}\langle n|(aa^+aa^+\rho+6aa^+\rho aa^++\rho aa^+aa^+-4a^+\rho aa^+a$$

$$-4a^+aa^+\rho a)|n\rangle-\frac{C}{2}\langle n|(a^+a\rho+\rho a^+a-2a\rho a^+)|n\rangle \tag{15.44}$$

利用对易关系 $[a,a^+]=1$，以及如下的关系

$$\langle n\mid aa^+=(aa^+\mid n\rangle)^+,\quad \sum_{n'}|n'\rangle\langle n'|=1 \tag{15.45}$$

则可求出(15.44)式中的各项，例如

$$\left.\begin{aligned}\langle n|aa^+\rho|n\rangle&=(aa^+|n\rangle)^+\rho|n\rangle=(n+1)\langle n|\rho|n\rangle=(n+1)\rho_{nn}\\ \langle n|a^+\rho a|n\rangle&=(a|n\rangle)^+\rho a|n\rangle=\sqrt{n}\langle n-1|\rho|\sqrt{n}|n-1\rangle=n\rho_{n-1,n-1}\\ \langle n|a^+\rho aa^+a|n\rangle&=\langle n|a^+\rho an|n\rangle=n\langle n|a^+\rho a|n\rangle=n^2\rho_{n-1,n-1}\end{aligned}\right\} \tag{15.46}$$

$$\dot\rho_{nn}=-A[(n+1)\rho_{nn}-n\rho_{n-1,n-1}]$$

$$+\frac{B}{4}[(n+1)^2\rho_{nn}+3(n+1)^2\rho_{nn}-4n^2\rho_{n-1,n-1}]$$

$$-\frac{\omega}{Q}[n\rho_{nn}-(n+1)\rho_{n+1,n+1}]$$

$$=-[A-(n+1)B](n+1)\rho_{nn}+(A-nB)n\rho_{n-1,n-1}$$

$$-\frac{\omega}{Q}n\rho_{nn}+\frac{\omega}{Q}(n+1)\rho_{n+1,n+1} \tag{15.47}$$

利用如下的关系式

$$\left.\begin{aligned}\langle n\rangle &= \sum_{n=0} n\rho_{nn}\\ \langle n^2\rangle &= \sum_{n=0} n^2\rho_{nn}\\ \sum_{n=0}\rho_{nn} &= 1\end{aligned}\right\} \tag{15.48}$$

可以由(15.47)式得到平均光子数的方程

$$\frac{\mathrm{d}\langle n\rangle}{\mathrm{d}t}=\sum_{n=0} n\dot{\rho}_{nn}$$

$$=-\sum_{n=0}[A-(n+1)B]n(n+1)\rho_{nn}+\sum_{n=0}[A-nB]n^2\rho_{n-1,n-1}$$

$$-\frac{\omega}{Q}\sum_{n=0}n^2\rho_{nn}+\frac{\omega}{Q}\sum_{n=0}n(n+1)\rho_{n+1,n+1}$$

$$=-\sum_{n=0}[A-(n+1)B]n(n+1)$$

$$+\sum_{m=0}[A-(m+1)B](m+1)^2\rho_{mm}$$

$$-\frac{\omega}{Q}\langle n\rangle^2+\frac{\omega}{Q}\sum_{m=1}(m-1)m\rho_{mm}$$

$$=\sum_{n=0}[A-(n+1)B](n+1)\rho_{nn}-\frac{\omega}{Q}\langle n\rangle^2+\frac{\omega}{Q}\sum_{m=0}(m-1)m\rho_{mm}$$

$$=\left(A-\frac{\omega}{Q}\right)\langle n\rangle+A-B[\langle n\rangle^2+2\langle n\rangle+1] \tag{15.49}$$

(1) 当$\langle n\rangle\gg 1$时,(15.49)与半经典理论公式一样,光子数的方程为

$$\langle\dot{n}\rangle=\left(A-\frac{\omega}{Q}\right)\langle n\rangle-B\langle n\rangle^2 \tag{15.50}$$

(2) 定态时$\langle\dot{n}\rangle=0$,定态输出为

$$\langle n\rangle=\frac{(A-\omega/Q)}{B} \tag{15.51}$$

(3) 含 B 的项代表增益饱和,B 是自饱和参数

(4) $A=\omega/Q$ 就是阈值条件,考虑到

$$2g^2=2\frac{\mu^2}{\hbar^2}\mathscr{E}^2\sin^2 kz=\frac{\mu^2}{\hbar^2}\frac{\hbar\Omega}{\varepsilon_0 V}$$

$$A=2r_a(g^2T^2)=\omega/Q$$

$$\left(\frac{r_a}{V}T\right)_c=(\lambda_aT)_c=\bar{N}_c=\frac{\varepsilon_0\hbar}{\mu^2QT} \tag{15.52}$$

与半经典理论的阈值公式一样.

(5) $\langle n\rangle$较小时,没有饱和,特别当$\langle n\rangle=0$时

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle n\rangle=A \tag{15.53}$$

因此A与自发辐射有关.这说明即使在初始时刻$\langle n\rangle=0$,也可由于自然辐射而导致激光器的起始振荡.这是半经典理论不能解释的.

(6) 由(15.49)式中可知,受激辐射速率是$A\langle n\rangle$,自发辐射速率是A.因此,$\langle n\rangle=1$时,受激辐射速率等于自发辐射速率.

最后应指出,由于本节采用微扰计算,当光强很强时,本节的结果就不准确了.

如果与半经典理论对比,那里曾用展开式$\frac{1}{1+R/R_s}\approx1-R/R_s$,(15.47)式就相当于展开为$\left(1-\frac{R}{R_s}\right)$,这样,在光强较强时,预期的$\rho_{nn}$的方程变为

$$\dot{\rho}_{nn}=-\left[\frac{(n+1)A}{1+(n+1)B/A}\right]\rho_{nn}+\frac{nA}{1+nB/A}\rho_{n-1,n-1}$$

$$-\frac{\omega}{Q}n\rho_{nn}+\frac{\omega}{Q}(n+1)\rho_{n+1,n+1} \tag{15.54}$$

显然将(15.54)分母展开,又变为(15.47)式.

在下节中将给出(15.54)的推导,然后将用(15.47)式研究阈值附近的光子统计问题、激光线宽问题,并用相干态表示将(15.43)式变为福克-普朗克方程.(15.54)式则用于研究远高于阈值时的光子统计问题.

15.3 激光器全量子理论的强信号理论

本节推导场算符的方程的严格表达式,即强信号理论.这里采用的求约化算符的方法与上节不同,上节是用$\rho_F=\mathrm{tr}_A(\rho_{FA})$,这里我们引入如下形式的态矢量

$$|\psi_{FA}(t+\tau)\rangle=\sum_n C_{a,n}(t+\tau)|a\rangle|n\rangle+C_{b,n+1}|b\rangle|n+1\rangle \tag{15.55}$$

求出$C_{a,n}$,$C_{b,n+1}$,则可得到场的约化算符

$$\rho_{n,m}=\sum_\psi P_\psi C_n(t)C_m^*(t) \tag{15.56}$$

为了计算 $C_n(t)$,$C_m(t)$,我们先考虑一个原子的贡献,再考虑总原子数的贡献.

若仍假定一个原子在时间 τ 内完成对场的贡献并离开谐振腔,在时间 τ 内,由于一个原子引起的场的算符的变化是

$$\delta\rho_{nm}^{(\tau)}(t)=\rho_{an,am}(t+\tau)+\rho_{bm,bm}(t+\tau)-\rho_{nm}(t) \tag{15.57}$$

其中右边第一、二项分别表示上、下能级原子的影响(这里是指一个原子在上、下能级有一定的几率).

在时间 Δt 内,注入的原子数是 $r\Delta t$,

$$\Delta\rho_{nm}^{(\tau)}(t)=(r\Delta t)\delta\rho_{nm}^{(\tau)}(t) \tag{15.58}$$

单位时间的变化是

$$\frac{\Delta\rho_{nm}^{(\tau)}(t)}{\Delta t}=r\delta\rho_{nm}^{(\tau)}(t) \tag{15.59}$$

以上曾假定每一个原子存在的时间是 τ,然后离开谐振腔.然而,从 $t\to(t+\tau)$,原子因自发辐射而衰减,若原子的自发辐射寿命是 $1/\gamma$,则衰减因子是 $\exp(-\gamma t)$,平均起来单位时间的衰减是

$$\frac{1}{(1/\gamma)}\exp(-\gamma\tau)=\gamma\exp(-\gamma\tau) \tag{15.60}$$

这里 $\gamma=\gamma_a=\gamma_b$.因此,在 $t\to(t+\tau)$ 内,场算符的平均变化是

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_{nm}\simeq\frac{\Delta\rho_{nm}(t)}{\Delta t}=r\int_0^\infty\gamma\exp(-\gamma\tau)\{&\rho_{an,am}(t+\tau)\\&+\rho_{an,bm}(t+\tau)-\rho_{nm}(t)\}\mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{15.61}$$

假设在初始时刻原子在上能态 $|a\rangle$,则原子与场的态矢量是

$$|\psi_{FA}(t)\rangle=|a\rangle|\psi(t)\rangle \tag{15.62}$$

在光场与二能级原子作用时,只有两种情况:

(1) 光子数是 n,原子在激发态 $|a\rangle$,混合态记为 $|a\rangle|n\rangle$;

(2) 原子从激发态跃迁到下能态 $|b\rangle$,光子数增加一个变为 $n+1$,这个混合态记为 $|b\rangle|n+1\rangle$.

虽然在起始时刻,原子与场的态矢量是独立的,一旦开始发生作用,原子与场的态矢量就应是 $|a\rangle|n\rangle$ 与 $|b\rangle|n+1\rangle$ 的线性叠加.

$$\begin{aligned}|\psi_{FA}(t+\tau)\rangle=\sum_n\{&C_{an}(t+\tau)|a\rangle|n\rangle\\&+C_{b,n+1}(t+\tau)|b\rangle|n+1\rangle\}\end{aligned} \tag{15.63}$$

其中 C_{an},$C_{a,n+1}$ 分别代表几率振幅.

在初始时刻原子在上能级,$C_a=1$,$C_b=0$

$$\left.\begin{aligned}C_{an}(t)=C_a(t)C_n(t)=C_n(t)\\C_{b,n+1}(t)=C_b(t)C_{n+1}(t)=0\end{aligned}\right\} \tag{15.64}$$

由薛定谔方程

$$|\dot{\psi}\rangle=-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}V|\psi(t)\rangle \tag{15.65}$$

可得到共振条件下的方程，见(14.1.4)节

$$\dot{C}_{an}(t)=-\mathrm{i}g\sqrt{n+1}C_{b,n+1}(t) \tag{15.66}$$

$$\dot{C}_{b,n+1}(t)=-\mathrm{i}g\sqrt{n+1}C_{a,n}(t) \tag{15.67}$$

$$\ddot{C}_{an}=-\mathrm{i}g\sqrt{n+1}\dot{C}_{b,n+1}(t)=-g^2\sqrt{n+1}C_{an}(t) \tag{15.68}$$

再考虑到初始条件(15.64)，由(15.66)，(15.68)，有

$$C_{an}(t+\tau)=C_a(t)\cos\left(g\tau\sqrt{n+1}\right) \tag{15.69}$$

$$C_{b,n+1}(t+\tau)=-\mathrm{i}C_n(t)\sin\left(g\tau\sqrt{n+1}\right) \tag{15.70}$$

$$C_{bm}(t+\tau)=-\mathrm{i}C_{m-1}(t)\sin\left(g\tau\sqrt{m}\right) \tag{15.71}$$

由混合系综的密度算符的定义

$$\begin{aligned}\rho_{an,am}(t+\tau)&=\sum_{\psi}P_{\psi}C_{an}(t+\tau)C_{am}^{*}(t+\tau)\\&=\sum_{\psi}P_{\psi}C_n(t)C_m^{*}(t)\cos\left(g\tau\sqrt{n+1}\right)\cos\left(g\tau\sqrt{m+1}\right)\\&=\rho_{nm}(t)\cos\left(g\tau\sqrt{n+1}\right)\cos\left(g\tau\sqrt{m+1}\right)\end{aligned} \tag{15.72}$$

$$\begin{aligned}\rho_{bn,bm}(t+^{*}\tau)&=\sum_{\psi}P_{\psi}C_{bn}(t+\tau)C_{bm}^{*}(t+\tau)\\&=\sum_{\psi}P_{\psi}C_{n-1}(t)C_{m-1}(t)\sin\left(g\tau\sqrt{n}\right)\sin\left(g\tau\sqrt{m}\right)\\&=\rho_{n-1,m-1}(t)\sin\left(g\tau\sqrt{n}\right)\sin\left(g\tau\sqrt{m}\right)\end{aligned} \tag{15.73}$$

将 $\rho_{an,am}$，$\rho_{bn,bm}$ 代入 $\dot{\rho}_{nm}$ 的公式(15.61)，则

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_{nm}(t)=&-r_a\rho_{nm}(t)\\&+\gamma r_a\int_0^{\infty}\exp(-\gamma t)\rho_{nm}(t)\cos\left(g\tau\sqrt{n+1}\right)\cos\left(g\tau\sqrt{m+1}\right)\mathrm{d}\tau\\&+\gamma r_a\int_0^{\infty}\exp(-\gamma t)\rho_{n-1,m-1}\sin\left(g\tau\sqrt{n}\right)\sin\left(g\tau\sqrt{m}\right)\mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{15.74}$$

利用非常重要的绝热近似，即在原子演化的时间内，场算符 ρ_{nm} 和 $\rho_{n-1,m-1}$ 可看成常数，从积分中提出

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_{nm}(t)=&-r_a\rho_{nm}(t)\\&+\gamma r_a\rho_{nm}\int_0^{\infty}\exp(-\gamma t)\cos\left(g\tau\sqrt{n+1}\right)\cos\left(g\tau\sqrt{m+1}\right)\mathrm{d}\tau\\&+\gamma r_a\rho_{n-1,m-1}\int_0^{\infty}\exp(-\gamma t)\sin\left(g\tau\sqrt{n}\right)\sin\left(g\tau\sqrt{m}\right)\mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{15.75}$$

将上式中正弦函数和余弦函数写成指数形式

$$\cos\left(g\tau\sqrt{n+1}\right)=\frac{1}{2}\left[\exp\left(\mathrm{i}g\tau\sqrt{n+1}\right)+\exp\left(-\mathrm{i}g\tau\sqrt{n+1}\right)\right]$$

$$\sin\left(g\tau\sqrt{m}\right)=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\exp\left(\mathrm{i}g\tau\sqrt{m}\right)-\exp\left(-\mathrm{i}g\tau\sqrt{m}\right)\right]$$

则(15.75)式中的第2项和第3项分别变为

$$\begin{aligned}&\gamma\int_0^\infty \exp\left(-\gamma\tau\right)\cos\left(g\tau\sqrt{n+1}\right)\cos\left(g\tau\sqrt{m+1}\right)\mathrm{d}\tau\\&=\frac{1}{4}\gamma\int_0^\infty\left\{\exp\left[-\gamma\tau-\mathrm{i}g\tau(\sqrt{n+1}-\sqrt{m+1})\right]\right.\\&\quad\left.+\exp\left[-\gamma\tau-\mathrm{i}g\tau(\sqrt{n+1}+\sqrt{m+1})\right]\right\}\mathrm{d}\tau+\text{c. c.}\\&=\frac{1+(g/\gamma)^2(n+1+m+1)}{1+2\,(g/\gamma)^2(n+1+m+1)+(g/\gamma)^4\,(n-m)^2}\end{aligned}\tag{15.76}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \exp\left(-\gamma\tau\right)\sin\left(g\tau\sqrt{n+1}\right)\sin\left(g\tau\sqrt{m+1}\right)\mathrm{d}\tau\\&=\frac{2\,(g/\gamma)^2\left[(m+1)(n+1)\right]^{1/2}}{1+2\,(g/\gamma)^2(n+1+m+1)+(g/\gamma)^4\,(n-m)^2}\end{aligned}\tag{15.77}$$

将(15.76)、(15.77)式代入(15.75)式,则

$$\dot{\rho}_{nm}=-\left(\frac{N'_{nm}A}{1+N_{nm}B/A}\right)\rho_{nm}+\left(\frac{\sqrt{nm}A}{1+N_{n-1,m-1}B/A}\right)\rho_{n-1,m-1}\,.\tag{15.78}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}A&=2r_a(g/\gamma)^2\\B&=8r_a(g/\gamma)^4\end{aligned}\right\}\tag{15.79}$$

$$N_{nm}=\frac{1}{2}(n+1+m+1)+\frac{1}{8}\frac{(n-m)^2B}{A}\tag{15.80}$$

$$N_{nm}=\frac{1}{2}(n+1+m+1)+\frac{1}{16}\frac{(n-m)^2B}{A}\tag{15.81}$$

与上节相似,再考虑到损耗$\frac{\omega}{Q}$,则

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_{nm}=&-\left(\frac{N'_{nm}A}{1+N_{nm}B/A}\right)\rho_{nm}+\left(\frac{\sqrt{nm}A}{1+N_{n-1,m-1}B/A}\right)\rho_{n-1,m-1}\\&-\frac{1}{2}\frac{\omega}{Q}(n+m)\rho_{nm}+\frac{\omega}{Q}\left[(n+1)(m+1)\right]^{1/2}\rho_{n+1,m+1}\end{aligned}\tag{15.82}$$

当$n=m$时,$N'_{nm}=N_{nm}=n+1$,(15.82)变为

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_{nn}(t)=&-\left(\frac{(n+1)A}{1+(n+1)B/A}\right)\rho_{nn}(t)\\&+\left(\frac{nA}{1+nB/A}\right)\rho_{n-1,n-1}(t)-\frac{\omega}{Q}n\rho_{nn}+\frac{\omega}{Q}(n+1)\rho_{n+1,n+1}(t)\end{aligned}\tag{15.83}$$

这是光子密度算符的强信号理论. 当 $nB/A \ll 1$ 时,(15.83)式变为

$$\dot{\rho}_{nn} \approx -[A-(n+1)B](n+1)\rho_{nn} + (A-nB)n\rho_{n-1,n-1} - \frac{\omega}{Q}n\rho_{nn} + \frac{\omega}{Q}(n+1)\rho_{n+1,n+1} \tag{15.84}$$

这与四级微扰的结果一样.

在以下两节,我们将用$\dot{\rho}_{nn}$的方程讨论激光器的光子统计,用 ρ_{nm} 讨论激光的线宽.

15.4 激光的光子统计

激光的全量子理论的重要任务之一就是研究光子统计性质. 激光与热光源的光子统计性质根本不同. 本节首先研究在阈值附近的光子统计,以及远高于阈值时的光子统计,然后计算阈值以下、阈值以上和远高于阈值三种情况的光子数均方差,最后讨论激光器因真空起伏而起振的问题.

15.4.1 阈值附近的光子统计

为讨论阈值附近的光子统计,用四级微扰的光子算符方程就可以了. 由(15.47)式或(15.84)式

$$\dot{\rho}_{nn} = -[A-(n+1)B](n+1)\rho_{nn} + (A-nB)n\rho_{n-1,n-1} - \frac{\omega}{Q}n\rho_{nn} + \frac{\omega}{Q}(n+1)\rho_{n+1,n+1} \tag{15.85}$$

该方程中各项的物理意义见图 15.3. 例如在 n 与$(n-1)$之间,$(\omega/Q)n\rho_{nn}$是损耗,表示"损耗原子"吸收光子从$|n\rangle$至$|n-1\rangle$的流,它等于速率(ω/Q)乘光子数 n,再乘存在 n 个光子的几率 ρ_{nn}. $[A-B(n+1)](n+1)\rho_{nn}$表示处于上能态$|a\rangle$的活性原子因为发射光子,使得光子数态从$|n\rangle$变到$|n+1\rangle$.

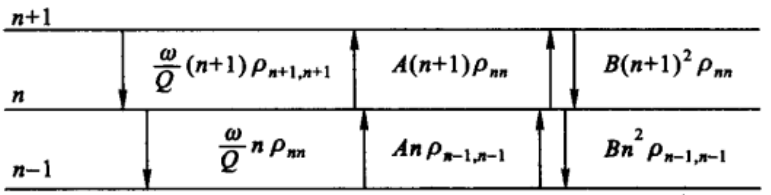


图 15.3 光子速率方程所代表的几率流

在稳态条件下,$\dot{\rho}_{nn}=0$. 这时态$|n\rangle$与$|n-1\rangle$之间的几率流为零,所以

$$\frac{\omega}{Q}n\rho_{nn} - (A-nB)n\rho_{n-1,n-1} = 0 \tag{15.86}$$

$$\rho_{nn} = \frac{A-nB}{\omega/Q}\rho_{n-1,n-1} \tag{15.87}$$

由于$|n\rangle$与$|n+1\rangle$之间的几率流为零，也可得到同样结果. 这种情况称为细致平衡. 显然激光是非平衡辐射，但相邻的光子态之间的流却是平衡的. 由(15.87)式，任意光子数 n 的几率 ρ_{nn} 都可用 ρ_{00} 表示出来，例如

$$\rho_{11}=\frac{A-B}{(\omega/Q)}\rho_{00} \tag{15.88}$$

$$\rho_{22}=\frac{A-2B}{\omega/Q}\rho_{11}=\left(\frac{A-2B}{\omega/Q}\right)\left(\frac{A-B}{\omega/Q}\right)\rho_{00} \tag{15.89}$$

由此得到一般的表达式

$$\rho_{nn}=\rho_{00}\prod_{k=1}^{n}\frac{A-Bk}{\omega/Q} \tag{15.90}$$

由总几率为 1，可求出 ρ_{00}

$$\begin{aligned}1&=\sum_{n=0}^{\infty}\rho_{nn}=\rho_{00}+\rho_{00}\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{A-Bk}{\omega/Q}\\ \rho_{00}&=\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{A-Bk}{\omega/Q}\right]^{-1}\end{aligned} \tag{15.91}$$

ρ_{00} 起着归一化常数的作用，记为 N_p，则

$$\rho_{nn}=N_p\prod_{k=1}^{n}\frac{A-Bk}{\omega/Q} \tag{15.92}$$

(15.92)式表明 ρ_{nn} 是 $(n+1)$ 个因子 $(A-Bk)/C$ 相乘 $(C\equiv\omega/Q)$，可以求出这个因子等于 1 时对应的光子数. 令

$$\frac{A-Bk}{\omega/Q}=1 \tag{15.93}$$

由(15.93)式得到

$$\bar{n}=k=\frac{A-C}{B} \tag{15.94}$$

(1) 低于阈值时 $A<C, B=0$. 有

$$\frac{A-Bk}{C}=\frac{A}{C}<1 \tag{15.95}$$

$$\rho_{nn}=N_p\prod_{k=1}^{n}(A/C)^n \tag{15.96}$$

由于 $(A/C)<1, n>0$ 时，ρ_{nn} 迅速下降，$n=0$ 时，ρ_{00} 达到峰值，图 15.4(a) 所示. 这与热辐射的光子分布一样.

(2) 等于阈值时 $A=C$. 由(15.94)式得到

$$\bar{n}=0 \tag{15.97}$$

对于任何的 $k>0$，都有

$$\frac{A-Bk}{C}=1-\frac{B}{A}k<1 \tag{15.98}$$

由于 $B\ll A$，ρ_{nn} 随 n 迅速下降. ρ_{nn} 的峰值在 $\bar{n}=0$，ρ_{nn} 的最可几分布在 ρ_{00}，但

是与阈值以下的情况比较，在 $A=C$ 时，ρ_{nn} 下降较慢，如图 15.4(b)所示，有

(1) $k<\bar{n}$，$\dfrac{A-Bk}{C}>1$，ρ_{nn} 随 n 上升；

(2) $k=\bar{n}$，$\dfrac{A-Bk}{C}=1$，ρ_{nn} 到峰值；

(3) $k>\bar{n}$，$\dfrac{A-Bk}{C}<1$，ρ_{nn} 随 n 下降.

注意当激光器在阈值以上时，当$\langle n\rangle$较大时，定态的光子数为

$$\langle n\rangle\approx\frac{A-C}{B} \tag{15.99}$$

$$\langle n\rangle\approx\bar{n}=\frac{A-C}{B} \tag{15.100}$$

因此，当光子数 $n<\bar{n}$ 时，ρ_{nn} 随 n 上升. $n>\bar{n}$ 时，ρ_{nn} 随 n 下降. $n=\bar{n}$ 时，ρ_{nn} 到峰值 $\bar{n}$. 这个峰值 $\bar{n}\approx\langle n\rangle$. $n\gg\bar{n}$ 时，$(A-Bk)/C\ll1$，ρ_{nn} 趋于零. 如图 15.4(c)所示.

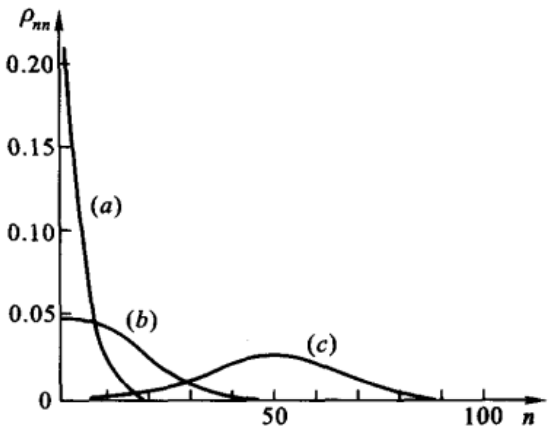


图 15.4 由(15.92)式计算的光子统计

(a)低于阈值 20% (b)在阈值 (c)高于阈值 20%

参数 B 的选择使$\langle n\rangle=50$

应该指出，当 $n=k>A/B$ 时

$$A-Bk<0$$

这样可使得 $\rho_{nn}<0$，这显然是不合理的. 其原因在于我们在这里用的是四级微扰的结果. 当光强较强，或者 n 很大时，四级微扰就不适用了. 下面看到，用严格的强信号的光子算符方程，将不会出现这种问题.

15.4.2 强信号理论的光子统计

应用强信号的光子算符方程(15.54)或(15.83)，在细致平衡条件下

$$\frac{\omega}{Q}n\rho_{nn}=\frac{nA}{1+nB/A}\rho_{n-1,n-1} \tag{15.101}$$

$$\rho_{nn}=\frac{A/(\omega/Q)}{1+nB/A}\rho_{n-1,n-1}=\frac{A^2/(B\omega/Q)}{(n+A/B)}\rho_{n-1,n-1} \tag{15.102}$$

$$\rho_{11}=\frac{A^2/(B\omega/Q)}{(A/B)}\rho_{00} \tag{15.103}$$

$$\rho_{nn}=\frac{[A^2/(B\omega/Q)]^n}{(n+A/B)!}\rho_{00}$$

$$=\frac{[A^2/(B\omega/Q)]^{(n+A/B)}}{(n+A/B)!}\rho_{00}[A^2/(B\omega/Q)]^{-A/B} \tag{15.104}$$

由归一化条件 $\sum_n \rho_{nn}=1$，

$$\rho_{00}^{-1}=\sum_{n=0}\frac{[A^2/(B\omega/Q)]^{(n+A/B)}}{[n+A/B]!}[A^2/(B\omega/Q)]^{-A/B} \tag{15.105}$$

引入归一化常数 N_s：

$$N_s=\rho_{00}[A^2/(B\omega/Q)]^{-A/B}$$

$$\rho_{nn}=N_s^{-1}\frac{[A^2/(B\omega/Q)]^{-A/B}}{[n+A/B]!} \tag{15.106}$$

由(15.106)可求出平均光子数. 特别注意，当激光器在远高于阈值时，

$$\rho_{00}\approx 0 \tag{15.107}$$

$$\begin{aligned}\langle n\rangle &= \sum_{n=0} n\rho_{nn}\approx\sum_{n=1} n\rho_{nn}\\ &=\sum_{n=1}\left(n+\frac{A}{B}-\frac{A}{B}\right)\rho_{nn}\\ &=N_s^{-1}\sum_{n=1}\left(n+\frac{A}{B}\right)\frac{[A^2/(B\omega/Q)]^{(n+A/B)}}{(n+A/B)!}-\frac{A}{B}\\ &=N_s^{-1}\sum_{n=1}\frac{[A^2/(B\omega/Q)]^{(n-1+A/B)}}{(n-1+A/B)!}A^2/(B\omega/Q)-\frac{A}{B}\end{aligned} \tag{15.108}$$

令 $m=n-1$，并注意 $\sum_{m=0}\rho_{mm}=1$，则

$$\langle n\rangle=A^2/(B\omega/Q)-\frac{A}{B}=\frac{A}{(\omega/Q)}\frac{A-\omega/Q}{B} \tag{15.109}$$

图 15.5 所示表示激光的光子统计(15.106)式与相干态的泊松分布的比较. 显然，激光的光子分布比相干态的光子分布宽得多

当激光器远高于阈值时，$A\gg\omega/Q$，(15.109)变为

$$\langle n\rangle\approx\frac{A^2}{B(\omega/Q)}=\left(\frac{A}{B}\right)A/(\omega/Q) \tag{15.110}$$

这时$\langle n\rangle\gg A/B$，(15.106)式变为

$$\rho_{nn}\approx N_s^{-1}\frac{\langle n\rangle^n}{n!} \tag{15.111}$$

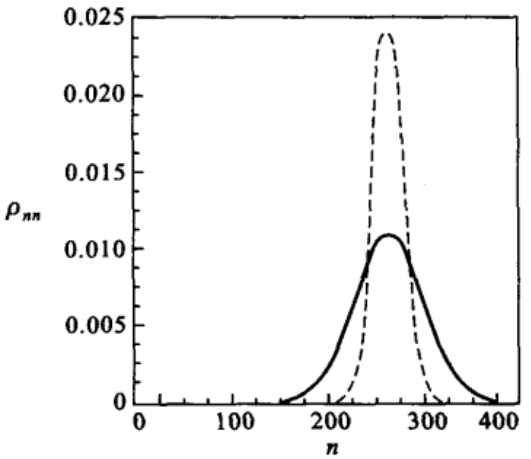


图 15.5 激光阈值以上 20%的光子分布与相干态的泊松分布的比较，两种情况的$\langle n\rangle=10^6$

由归一化条件

$$1=\sum_{n=0}^{\infty}\rho_{nn}=N_s^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\langle n\rangle^n}{n!}=N_s^{-1}\mathrm{e}^{\langle n\rangle}$$

其中 $N_s=\mathrm{e}^{-\langle n\rangle}$

$$\rho_{nn}=\frac{\mathrm{e}^{-\langle n\rangle}\langle n\rangle^n}{n!} \tag{15.112}$$

即远高于阈值时，激光的光子分布成为泊松分布.

综上所述，激光器低于阈值时，基本上与热辐射分布一样. 高于阈值时，不同于热辐射分布，但比相干态的分布宽得多. 激光器远高于阈值时，光子分布是泊松分布.

15.4.3 光子数的起伏

为计算方便，使用符号 $C=\omega/Q$，

(1) 激光器低于阈值时，有

$$A<C,B=0 \tag{15.113}$$

由细致平衡条件

$$C\rho_{nn}=A\rho_{n-1,n-1}$$

得出

$$\rho_{nn}=\frac{A}{C}\rho_{n-1,n-1} \tag{15.114}$$

$$\langle n\rangle=\sum_{n=0}n\rho_{nn}=\sum_{n=0}\frac{A}{C}n\rho_{n-1,n-1}=\frac{A}{C}\sum_{m=-1}(m+1)\rho_{mm}$$

$$=\frac{A}{C}(m+1)\rho_{mm}\Big|_{m=-1}+\frac{A}{C}\sum_{n=0}(n+1)\rho_{nn}$$

$$= \langle n \rangle \frac{A}{C} + \frac{A}{C}$$

故有

$$\langle n \rangle = \frac{A}{C-A} \tag{15.115}$$

$$\begin{aligned}\langle n^2 \rangle &= \sum_{n=0} n^2 \rho_{nn} = \frac{A}{C} \sum_{n=0} n^2 \rho_{n-1,n-1} \\ &= \frac{A}{C} \sum_{m=-1} (m+1)^2 \rho_{mm} \\ &= \frac{A}{C}(m+1)^2 \rho_{mm} \mid_{m=-1} + \frac{A}{C} \sum_{n=-1} (n+1)^2 \rho_{nn} \\ &= \frac{A}{C}\{\langle n^2 \rangle + 2\langle n \rangle + 1\}\end{aligned} \tag{15.116}$$

$$\begin{aligned}\langle n^2 \rangle &= 2\frac{A}{C-A}\langle n \rangle + \frac{A}{C-A} \\ &= 2\langle n^2 \rangle + \langle n \rangle\end{aligned} \tag{15.117}$$

$$\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle = 2\langle n \rangle^2 \tag{15.118}$$

这说明，激光器在低于阈值时，与热辐射一样.

(2) 激光器高于阈值时，利用精确的 $\dot{\rho}_{nn}$ 表达式(15.54)或(15.83)，由细致平衡，得出

$$\frac{\omega}{Q} n\rho_{nn} = \frac{nA}{1+nB/A}\rho_{n-1,n-1} \tag{15.119}$$

$$C\rho_{nn} = \frac{A^2}{A+Bn}\rho_{n-1,n-1}$$

$$n\rho_{nn}B = -A\rho_{nn} + \frac{A^2}{C}\rho_{n-1,n-1} \tag{15.120}$$

$$\begin{aligned}\langle n \rangle &= \sum_{n=0} n\rho_{nn} = \frac{1}{B}\sum_{n=0} n\rho_{nn}B \\ &= \frac{1}{B}\sum_{n=0}\left(\frac{A^2}{C}\rho_{n-1,n-1} - A\rho_{nn}\right) \\ &= \frac{1}{B}\frac{A^2}{C}\sum_{m=-1}\rho_{mm} - \frac{A}{B} \\ &= \frac{A}{BC}(A-C)\end{aligned} \tag{15.121}$$

$$\begin{aligned}\langle n^2 \rangle &= \sum_{n=0} n^2\rho_{nn} = \frac{1}{B}\sum_{n=0} n\left(\frac{A^2}{C}\rho_{n-1,n-1} - A\rho_{nn}\right) \\ &= \frac{1}{B}\left\{\sum_{n=0}(n-1)\frac{A^2}{C}\rho_{n-1,n-1} + \sum_{n=0}\frac{A^2}{C}\rho_{n-1,n-1} - A\sum n\rho_{nn}\right\}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{B}\left\{\frac{A^2}{C}\sum_{m=-1} m\rho_{mm} + \frac{A^2}{C}\sum_{m=-1}\rho_{mm} - A\langle n\rangle\right\}$$

$$= \frac{1}{B}\left\{\frac{A^2}{C}\langle n\rangle + \frac{A^2}{C} - A\langle n\rangle\right\}$$

$$= \frac{A}{BC}(A-C)\langle n\rangle + \frac{A^2}{BC} = \langle n\rangle^2 + \frac{A^2}{BC} \tag{15.122}$$

$$\langle n^2\rangle - \langle n\rangle^2 = \frac{A^2}{BC} \tag{15.123}$$

特别在阈值时，$A=C$，

$$\langle n^2\rangle - \langle n\rangle^2 = \frac{A}{B} \tag{15.124}$$

这时 A/B 非常大，说明在阈值点，起伏非常大.

此外，若用四级微扰的公式(15.47)或(15.84)可得

$$\langle n^2\rangle - \langle n\rangle^2 = \frac{C}{B} \tag{15.125}$$

这是因为，在阈值附近，$A\approx C$，由(15.123)式则变为(15.124)式. 在阈值点 $C=A$，(15.125)式就与(15.124)式一样.

(3) 激光器远高于阈值时，有

$$A\gg C, \langle n\rangle \approx \frac{A^2}{BC} \tag{15.126}$$

(15.121)式变为

$$\langle n^2\rangle - \langle n\rangle^2 = \langle n\rangle \tag{15.127}$$

$$\langle n^2\rangle - \langle n\rangle = \langle n^2\rangle \tag{15.128}$$

这说明在远高于阈值时，激光是相干光.

15.4.4 激光器的起始振荡

激光器的全量子理论能够说明起初不存在辐射时，由真空起伏导致起振的过程. 由光子算符的严格公式(15.54)，(15.83)，可计算 ρ_{nn} 随时间 t 的演化过程. 如图 15.6 所示，其中 $A=10^6\ \mathrm{s}^{-1}$，$C=\omega/Q=0.9\times10^6\ \mathrm{s}^{-1}$，即激光器工作在阈值之上 10%. 当 $t=60\ \mu\mathrm{s}$ 时，达到定态. 若激光器工作在阈值之上 30%，则 $t=30\ \mu\mathrm{s}$ 时达到定态. 激光上升时间的量级是 $(A-\omega/Q)^{-1}$，这是小信号时激光指数上升的时间常数. 由这些例子可知光场的时间常数 τ_f 与原子寿命 γ，满足 $\tau_f\gg 1/\gamma=T$. 因此我们使用绝热近似是合理的.

图 15.7 所示的曲线是考虑饱和参数 B 的计算结果，其中 $A=1.15\times10^6\ \mathrm{s}^{-1}$，$C=\omega/Q=1.0\times10^{-6}\ \mathrm{s}^{-1}$，$B=A\times10^{-6}$. 由于 B 的影响，使激光达到定态所需时间更长一些.

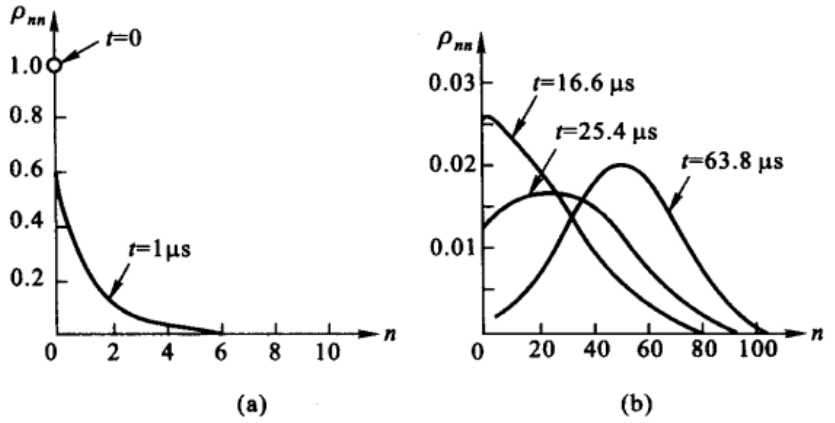


图 15.6 高于阈值 10%时激光器从真空起振，定态$\langle n\rangle=50$

$A=10^6\ \mathrm{s}^{-1}$，$C=\omega/Q=0.9\times10^6\ \mathrm{s}^{-1}$

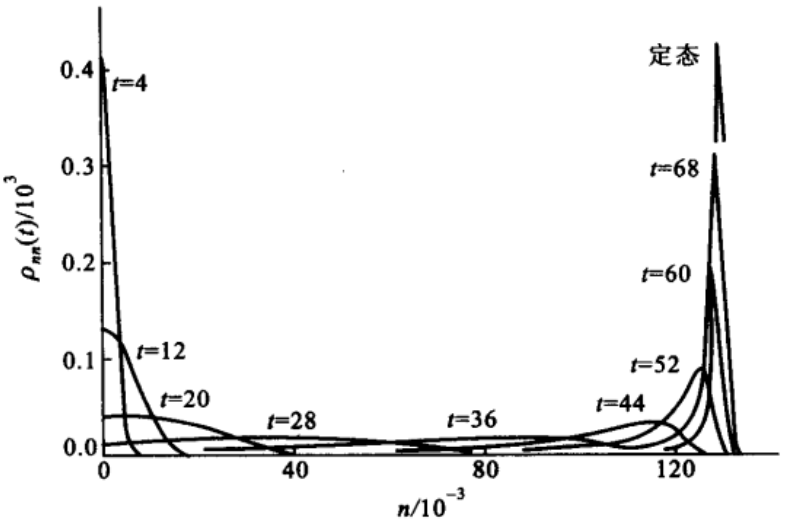


图 15.7 ρ_{nn}随时间 t 的变化

$A=1.15\times10^6\ \mathrm{s}^{-1}$，$B=A\times10^5$，$C=\omega/Q=1.0\times10^{-6}\ \mathrm{s}^{-1}$

15.5 激光的线宽

本节用光子算符方程计算激光的线宽. 首先说明激光线宽由光子算符的非对角元$\rho_{n,n+1}(t)$决定，然后由光子算符方程 $\dot{\rho}$ 得到非对角元的方程$\dot{\rho}_{n,n+1}(t)$，再由此计算激光线宽. 最后给出激光线宽与腔的线宽和激光功率的关系.

15.5.1 场的密度算符的非对角元

上节看到场的密度算符的对角元与光子数、光子统计等有关. 本节将

讨论非对角元与激光线宽的关系.

与半经典理论对比一下,我们曾看到光场的衰减导致谱线有一定宽度.在全量子理论中,光场由算符的期待值决定.

$$\begin{aligned}\langle E\rangle &= \mathscr{E}\sin(kz)\,\mathrm{tr}[\rho(t)(a+a^+)]\\ &= \mathscr{E}\sin(kz)\,\mathrm{tr}[\rho(t)a^+]+\text{c. c.}\\ &= \mathscr{E}\sin(kz)\sum_{n=0}\langle n|\rho(t)a^+|n\rangle+\text{c. c.}\end{aligned}\tag{15.129}$$

$\langle E\rangle$随 t 的衰减将决定激光线宽.$\langle E\rangle$与 t 的关系由 $\rho_{n,n+1}(t)$决定.因此,我们得出结论:场的算符的非对角元决定激光线宽.为计算线宽,必须求 $\rho_{n,n+1}(t)$.为此,就需先求得 $\dot{\rho}_{n,n+1}(t)$.

15.5.2 非对角元的运动方程

我们用四级微扰理论的场算符方程(15.43),

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} &= -\frac{A}{2}(aa^+\rho+\rho aa^+-2a^+\rho a)\\ &\quad+\frac{B}{8}(aa^+aa^+\rho+6aa^+\rho aa^++\rho aa^+aa^+\\ &\quad-4a^+\rho aa^+a-4a^+aa^+\rho a)\\ &\quad-\frac{C}{2}(a^+a\rho+\rho a^+a-2a\rho a^+)\end{aligned}\tag{15.130}$$

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_{n,n+1} &= -\frac{1}{2}A\langle n|\{aa^+\rho+\rho aa^+-2a^+\rho a\}|n+1\rangle\\ &\quad+\frac{B}{8}\langle n|\{aa^+aa^+\rho+6aa^+\rho aa^+-\rho aa^+aa^+\\ &\quad-4a^+\rho aa^+a-4a^+aa^+\rho a\}|n+1\rangle\\ &\quad-\frac{C}{2}\langle n|\{a^+a\rho+\rho a^+a-2a\rho a^+\}|n+1\rangle\end{aligned}\tag{15.131}$$

将 ρ 左边和右边的光子算符分别作用于$\langle n|$和$|n\rangle$,则

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_{n,n+1} &= -\frac{1}{2}A\{(n+1)\rho_{n,n+1}+(n+2)\rho_{n,n+1}\\ &\quad-2\sqrt{n(n+1)}\rho_{n-1,n}\}+\frac{B}{8}\{(n+1)^2\rho_{n,n+1}\\ &\quad+6(n+1)(n+2)\rho_{n,n+1}-4(n+1)\sqrt{n(n+1)}\rho_{n-1,n}\\ &\quad-4n\sqrt{n(n+1)}\rho_{n-1,n}\}-\frac{C}{2}\{n\rho_{n,n+1}+(n+1)\rho_{n,n+1}\\ &\quad-2\sqrt{(n+1)(n+2)}\cdot\rho_{n+1,n+2}\}\end{aligned}\tag{15.132}$$

经过整理,得

$$\dot{\rho}_{n,n+1}=-\left\{\left[A-B\left(n+\frac{3}{2}\right)\right]\left(n+\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{8}B-\frac{\omega}{Q}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right\}\rho_{n,n+1}$$
$$+\left[A-B\left(n+\frac{1}{2}\right)\right][n(n+1)]^{1/2}\rho_{n-1,n}$$
$$+\frac{\omega}{Q}[(n+1)(n+2)]^{1/2}\rho_{n+1,n+2} \tag{15.133}$$

从(15.133)式可以看出，为了求解这个方程，希望先把 $\rho_{n-1,n}$ 和 $\rho_{n+1,n+2}$ 也用 $\rho_{n,n+1}$ 表示出来. 为了做到这点，拉姆等采用了如下的技巧：如果激光器在阈值以上工作，$n\gg1$，$\rho_{n,n+1}$ 的下脚标 $n+1\approx n$，所以 $\rho_{n,n+1}$ 的解应与四级微扰的 ρ_{nn} 的公式相似. 此外，既然 $\rho_{n,n+1}$ 表示线宽，它应该随时间 t 指数衰减. 因此，设想

$$\rho_{n,n+1}(t)=N_1\left(\prod_l^n\frac{A-Bl}{\omega/Q}\prod_m^{n+1}\frac{A-Bm}{\omega/Q}\right)^{1/2}\exp(-\mu_1 t) \tag{15.134}$$

指数上的 μ_1 是对应于 $\rho_{n,n+1}$ 的下标相差 1. 由(15.134)式容易看出，若把其中的 $n+1$ 换成 n，则

$$\left(\prod_l^n\frac{A-Bl}{\omega/Q}\prod_m^{n+1}\frac{A-Bm}{\omega/Q}\right)^{1/2}\Rightarrow\prod_l^n\frac{A-Bl}{\omega/Q}\propto\rho_{nn} \tag{15.135}$$

这正是四级微扰的 ρ_{nn} 的表达式，见(15.92)式. 通过下面的具体计算，证明设想的(15.134)的 $\rho_{n,n+1}$ 的形式是正确的.

为了将方程(15.133)中的 $\rho_{n-1,n}$ 和 $\rho_{n+1,n+2}$ 也用 $\rho_{n,n+1}$ 表示出来，可直接利用(15.134)式，并要注意连乘 $\prod_l^n$ 的含义. 因为

$$\rho_{n,n+1}=N_1\left[\left(\frac{A-Bn}{\omega/Q}\right)\left(\frac{A-B(n+1)}{\omega/Q}\right)\right]^{1/2}$$
$$\left[\prod_l^{n-1}\frac{A-Bl}{\omega/Q}\cdot\prod_m^{n}\frac{A-Bm}{\omega/Q}\right]^{1/2}\exp(-\mu_1 t)$$
$$=\rho_{n-1,n}\left[\left(\frac{A-Bn}{\omega/Q}\right)\left(\frac{A-B(n+1)}{\omega/Q}\right)\right]^{1/2} \tag{15.136}$$

所以有

$$\rho_{n-1,n}=\frac{\omega}{Q}\{(A-Bn)[A-B(n+1)]\}^{-1/2}\rho_{n,n+1} \tag{15.137}$$

由于

$$(A-Bn)^{-1/2}[A-B(n+1)]^{-1/2}$$
$$=\left\{\left[A-B\left(n+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}B\right]\times\left[A-B\left(n+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}B\right]\right\}^{-1/2}$$
$$=\left[A-B\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]^{-1}\times\left\{\left[1+\frac{\frac{1}{2}B}{A-B\left(n+\frac{1}{2}\right)}\right]\left[1-\frac{\frac{1}{2}B}{A-B\left(n+\frac{1}{2}\right)}\right]\right\}^{-1/2}$$

$$=\left[A-B\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]^{-1}\left\{1+\frac{1}{8}B^2\left[A-B\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]^{-2}\right\}$$

所以(15.137)式可简化为

$$\rho_{n-1,n}=\frac{\omega}{Q}\left[A-B\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]^{-1}\cdot\left\{1+\frac{1}{8}B^2\left[A-B(n+\frac{1}{2})\right]^{-2}\right\}\rho_{n,n+1} \tag{15.138}$$

与此类似,由(15.134)还可得到

$$\begin{aligned}\rho_{n+1,n+2}&=\rho_{n,n+1}\frac{Q}{\omega}\{[A-B(n+1)][A-B(n+2)]\}^{1/2}\\&=\rho_{n,n+1}\frac{Q}{\omega}\left\{\left[A-B\left(n+\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{2}B\right]\cdot\left[A-B\left(n+\frac{3}{2}\right)-\frac{B}{2}\right]\right\}^{1/2}\\&=\frac{Q}{\omega}\left[A-B\left(n+\frac{3}{2}\right)\right]\times\left\{1-\frac{1}{8}B^2\left[A-B\left(n+\frac{3}{2}\right)\right]^{-2}\right\}\rho_{n,n+1}\end{aligned} \tag{15.139}$$

(15.133)式中的系数还可简化为

$$[n(n+1)]^{1/2}\approx\left(n+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{8}n^{-1} \tag{15.140}$$

$$[(n+1)(n+2)]^{1/2}\approx n+1+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}(n+1)^{-1} \tag{15.141}$$

将(15.138)~(15.141)式代入(15.133)式,得到

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_{n,n+1}\approx&-\left\{\left[A-B\left(n+\frac{3}{2}\right)\right]\times\left[\left(n+\frac{3}{2}\right)-\left(n+\frac{1}{8}-\frac{1}{8}(n+1)^{-1}\right)\right]\right.\\&\left.+\frac{1}{3}(B+\delta)+\frac{\omega}{Q}\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)-\left(n+\frac{1}{2}-\frac{1}{8n}\right)\right]\right\}\rho_{n,n+1}\\=&-\frac{1}{8}\left(\frac{A}{n+1}+\frac{\omega/Q}{n}-\frac{B}{2(n+1)}+\delta\right)\rho_{n,n+1}\end{aligned} \tag{15.142}$$

其中,δ 是个可忽略的小量,且

$$\delta=\left\{\frac{B^2\left(n+\frac{3}{2}\right)}{\left[A-B\left(n+\frac{3}{2}\right)\right]^2}\right\}\left\{A-B\left(n+\frac{3}{2}\right)-\frac{\omega}{Q}\left\{\frac{n+\frac{1}{2}}{n+\frac{3}{2}}\right\}\left[\frac{A-B\left(n+\frac{3}{2}\right)}{A-B\left(n+\frac{1}{2}\right)}\right]^2\right\} \tag{15.143}$$

注意到在四级微扰适用的范围,饱和效应不太强,B 较小,$B\ll A$,因此 $\delta\approx 0$.

根据同样的原因,$B\ll n$,及 $n\gg 1$,并把 n 取作$\langle n\rangle$,(15.143)式变为

$$\dot{\rho}_{n,n+1}(t)=-\frac{1}{2}D\rho_{n,n+1}(t),\mu_1=\frac{1}{2}D \tag{15.144}$$

$$D=\frac{1}{4}\frac{A+(\omega/Q)}{\langle n\rangle} \tag{15.145}$$

在四级微扰适用的范围——阈值附近，$A\approx\omega/Q$，所以

$$D=\frac{1}{2}\frac{A}{\langle n\rangle}=\frac{1}{2}\frac{\omega}{Q\langle n\rangle} \tag{15.146}$$

$$\langle E\rangle=\langle E(0)\rangle\exp\left(-\frac{1}{2}Dt\right) \tag{15.147}$$

从相互作用表象回到薛定谔表象，则

$$\langle E(t)\rangle=\langle E(0)\rangle\cos(\omega t)\exp\left(-\frac{1}{2}Dt\right) \tag{15.148}$$

做傅里叶变换，则

$$\begin{aligned}|\tilde{E}(\omega')|^2&=\left|\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\mathrm{i}\omega' t)\langle E(0)\rangle\cos(\omega t)\exp\left(-\frac{1}{2}Dt\right)\right|^2\mathrm{d}t\\&=\langle E(0)\rangle^2\frac{1}{(\omega'-\omega)^2+\left(\frac{1}{2}D\right)^2}\end{aligned} \tag{15.149}$$

这正是洛伦兹型，半极大点的全宽度(FWHM)是 D，见图 15.8.

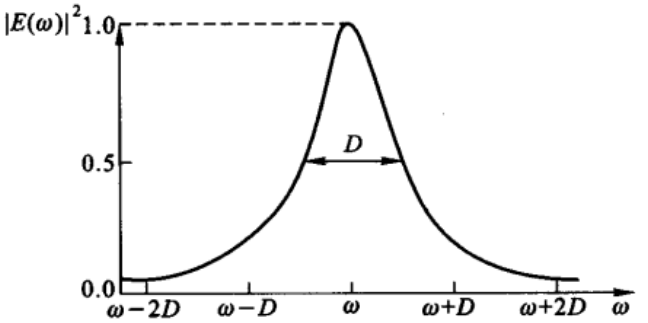


图 15.8 激光的线型

由于被动腔的线宽是

$$\Delta\Omega=\omega/Q \tag{15.150}$$

$$D=\frac{1}{2}\frac{1}{\langle n\rangle}\frac{\omega}{Q}=\frac{1}{2}\frac{1}{\langle n\rangle}\Delta\Omega \tag{15.151}$$

而激光的能量是$\langle n\rangle\hbar\nu$，耗散的功率正是激光器的输出功率

$$P=\langle n\rangle\hbar\omega\frac{\omega}{Q}=\langle n\rangle\hbar\omega\Delta\Omega \tag{15.152}$$

$$\langle n\rangle=\frac{P}{\hbar\omega\Delta\Omega} \tag{15.153}$$

将(15.153)代入(15.151)，则

$$D=\frac{1}{2}\frac{\hbar\omega}{P}(\Delta\Omega)^2 \tag{15.154}$$

例如，$\lambda=1.1\ \mu\mathrm{m}$ 的 He－Ne 激光器，$L=100$ cm，单程损耗为 2%，输出

功率 $P=1$ mW，代入(15.155)式，则

$$D\approx 10^{-3}\,\mathrm{Hz} \tag{15.155}$$

这相当于 $\omega/D\approx 10^{17}$. 技术上达到的水平式在短时间内 $D\approx 1$ Hz.

最后指出，本章用 ω 表示激光频率，对应拉姆学派用的 ν.

15.6 福克-普朗克方程

在拉姆学派的全量子激光理论中，是在福克表象(即光子数表象)中讨论密度算符的方程 $\dot{\rho}_{n,m}$ 和 $\dot{\rho}_{n,n+1}$. 如果把前面已得到的密度算符方程写到相干态表象中，便可得到福克-普朗克方程. 这样就过渡到拉克斯和路易塞尔学派的全量子激光理论. 下面利用四级微扰论得到的算符方程(15.43)，分别讨论线性近似($B=0$)和非线性($B\neq 0$)的情况.

15.6.1 线性近似的福克-普朗克方程

在线性近似下，饱和参数 $B=0$，四级微扰的算符方程变为

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=-\frac{A}{2}(aa^{+}\rho+\rho aa^{+}-2a^{+}\rho a)-\frac{C}{2}(a^{+}a\rho+\rho a^{+}a-2a\rho a^{+}) \tag{15.156}$$

为将此方程写到相干态表象，利用密度算符在相干态表象中的对角表示的公式

$$\rho(t)=\int \phi(\alpha,t)\,|\alpha\rangle\langle\alpha|\,\mathrm{d}^{2}\alpha \tag{15.157}$$

其中 $|\alpha\rangle$ 是单模的相干态. 为了得到 $\phi(\alpha,t)$ 的运动方程，需要将算符 ρ 按反常顺序展开(即消灭算符在左边而产生算符在右边)，即

$$\rho=\rho_{\mathrm{a}}=\sum_{m,n} r_{mn}a^{m}\,(a^{+})^{n} \tag{15.158}$$

其中 ρ_{a} 的下脚标 a 代表反常顺序(antinormal ordering). 再利用相干性的“完备性”公式

$$1=\frac{1}{\pi}\int |\alpha\rangle\langle\alpha|\,\mathrm{d}^{2}\alpha \tag{15.159}$$

(15.158)式变为

$$\begin{aligned}\rho_{\mathrm{a}}&=\frac{1}{\pi}\sum_{m,n} r_{m,n}\int a^{m}\,|\alpha\rangle\langle\alpha|\,(a^{+})^{n}\mathrm{d}^{2}\alpha\\&=\frac{1}{\pi}\sum_{m,n} r_{m,n}\int a^{m}\,(\alpha^{*})^{n}\,|\alpha\rangle\langle\alpha|\,\mathrm{d}^{2}\alpha\\&=\frac{1}{\pi}\int \rho_{\mathrm{a}}(\alpha,\alpha^{*},t)\,|\alpha\rangle\langle\alpha|\,\mathrm{d}^{2}\alpha\end{aligned} \tag{15.160}$$

其中

$$\rho_s(\alpha,\alpha^*,t)=\sum_{m,n} r_{m,n}\alpha^m(\alpha^*)^n \tag{15.161}$$

与(15.158)式比较可知,$\rho_s(\alpha,\alpha^*,t)$等于反常顺序的密度矩阵算符 ρ_s 的 a 用 α 代替而 a^+ 用 α^* 代替.

由(15.160)式和(15.157)式比较可知

$$\phi(\alpha,t)=\frac{1}{\pi}\rho_s(\alpha,\alpha^*,t) \tag{15.162}$$

为了把上述公式用到方程(15.158),也必须把方程(15.156)的各项写成反常顺序.为此,需要用 a 和 ρ_s 及 a^+ 和 ρ_s 的对易关系.首先利用 $[a,a^+]=1$ 及 $[a,a]=[a^+,a^+]=0$,用数学归纳法容易证明

$$\left.\begin{aligned}[a,(a^+)^n]&=n(a^+)^{n-1}=\frac{\partial}{\partial a^+}[(a^+)^n]\\ [a^+,(a)^n]&=-n(a)^{n-1}=-\frac{\partial}{\partial a}[(a)^n]\end{aligned}\right\} \tag{15.163}$$

由(15.158)式和(15.163)式,可求出$[a,\rho_s]$和$[a^+,\rho_s]$

$$\begin{aligned}[a,\rho_s]&=\Big[a,\sum_{m,n} r_{m,n}a^m(a^+)^n\Big]=\sum_{m,n} r_{m,n}a^m[a,(a^+)^n]\\ &=\sum_{m,n} r_{m,n}na^m(a^+)^n\\ &=\sum_{m,n} r_{m,n}\frac{\partial}{\partial a^+}[a^m(a^+)^n]\\ &=\frac{\partial}{\partial a^+}\rho_s\end{aligned} \tag{15.164}$$

$$[a^+,\rho_s]=-\frac{\partial}{\partial a}\rho_s \tag{15.165}$$

由于 $\rho_s a^+$,$a\rho_s$,$\frac{\partial}{\partial a}\rho_s$,$\frac{\partial}{\partial a^+}\rho_s$ 也是反常顺序的,利用(15.165)式和(15.166)式,则

$$\left.\begin{aligned}[a,\rho_s a^+]&=\frac{\partial}{\partial a^+}(\rho_s a^+)\\ [a^+,a\rho_s]&=-\frac{\partial}{\partial a}(a\rho_s)\\ \Big[a,\frac{\partial}{\partial a}\rho_s\Big]&=\frac{\partial}{\partial a^+}\Big(\frac{\partial}{\partial a}\rho_s\Big)=\frac{\partial^2\rho_s}{\partial a^+\partial a}\\ \Big[a^+,\frac{\partial}{\partial a^+}\rho_s\Big]&=-\frac{\partial}{\partial a}\Big(\frac{\partial}{\partial a^+}\rho_s\Big)=-\frac{\partial^2\rho_s}{\partial a^+\partial a}\end{aligned}\right\} \tag{15.166}$$

利用这些关系式,很容易将方程(15.156)写成福克-普朗克方程,假如我们已将 ρ 按反常顺序排,则(15.156)式变为

$$\dot{\rho}_s = -\frac{A}{2}\{aa^+\rho_s + \rho_s aa^+ - 2a^+\rho_s a\} - \frac{C}{2}\{a^+ a\rho_s + \rho_s a^+ a - 2a\rho_s a^+\}$$

$$= -\frac{A}{2}\{[a, a^+\rho_s] + [\rho_s a, a^+]\} - \frac{C}{2}\{[a^+, a\rho_s] + [\rho_s a^+, a]\} \tag{15.167}$$

利用(15.164)式和(15.165)式,有

$$\rho_s a = a\rho_s - \frac{\partial}{\partial a^+}\rho_s, \quad a^+\rho_s = \rho_s a^+ - \frac{\partial}{\partial a}\rho_s$$

$$\dot{\rho}_s = -\frac{A}{2}\{[a, \rho_s a^+] + [a\rho_s, a^+]\}$$

$$+\frac{A}{2}\left\{\left[a, \frac{\partial}{\partial a}\rho_s\right] + \left[\frac{\partial}{\partial a^+}\rho_s, a^+\right]\right\}$$

$$+\frac{C}{2}\{[a, \rho_s a^+] + [a\rho_s, a^+]\}$$

$$= -\frac{A-C}{2}\{[a, \rho_s a^+] + [a\rho_s, a^+]\}$$

$$+\frac{A}{2}\left\{\left[a, \frac{\partial}{\partial a}\rho_s\right] + \left[\frac{\partial}{\partial a^+}\rho_s, a^+\right]\right\}$$

利用(15.166)式,上式则变为

$$\dot{\rho}_s = -\frac{A-C}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial a^+}(\rho_s a^+) + \frac{\partial}{\partial a}(a\rho_s)\right\} + A\frac{\partial^2\rho_s}{\partial a\partial a^+} \tag{15.168}$$

由于其中每项都是反常顺序的,该方程的解也总是保持反常顺序的.利用(15.162)式,可把方程(15.168)变为权重函数 $\phi(\alpha, t)$ 的方程,改用记号

$$\phi(\alpha, t) = P(\alpha, \alpha^*, t) \tag{15.169}$$

由(15.162)和(15.168)式,可得到

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\left(\frac{A-C}{2}\right)\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}(\alpha P) + \frac{\partial}{\partial \alpha^*}(\alpha^* P)\right] + A\frac{\partial^2 P}{\partial \alpha\partial \alpha^*} \tag{15.170}$$

为了揭示方程(15.170)的物理意义,把它变为实变量的方程.令

$$\alpha = x + \mathrm{i}y \tag{15.171}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{15.172}$$

代入(15.170)式,则

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\left(\frac{A-C}{2}\right)\left[\frac{\partial}{\partial x}(xP) + \frac{\partial}{\partial y}(yP)\right] + \frac{A}{4}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}\right)$$

$$= \gamma \mathrm{div}(\boldsymbol{r}P) + \delta\,\boldsymbol{\nabla}^2 P \tag{15.173}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\gamma&=-\left(\frac{A-C}{2}\right)\\ \delta&=\frac{A}{4}\end{aligned}\right\} \tag{15.174}$$

$\boldsymbol{r}$ 是(x,y)平面内的二维向量.

方程(15.173)是二维的福克-普朗克方程. 在经典理论中,$P(\boldsymbol{r},t)$应是几率密度. 为看清(15.173)式的物理意义,考虑下面两种特殊情况:(1)若$\delta=0$,方程变为连续性方程,几率流是以 $j=-\gamma\boldsymbol{r}p$,所以$-\gamma\boldsymbol{r}$ 表示流动的速度. (2)若 $\gamma=0$,方程变为扩散方程,δ 起着扩散系数的作用. 因此方程(15.173)的第一项称为漂移项,第二项称为扩散项.

设 $\gamma>0$,且光场的初态是纯的相干态$|\alpha_0\rangle$,则

$$\phi(\alpha,0)=\delta(\alpha-\alpha_0) \tag{15.175}$$

这对应于 P 的初条件为

$$P(\boldsymbol{r},0)=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) \tag{15.176}$$

这时,方程(15.173)的解早在 1943 年即解决了:

$$P(\boldsymbol{r},t,\boldsymbol{r}_0)=\frac{1}{2\pi\sigma^2(t)}\exp\left[-\frac{|(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0\mathrm{e}^{-\gamma t})|^2}{2\sigma^2(t)}\right] \tag{15.177}$$

$$\sigma^2(t)=\delta(1-\mathrm{e}^{-2\gamma t})/\gamma \tag{15.178}$$

这说明激光器在低于阈值时($\gamma<0$),准几率分布 $\phi(\alpha,t)$变为高斯分布,高斯分布的中心(见(15.177)式)在

$$\boldsymbol{r}_0\mathrm{e}^{-2\gamma t} \quad 即 \quad \alpha_0\mathrm{e}^{-\gamma t} \tag{15.179}$$

当 $t\to\infty$时,$\alpha_0\mathrm{e}^{-\gamma t}\to 0$,即分布中心在零点. 这正说明激光器低于阈值时,光场分布与热辐射的分布一样.

15.6.2 非线性的激光福克-普朗克方程

当激光器工作在阈值以上时,$A>C$,$B\neq 0$. 这样用相似的步骤,也可将四级微扰的密度算符的方程(15.43)写到相干态表象

$$\frac{\partial P}{\partial t}=-\frac{1}{2}\{A-C-B|\alpha|^2\}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}(\alpha P)+\frac{\partial}{\partial\alpha^*}(\alpha^* P)\right\}+\frac{\partial^2 P}{\partial\alpha\partial\alpha^*} \tag{15.180}$$

与(15.170)式比较可知,$B\neq 0$,即相当于在福克-普朗克方程中做如下的替换

$$(A-C)\to(A-C-B|\alpha|^2) \tag{15.181}$$

这正是饱和参数 B 的作用. 同样,还可以将方程(15.180)用实变量表示出来,为此,仍用

$$\alpha=x+\mathrm{i}y$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

(15.180)式变为

$$\frac{\partial P}{\partial t}=-\left[\frac{A-C}{2}-\frac{B}{2}r^2\right]\mathrm{div}(\boldsymbol{r}P)+\delta\nabla^2 P \tag{15.182}$$

其中，Br^2 是饱和效应. 这相当于把 $B=0$ 的公式(15.173)中的 $|\gamma|$ 变为 $\left(|\gamma|-\frac{1}{2}Br^2\right)$.

为了便于讨论光子统计和线宽问题，进而采用极坐标

$$\boldsymbol{r}=(r,\theta) \tag{15.183}$$

$$\alpha=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \tag{15.184}$$

相干态中的平均光子数是

$$\langle n\rangle=\langle\alpha|a^+a|\alpha\rangle=\alpha^*\alpha=|\alpha|^2=r^2 \tag{15.185}$$

考虑到 $r^2/\alpha^2=\alpha^*/\alpha$，$\ln(\alpha^*/\alpha)=2\ln(r/\alpha)$，则

$$\theta=\frac{1}{2}\mathrm{i}\ln(\alpha^*/\alpha) \tag{15.186}$$

由(15.185)式和(15.186)式可得到

$$\frac{\partial r}{\partial\alpha}=\frac{1}{2}\frac{\alpha^*}{r}=\frac{1}{2}\exp(-\mathrm{i}\theta) \tag{15.187}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}=-\frac{1}{2}\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\alpha}(\ln\alpha) \tag{15.188}$$

因此

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}=\frac{\partial r}{\partial\alpha}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}\frac{\partial}{\partial\theta}=\frac{1}{2}\exp(-\mathrm{i}\theta)\left[\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\mathrm{i}}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right] \tag{15.189}$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha^*}=\frac{1}{2}\exp(\mathrm{i}\theta)\left[\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\mathrm{i}}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right] \tag{15.190}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\alpha^*}&=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\\&=\frac{1}{4r^2}\left(r\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\end{aligned} \tag{15.191}$$

再注意到

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\alpha=1+\frac{1}{2}r\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{2}\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\theta}=\frac{1}{2}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r^2-\frac{1}{2}\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\theta} \tag{15.192}$$

利用(15.187)～(15.192)式，则(15.180)式变为极坐标中的福克-普朗克方程

$$\frac{\partial P}{\partial t}=-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\left(|\gamma|-\frac{1}{2}Br^2\right)r^2P\right]+\frac{\delta}{r^2}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial P}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2P}{\partial\theta^2}\right] \tag{15.193}$$

令$\frac{\partial P}{\partial t}=0$，则可得到方程(15.193)的定态解，注意这个方程的定态解与 θ 无关，故由(15.193)式有

$$\frac{\partial P}{\partial r}=\frac{r}{\delta}\left(|\gamma|-\frac{1}{2}Br^2\right)P \tag{15.194}$$

此方程的解是指数形式的，

$$P(r)=N\exp\left[\frac{A-C}{4\delta}r^2-\frac{B}{4\delta}r^4\right] \tag{15.195}$$

其中 N 是归一化常数. 此式表明：

(1) 低于阈值时，$(A-C)<0$，$B=0$，$P(r)$是高斯分布的，即与热辐射分布规律一样.

(2) 高于阈值，$P(r)$按 r 的分布有一个峰值，此峰值在$\frac{\partial P}{\partial r}=0$ 处，由(15.194)式得到峰值为

$$\bar{r}^2=\frac{|\gamma|}{(B/2)}=\frac{A-C}{B} \tag{15.196}$$

在 15.4 节中已知，四级微扰下，ρ_{nn} 按光子数 n 的分布的峰值在 $\bar{n}=\frac{A-C}{B}$. $P(r)$随 r^2 的分布与 $\phi(\alpha)$随$|\alpha|^2$ 的分布与图 15.4 一样.

对于高于阈值而四级微扰仍可适用的情况，激光器的输出光强基本上是恒定的，只有小的起伏. 与此相对应，可将 r 写成

$$r=\bar{r}+r_f \tag{15.197}$$

其中 r_f 代表振幅的小的起伏，$r_f\ll\bar{r}$. 用分离变量法将 $P(r,\theta,t)$写为

$$P(r,\theta,t)=R(r_f,t)\Phi(\theta,t)$$

在一级近似下，由方程(15.193)可得到

$$\frac{\partial R}{\partial t}=2|\gamma|\frac{\partial}{\partial r_f}(r_fR)+\delta\frac{\partial^2 R}{\partial r_f^2} \tag{15.198}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{B\gamma}{|\gamma|}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} \tag{15.199}$$

(15.198)式是一维的福克-普朗克方程，它与方程(15.173)形式相似. 因此(15.198)式的解与方程(15.173)的解即(15.177)式相似. 由(15.197)式可知，方程(15.198)表示在激光器远高于阈值时，定态解的振幅除了 $\bar{r}$ 之外，还有小的起伏 r_f. 即振幅有两部分：第一部分是相干部分 $\bar{r}$，第二部分是振幅的小的起伏 r_f.

另一方面，Φ 是 α 的位相 θ 的函数，(15.199)是相位函数 Φ 的扩散方程，扩散系数为

$$D=\frac{B\delta}{|\gamma|}=\frac{2\delta}{\left(\frac{A-C}{B}\right)}=\frac{2\delta}{\langle n\rangle} \tag{15.200}$$

考虑到 $\delta=\frac{A}{4}$，则

$$D=\frac{1}{2}\frac{A}{\langle n\rangle} \tag{15.201}$$

这与拉姆理论中的非对角元方程得到的结果一致. 由此表明激光的线宽确实是由位相扩散引起的.

习题与思考

(1) 已知密度矩阵

$$\rho_{an,am}(t+\tau)\approx g^2\tau^2\sqrt{(n+1)(m+1)}\rho_{n+1,m+1}(t)$$

$$\rho_{bn,bm}(t+\tau)\approx\left(1-\frac{1}{2}g^2\tau^2\right)\left(1-\frac{1}{2}g^2\tau^2 m\right)\rho_{nm}(t)$$

$$\approx\left[1-\frac{1}{2}g^2\tau^2(n+m)\right]\rho_{nm}(t)$$

计算由该密度矩阵描述的原子的平均能量(计算至 g^2 项)

(2) 应用福克-普朗克方程

$$\frac{\partial}{\partial t}P(v,t)=-\frac{\partial}{\partial v}(M_1P)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial v^2}(M_2P)$$

求平均速度$\langle v(t)\rangle$的运动方程.

(3) 用下列变换定义一个笛卡儿坐标系，求证在该坐标系中的福克-普朗克方程的形式是

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x,y,t)=\frac{1}{2}\frac{\omega}{Q}\left(\frac{\partial}{\partial x}x+\frac{\partial}{\partial y}y\right)P(x,y,t)+\frac{1}{4}\frac{\omega}{Q}\bar{n}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)P(x,y,t)$$

(4) 已知密度算符方程

$$\dot{\rho}(t)=-\frac{1}{2}A(\rho aa^+-a^+\rho a)-\frac{1}{2}\frac{\omega}{Q}(\rho a^+a-a\rho a^+)$$

$$+\frac{1}{8}B[\rho(aa^+)^2+3aa^+\rho aa^+-4a^+\rho aa^+a]$$

$$+\text{伴随项}$$

推导关于光子数几率 ρ_{nn} 的运动方程.

(5) 由上题推导的方程 $\dot{\rho}_{nn}$ 推导平均光子数$\langle n(t)\rangle$的运动方程.

参 考 文 献

[1] Scully M O, Lamb J W. Quantum theory of an optical maser Ⅱ, spectral profile. Phys. Rev. Lett., 1996, 16: 853 - 860.

[2] Weidlich W, Haake F. Master-equation for the statistical operator of solid state laser. Z. Phys. ,1965,186:203 - 207.

[3] Glauber R J. Photon correlations quantum noise Ⅳ, quantum theory of noise sources. Phys. Rev, Lett. ,1963,10:84 - 88.

[4] Sudarshan E C G. Equivalence of semiclassical and quantum mechanical descriptions of statistical light beams. Phys. Rev. Lett. ,1963,10:277 - 280.

[5] Moyal J E. Quantum noise Ⅱ, density-operator treatment of field and population fluctucations. Cambridge Phil. Soc.,1949,45:99 - 103.

[6] Weidlich W, Haake F. Coherence-properties of the statistical operator in a laser model. Z. Physik. ,1965,185:30 - 36.

第 16 章　哈肯的全量子激光理论

本章介绍哈肯的激光器全量子化的朗之万方程，它与哈肯半经典理论方程相似，只不过把方程中的光场、偶极矩、反转粒子数都变成算符，同时增加“起伏项”.

16.1　布朗运动与经典的朗之万方程

布朗运动可用经典的朗之万方程来描述. 本节以布朗运动为例，说明库（热浴）的作用，朗之万方程的求解、起伏-耗散定理. 这可为理解激光的特性和建立激光器的全量子的朗之万方程提供必要的基础.

16.1.1　布朗运动的朗之万方程

布朗运动是生物学家布朗用显微镜观察花粉在液体中运动时发现的. 花粉可看成被研究的系统，液体可看成库或热浴. 由于液体分子对花粉的随机碰撞，使得花粉运动的轨迹成为无规则的折线. 液体分子对花粉的碰撞就是在花粉上作用一种无规则的力或起伏力 $F(t)$. 另一方面花粉在液体中运动时，受到液体的阻力，该阻力与花粉的速度成正比，即 $-\gamma_0 v$. 它使速度为 v 的花粉颗粒减速从而损失能量，即引起耗散. 推而广之，库的作用有二：第一是耗散，第二是起伏力. 可以证明，起伏力的大小与耗散的大小成正比，这个规律就是著名的起伏-耗散定理.

在激光理论中，库的作用表现在分别对光子算符、偶极算符、反转粒子数算符引起耗散和起伏力. 这就是库的共性和个性.

我们以一维的布朗运动为例讨论朗之万方程[1][2]，考虑到阻力 $-\gamma_0 v$ 和起伏力 $F(t)$，则布朗运动可由牛顿第二定律给出，

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-\gamma_0 v+F_0(t) \tag{16.1}$$

这就是著名的朗之万方程. 为了简化，将方程的两边除以 m，并引入

$$\left.\begin{aligned}\gamma&=\gamma_0/m\\ F(t)&=F_0(t)/m\end{aligned}\right\} \tag{16.2}$$

方程(16.1)变为

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-\gamma v+F(t) \tag{16.3}$$

其中的起伏力的性质具有重要作用. 由于起伏力的各次作用的大小和方向都是无规的,因此,对各次作用的平均值为零,即

$$\langle F\rangle=0 \tag{16.4}$$

在很多情况下,还必须知道起伏力的关联函数. 一种典型情况是时刻 t 与 t' 的起伏力是无关的,即起伏力只有短时间的记忆力,这时

$$\langle F(t)F(t')\rangle=2\mathscr{D}\delta(t-t') \tag{16.5}$$

其中 $\mathscr{D}$ 表示起伏力的强度. 在下节中将计算量子起伏力的关联函数.

为了求方程(16.3)的形式解,将两边乘以 $\exp[-\gamma(t-\tau)]$ 再积分

$$\int_0^t \mathrm{e}^{-\gamma(t-\tau)}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\tau=\int_0^t(-\gamma v)\mathrm{e}^{-\gamma(t-\tau)}\mathrm{d}\tau+\int_0^t \mathrm{e}^{-\gamma(t-\tau)}F(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{16.6}$$

$$\text{左边}=v-v\mathrm{e}^{-\gamma t}-\int_0^t(\gamma v)\mathrm{e}^{-\gamma(t-\tau)}\mathrm{d}\tau$$

代入方程(16.6),则有

$$v(t)=v(0)\exp[-\gamma t]+\int_0^t \exp[-\gamma(t-\tau)]F(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{16.7}$$

因为通常我们遇到的情况是时间 t 远大于衰减常数的倒数 $1/\gamma$,因此(16.7)的第一项可略去,这样,利用(16.4)和(16.7)式,得出

$$\begin{aligned}\langle v\rangle&=\left\langle\int_0^t \exp[-\gamma(t-\tau)]F(\tau)\mathrm{d}\tau\right\rangle\\&=\int_0^t \exp[-\gamma(t-\tau)]\langle F(\tau)\rangle\mathrm{d}\tau=0\end{aligned}$$

平均速度 $\langle v\rangle$ 为零表明,虽然每次碰撞后颗粒的速度都不为零,但由于各次碰撞后,速度的大小和方向都是无规的,使得总的平均 $\langle v\rangle$ 等于零. 因此为了合适地表示速度的大小,应该选择与速度的方向无关的量,当然其最简单的形式是 $\langle v^2(t)\rangle$. 由于速度的关联 $\langle v(t)v(t')\rangle$ 是更普遍而重要的量,下面利用(16.5)式和(16.7)式计算它

$$\begin{aligned}\langle v(t)v(t')\rangle=\Big\langle&\int_0^t\int_0^{t'}\exp[-\gamma(t-\tau)]F(\tau)\mathrm{d}\tau\\&\times\exp[-\gamma(t'-\tau')]F(\tau')\mathrm{d}\tau'\Big\rangle\end{aligned} \tag{16.8}$$

由于对多次碰撞进行平均计算与对时间的积分无关,因此可把求平均的括号与对时间的积分进行交换,故有

$$\langle v(t)v(t')\rangle=\int_0^t\int_0^{t'}\exp[-\gamma(t+t'-\tau-\tau')]\cdot\langle F(\tau)F(\tau')\rangle\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\tau' \tag{16.9}$$

因为$\langle F(\tau)F(\tau')\rangle$是$\delta$函数，将(16.5)式代入(16.9)式，

$$\langle v(t)v(t')\rangle = 2\mathscr{D}\int_0^t \exp\left[-\gamma(t+t')+2\gamma\tau\right]\mathrm{d}\tau$$

$$= \frac{\mathscr{D}}{r}\{\exp\left[-\gamma(t-t')\right]-\exp\left[-\gamma(t+t')\right]\} \quad (16.10)$$

现在考虑t和t'远大于$1/\gamma$的情况

$$(t+t')\gg 1/\gamma$$

$$\langle v(t)v(t')\rangle=\frac{\mathscr{D}}{\gamma}\exp\left[-\gamma(t-t')\right] \quad (16.11)$$

(1)当$t\gg t'$时，$\langle v(t)v(t')\rangle=0$. 这说明颗粒在$t$时刻的速度与$t'$时刻的速度无关，或者说颗粒在$t$时刻已失去对$t'$时的速度的记忆. 因为其间经过了许多次碰撞. 这是马尔科夫过程的基本特点. (2)当$t=t'$时，$\langle v^2\rangle=\mathscr{D}/\gamma$，即均方速度与起伏力的大小成正比，与耗散成反比. 这是因为起伏力越大，颗粒受作用后速度越大，耗散越小，能量损失小，$\langle v^2\rangle$就变大.

按照热力学，一个自由度的动能是$\frac{1}{2}kT$，

$$\frac{1}{2}m\langle v^2\rangle=\frac{1}{2}kT \quad (16.12)$$

$$\langle v^2\rangle=\mathscr{D}/\gamma \quad (16.13)$$

$$\mathscr{D}=\gamma kT/m \quad (16.14)$$

这就是起伏耗散定理的最简单的形式，这个定理的重要性在于：(1)证明了起伏力与耗散成正比；(2)由耗散的大小γ可以计算起伏力的大小.

在激光器的全量子理论中，将应用和推广朗之万方程(16.3)和起伏-耗散定理(16.14).

16.1.2 经典的福克-普朗克方程

布朗运动除了可用朗之万方程描述之外，还可用另一种方程描述. 即福克-普朗克方程. 福克-普朗克方程的基本思想如下：设想进行许多次实验，在每次实验中质量为m的颗粒做布朗运动，在每次实验中，都测量实验开始后经过时间t的速度$v(t)$. 在这些大量的实验中，会发现速度在v到$(v+\mathrm{d}v)$之间的颗粒数目是$N(v)\mathrm{d}v$. 这样就得到了$N(v)$按v的分布函数. 在实际计算中，采用归一化的分布函数$f(v,t)$，注意$f(v,t)$正比于$N(v)$，但却是归一的.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(v,t)\mathrm{d}v = 1 \quad (16.15)$$

$f(v,t)$的物理意义是发现颗粒在时刻t的速度在v—$(v+\mathrm{d}v)$间的几率为

$f(v,t)\mathrm{d}v$. 福克-普朗克方程就是描述 $f(v,t)$ 随 t 的变化规律. 用概率论可以严格推导出布朗运动的福克-普朗克方程[3]. 这里我们从平衡分布的 $f(v,t)$ 引出来福克-普朗克方程.

由统计物理已知一维运动的质量为 m 的粒子与温度为 T 的库处于热平衡时, f 满足麦克斯韦-玻耳兹曼分布, 即

$$f(v)=N'\exp\left[-\frac{1}{2}m\frac{v^2}{kT}\right] \tag{16.16}$$

其中归一化常数 $N'=\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2}$

$$\frac{\partial}{\partial v}(\gamma v f)=\gamma f-\frac{1}{\mathscr{D}}(\gamma v)^2 f \tag{16.17}$$

$$\mathscr{D}\frac{\partial^2}{\partial v^2}f=-\gamma f+\frac{1}{\mathscr{D}}(\gamma v)^2 f \tag{16.18}$$

其中 γ 和 $\mathscr{D}$ 来自朗之万方程和起伏力公式, 方程(16.17)和(16.18)表明热平衡时

$$\frac{\partial}{\partial v}(\gamma v f)+\mathscr{D}\frac{\partial^2}{\partial v^2}f=0 \tag{16.19}$$

(16.19)式的第一项是漂移项, 若 $\mathscr{D}=0$, 则

$$\frac{\partial}{\partial t}f=\gamma v f \tag{16.20}$$

第二项是扩散项, 若 $\gamma=0$, 则

$$\frac{\partial}{\partial t}f=\mathscr{D}\frac{\partial^2}{\partial v^2}f \tag{16.21}$$

因此在既有漂移又有扩散时, f 随 t 的变化是

$$\frac{\partial}{\partial t}f=\frac{\partial^2}{\partial v^2}(\gamma v f)+\mathscr{D}\frac{\partial^2}{\partial v^2}f \tag{16.22}$$

由(16.14), 可将(16.16)变为

$$f(v)=N'\exp\left[-\frac{1}{2}\gamma v^2/\mathscr{D}\right]=N'\exp\left[\int_0^v(-\gamma v)\mathrm{d}v/\mathscr{D}\right]$$

(16.22)式就是描述一维的布朗运动的福克-普朗克方程, 其中 γv 叫漂移系数, $\mathscr{D}$ 叫扩散系数.

朗之万方程的更一般形式是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q=K(q)+F(t) \tag{16.23}$$

其中 $v\to q,\ -\gamma v\to K(q)$

如果将(16.22)式与(16.3)式比较, 可知

$$\frac{\partial}{\partial t}f=-\frac{\partial}{\partial q}K(q)f+\mathscr{D}\frac{\partial^2}{\partial q^2}f \tag{16.24}$$

它的稳态解是

$$f_{st}(q) = N' \exp\left\{\frac{1}{\mathscr{D}}\int^{q} K(q')\mathrm{d}q'\right\} \tag{16.25}$$

在求激光的福克-普朗克方程时，将直接引用方程(16.23)、(16.24)和(16.25).

为了理解朗之万方程(16.23)的意义并引入新的概念，考虑$\dot{q}=K(q)$的一个典型例子(如图 16.1)，即过阻尼谐振子(见图 16.1)，有

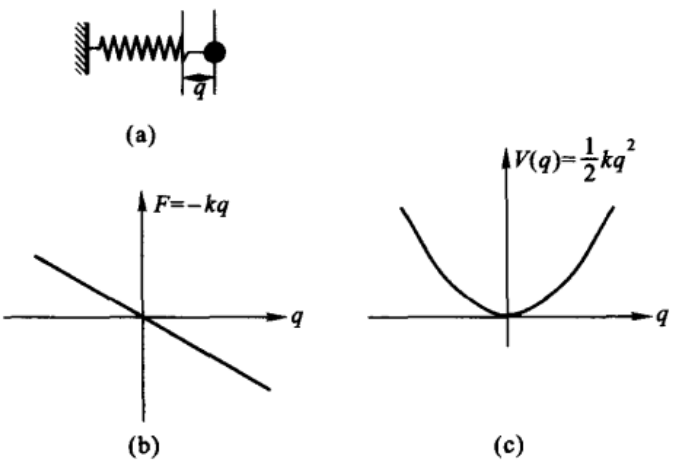


图 16.1 谐振子、恢复力、势函数示意图

(a)谐振子 (b)恢复力 (c)势函数

$$m\ddot{q}+\gamma\dot{q}=F(q)=-kq$$

所谓过阻尼谐振子，是指质量 m 过小，而阻尼系数 γ 过大

$$m\ddot{q}\ll\gamma\dot{q}$$

$$\gamma\dot{q}=F(q)$$

引入新的时间变量 $t=\gamma t'$，则

$$\dot{q}=F(q)=-\frac{\mathrm{d}V(q)}{\mathrm{d}q}$$

势能函数

$$V(q)=-\int_0^q F(q')\mathrm{d}q'$$

下面进而考虑较复杂的势函数，这对于激光理论及其他问题有重要意义.

$$F(q)=-kq-k_1q^3$$

$$\dot{q}=-kq-k_1q^3$$

$$V(q)=\frac{1}{2}kq^2+\frac{1}{4}k_1q^4$$

与图 2.2 相似，$k>0, k_1>0$ 时，稳定态是 $q=0$. $k<0, k_1>0$ 时，两个稳定点是 $q_{1,2}=\pm\sqrt{|k|/k_1}$. 以后将看到，前者对应于激光器在阈值以下工作，后者对应于激光器在阈值以上工作.

将(16.23)式看成过阻尼谐振子，$K(q)$就是恢复力，势函数 $V(q)$和分布函数 $f_{st}(q)$为

$$\left.\begin{aligned} V(q) &= -\int K(q')\mathrm{d}q' \\ f_{st}(q) &= N'\exp\{-V(q)/\mathcal{D}\} \end{aligned}\right\} \tag{16.26}$$

在求解激光器的量子化的朗之万方程时，将得到类似(16.23)式的方程，因此，可用(16.24)式得到激光的福克-普朗克方程，用(16.26)式得到激光器的势函数 V 相分布函数 f.

16.2 量子力学中的起伏与耗散

上节通过布朗运动说明了经典物理中的起伏与耗散. 现在研究量子力学中的起伏与耗散. 这对激光的全量子理论是极重要的. 这里以辐射系统与库的作用为例，说明引入起伏与耗散的必要性、辐射的起伏与耗散的来源以及起伏力的性质.

16.2.1 引入量子力学的起伏与耗散的必要性

当然对于自发辐射，我们已经知道它有耗散. 激发态的原子发生自发辐射时，上能级原子按指数衰减

$$N_2(t)=N_2(0)\mathrm{e}^{-2\gamma t}$$

由于原子数的衰减，使得产生的自发辐射也有衰减(与经典衰减振子的辐射相似). 对于这里讨论的情况，为什么会产生衰减或耗散呢？原因就在于自发辐射的光子从激发态的原子带走了能量，使得激发态原子的平均数目减少. 而作为量子力学的原子系统的衰减是由于它与量子化的电磁场的耦合而产生的. 因此，用热力学的语言，电磁场在这里就是原子体系的热浴或库. 对于自发辐射这一特殊情况，起初光子数为零，这就是热力学温度 $T=0$ 时的库. 当激发态的原子的平均数衰减时，光子的发射(自发辐射)是无规的，这些无规的过程就称为起伏. 因此原子系统在衰减(耗散)时，激发态原子平均数也是起伏(无规)的. 当然，不只是自发辐射会导致原子系统的起伏和耗散，也不只是原子系统才有起伏和耗散. 下面重点介绍光子的起伏与耗散，在 16.3 节中将引入反转粒子数及量子化电偶极矩的起伏与耗散.

16.2.2 引入辐射场的起伏与耗散的必要性

首先考虑封闭的即与外界没有作用的辐射系统. $H=\hbar\Omega a^{+}a$,故由海森堡方程

$$\left.\begin{aligned}\dot{a}&=\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[a,H]=-\mathrm{i}\Omega a\\ \dot{a}^{+}&=\mathrm{i}\Omega a^{+}\end{aligned}\right\}\tag{16.27}$$

$$\left.\begin{aligned}a&=a(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t}\\ a^{+}&=a^{+}(0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}\end{aligned}\right\}\tag{16.28}$$

这相当于无阻尼的简谐振子.

由于辐射场一般说不是孤立的、封闭的,它与外界有能量的交换. 这时就要把无阻尼简谐振子推广到阻尼振子. 设 a 在 $t=0$ 时为 $a(0)$,经过与外界交换能量,这个初始值趋于零,唯象地引入耗散常数 k,则

$$\left.\begin{aligned}\dot{a}(t)&=-\mathrm{i}\Omega a(t)-\kappa a(t)\\ \dot{a}^{+}(t)&=\mathrm{i}\Omega a^{+}(t)-\kappa a^{+}(t)\end{aligned}\right\}\tag{16.29}$$

$$\left.\begin{aligned}a(t)&=a(0)\mathrm{e}^{-\kappa t-\mathrm{i}\Omega t}\\ a^{+}&=a^{+}(0)\mathrm{e}^{-\kappa t+\mathrm{i}\Omega t}\end{aligned}\right\}\tag{16.30}$$

初始时刻 $t=0$ 的对易关系为

$$[a(0),a^{+}(0)]=1\tag{16.31}$$

由(16.30)式,得出

$$[a(0),a^{+}(0)]=[a(0),a^{+}(0)]\exp(-2\kappa t)=\exp(-2\kappa t)\tag{16.32}$$

因此,由于引入了耗散,$t\neq0$ 时,就破坏了光子的消灭算符和产生算符的对易关系. 为了使$[a(t),a^{+}(t)]=1$,即仍满足对易关系,必须在耗散的同时也考虑到起伏力. 其实由经典物理中的起伏-耗散定理也可设想到在量子力学中,也应同时考虑起伏与耗散,即

$$\left.\begin{aligned}\dot{a}&=(-\mathrm{i}\Omega-\kappa)a+F(t)\\ \dot{a}^{+}&=(\mathrm{i}\Omega-\kappa)a^{+}+F^{+}(t)\end{aligned}\right\}\tag{16.33}$$

16.2.3 量子力学中起伏力的来源

让我们考虑辐射系统 F 与库 B 的耦合[1][3][4][5]. 这个库是由频率为 ω、消灭算符为 B_{ω}、产生算符为 B_{ω}^{+} 的无限个其他的简谐振子组成. 辐射系统 F 和库的哈密顿量 H_B 分别是

$$\left.\begin{aligned}H_F&=\hbar\Omega a^{+}a\\ H_B&=\sum_{\omega}\hbar\omega B_{\omega}^{+}B_{\omega}\end{aligned}\right\}\tag{16.34}$$

假定辐射系统与库的作用与 $b+B_\omega$ 和 $B_\omega^+ b$ 成线性关系，耦合常数是 g_ω，故相互作用

$$V = \hbar \sum_\omega \{ g_\omega a^+ B_\omega + g_\omega^* B_\omega^+ a \} \tag{16.35}$$

因此，a 和 B_ω^+ 的海森堡方程是

$$\left.\begin{aligned} \dot{a}^+ &= \mathrm{i}\Omega a^+(t) + \mathrm{i}\sum_\omega g_\omega^* B_\omega^+(t) \\ \dot{B}_\omega^+ &= \mathrm{i}\omega B_\omega^+(t) + \mathrm{i} g_\omega a^+(t) \end{aligned}\right\} \tag{16.36}$$

将(16.36)式中的变量 t 变成 τ，两边分别乘以 $\exp[-\mathrm{i}\omega(t-\tau)]$，并做积分 $\int_0^t (\cdots)\mathrm{d}\tau$ 则

$$B_\omega^+(t) = B_\omega^+(0)\exp[\mathrm{i}\omega t] + \mathrm{i}\int_0^t a^+(\tau) g_\omega \exp[\mathrm{i}\omega(t-\tau)]\mathrm{d}\tau \tag{16.37}$$

其中 $B_\omega^+(0)$ 是算符 $B_\omega^+(t)$ 在 $t=0$ 时的算符. 将(16.37)式代入(16.36)的第一式，得到

$$\begin{aligned} \dot{a}^+ = \mathrm{i}\Omega a^+ &- \int_0^t a^+(\tau)\sum_\omega |g_\omega|^2 \exp[\mathrm{i}\omega(t-\tau)]\mathrm{d}\tau \\ &+ \mathrm{i}\sum_\omega g_\omega^* B_\omega^+(0)\exp[\mathrm{i}\omega t] \end{aligned} \tag{16.38}$$

其中的第二项与 a^+ 有关；第三项是 t 的函数. 下面证明第二项就是 $-\kappa a^+$，第三项就是起伏力 $F^+(t)$.

假定辐射场与库的耦合较弱，因此(16.38)中的第二项和第三项对 $a^+(t)$ 的影响远小于第一项，因此可引入慢变振幅近似.

$$a^+(t) = \tilde{a}^+(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}$$

其中 $\tilde{a}^+(t)$ 是慢变振幅，代入(16.38)式，得出

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{a}}^+ = &- \int_0^t a^+(\tau)\sum_\omega |g_\omega|^2 \exp[\mathrm{i}(\omega-\Omega)(t-\tau)]\mathrm{d}\tau \\ &+ \mathrm{i}\sum_\omega g_\omega^* B_\omega^+(0)\exp[\mathrm{i}(\omega-\Omega)t] \end{aligned} \tag{16.39}$$

其中第二项的求和是

$$\sum_\omega |g_\omega|^2 \exp[\mathrm{i}(\omega-\Omega)(t-\tau)] = \int_0^\infty D(\omega)\,|g_\omega|^2 \exp[\mathrm{i}(\omega-\Omega)(t-\tau)]\mathrm{d}\omega$$

其中 $D(\omega)$ 是模密度，$D(\omega) = V\omega^3/(\pi^2 c^3)$. 当 $(t-\tau)$ 不是特别小的时候，当 $\omega \neq \Omega$ 时，指数部分随 t 的振荡很快，只有 $\omega \approx \Omega$ 时，积分的值才较大. 因此，$|g_\omega|^2 \approx |g_\Omega|^2$.

$$\sum_\omega |g_\omega|^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\Omega)(t-\tau)}$$

$$= D(\Omega)\,|g_\Omega|^2\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\mathrm{i}(\omega-\Omega)(t-\tau)\right]\mathrm{d}(\omega-\Omega)$$

$$\approx D(\Omega)\,|g_\Omega|^2\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\mathrm{i}(\omega-\Omega)(t-\tau)\right]\mathrm{d}(\omega-\Omega)$$

$$= D(\Omega)\,|g_\Omega|^2\left[2\pi\delta(t-\tau)\right] \tag{16.40}$$

$$\dot{a}^+ = -\int_0^t 2\pi a^+(\tau)D(\Omega)\,|g_\Omega|^2\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau + \mathrm{i}\sum_\omega g_\omega^* B^+(0)\exp\left[\mathrm{i}(\omega-\Omega)t\right] \tag{16.41}$$

特别注意，τ 的变化范围最大是到 t，而且 δ 函数是对称函数，所以 $\dot{a}^+$ 的左边第一项为

$$\int_0^t a^+(\tau)2\pi D(\Omega)\,|g_\Omega|^2\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$= \int_0^\infty a^+(\tau)2\pi D(\Omega)\,|g_\Omega|^2\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} a^+(\tau)2\pi D(\Omega)\,|g_\Omega|^2\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$= \pi\,|g_\Omega|^2 D(\Omega)a^+(t) \tag{16.42}$$

$$\dot{\tilde{a}}^+ = -\kappa\tilde{a}^+ + \tilde{F}^+(t) \tag{16.43}$$

$$\kappa \equiv \pi\,|g_\Omega|^2 D(\Omega) \tag{16.44}$$

$$\left.\begin{aligned}\tilde{F}^+(t) &= \mathrm{i}\sum_\omega g_\omega^* B_\omega^+(0)\exp\left[\mathrm{i}(\omega-\Omega)t\right]\\ \tilde{F}(t) &= -\mathrm{i}\sum_\omega g_\omega B_\omega(0)\exp\left[-\mathrm{i}(\omega-\Omega)t\right]\end{aligned}\right\} \tag{16.45}$$

$$\dot{a}^+ = \mathrm{i}\Omega a^+ - \kappa a^+ + \mathrm{i}\sum_\omega g_\omega^* B_\omega^+(0)\exp\left[\mathrm{i}\omega t\right]$$

$$= \mathrm{i}\Omega a^+ - \kappa a^+ + F^+(t) \tag{16.46}$$

$$F^+(t) = \mathrm{i}\sum_\omega g_\omega^* B_\omega^+(0)\exp\left[\mathrm{i}\omega t\right] \tag{16.47}$$

起伏力是无规力，其原因在于 $B_\omega(0)$ 是无规的，

$$\langle\tilde{F}^+(t)\rangle_B = \mathrm{i}\sum_\omega g_\omega^*\exp\left[\mathrm{i}(\omega-\Omega)t\right]\langle B_\omega^+(0)\rangle = 0 \tag{16.48}$$

同理

$$\langle\tilde{F}(t)\rangle_B = 0$$

在量子力学中的朗之万方程中，计算起伏力的关联 $\langle F^+(t)F(t')\rangle_B$ 和 $\langle F(t)F^+(t')\rangle_B$ 极其重要，为此，先计算 $\langle B_\omega^+ B_\omega\rangle_B$. 由于库 B 受体系 A 的影响很小，若 $t=0$ 时库处在热平衡，则在与体系的作用过程中仍能保持热平衡. 而热平衡的平均光子数由玻色-爱因斯坦分布决定，

$$\langle B_\omega^+(t)B_\omega(t)\rangle_B = \langle B_\omega^+(0)B_\omega(0)\rangle$$

$$=\bar{n}(\omega)=\frac{1}{e^{\hbar\omega/kT}-1} \tag{16.49}$$

由(16.45)式

$$\langle\tilde{F}^{+}(t)\tilde{F}(t')\rangle=\sum_{\omega}\sum_{\omega'}g_{\omega}^{*}g_{\omega'}\exp[i(\omega-\Omega)t]\times\exp[-i(\omega'-\Omega)t']\langle B_{\omega}^{+}(0)B_{\omega'}(0)\rangle \tag{16.50}$$

由于在初始时，$B_{\omega}^{+}(0)$和$B_{\omega}'(0)$是无关联的，

$$\langle B_{\omega}^{+}(0)B_{\omega}'(0)\rangle=\bar{n}_{\omega}\delta_{\omega\omega'} \tag{16.51}$$

$$\langle\tilde{F}^{+}(t)\tilde{F}(t')\rangle=\sum_{\omega}|g_{\omega}|^{2}\exp[i(\omega-\Omega)(t-t')]\bar{n}_{\omega}=D(\Omega)|g_{\Omega}|^{2}2\pi i\omega\delta(t-t')=2\kappa\bar{n}_{\omega}\delta(t-t') \tag{16.52}$$

与经典的扩散系数对比，可按下式定义扩散系数$\mathscr{D}_{a^{+}a}$

$$\left.\begin{aligned}\langle\tilde{F}^{+}(t)\tilde{F}(t')\rangle&=2\langle\mathscr{D}_{a^{+}a}\rangle_{B}\delta(t-t')\\\langle\mathscr{D}_{a^{+}a}\rangle_{B}&=2\kappa\bar{n}_{\omega}\end{aligned}\right\} \tag{16.53}$$

同理可证

$$\langle\tilde{F}(t)\tilde{F}^{+}(t')\rangle=2\kappa[\bar{n}_{\omega}+1]\delta(t-t') \tag{16.54}$$

16.2.4 光子算符的对易关系

利用光子算符方程和起伏的性质可以证明，引入起伏力之后，a和a^{+}的对易关系将不受到破坏. 为此，将(16.46)式对库取平均，

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle a^{+}(t)\rangle_{B}&=(i\Omega-\kappa)\langle a^{+}(t)\rangle_{B}\\\frac{d}{dt}\langle a(t)\rangle_{B}&=(-i\Omega-\kappa)\langle a(t)\rangle_{B}\end{aligned}\right\} \tag{16.55}$$

为了得到$\langle a^{+}a\rangle_{B}$的方程，利用(16.46)式的形式解

$$a^{+}(t)=a^{+}(0)\exp[(i\Omega-\kappa)t]+\int_{0}^{t}\exp[(i\Omega-\kappa)(t-\tau)]F^{+}(\tau)d\tau \tag{16.56}$$

由此可得到

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle a^{+}a\rangle&=\left\langle\left(\frac{da^{+}}{dt}a+a^{+}\frac{da}{dt}\right)\right\rangle\\&=-2\kappa\langle a^{+}a\rangle_{B}+\int_{0}^{t}\langle F^{+}(t)F(\tau)\rangle_{B}\times\exp[-(i\Omega+\kappa)(t-\tau)]d\tau\\&\quad+\int_{0}^{t}\langle F^{+}(t)F(\tau)\rangle_{B}\exp[(i\Omega-\kappa)(t-\tau)]d\tau\end{aligned}$$

$$+a^{+}(0)\exp\left[(\mathrm{i}\Omega-\kappa)t\right]\langle F(t)\rangle_{B}$$
$$+\langle F^{+}(t)\rangle_{B}a(0)\exp\left[(-\mathrm{i}\Omega-\kappa)t\right] \tag{16.57}$$

其中第二项为零，再利用起伏力的公式$\langle F^{+}F\rangle$，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle a^{+}a\rangle_{B}=-2\kappa\langle a^{+}a\rangle+2\kappa\bar{n}(T) \tag{16.58}$$

其中$\bar{n}(T)\equiv\bar{n}_{\Omega}(T)$是在温度$T$的角频率为$\Omega$的光子的平均数，同理可计算，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle aa^{+}\rangle_{B}$

故有

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle[a,a^{+}]\rangle_{B}&=-2\kappa\langle[a,a^{+}]\rangle+2\kappa\\ \langle[a,a^{+}]\rangle_{B,t}&=C'\exp\left[-2\kappa t\right]+1\end{aligned}\right\} \tag{16.59}$$

利用初始条件

$$\langle[a,a_{+}]\rangle_{B,0}=1$$

因此$C'=0$. 代入对易关系式得到

$$\langle[a,a^{+}]\rangle_{B't}=1 \tag{16.60}$$

这表明引入起伏力之后，光子的消灭算符与产生算符的对易关系仍然可以成立，即不受到耗散的破坏.

16.3 激光器的量子化朗之万方程

激光器的库理论的模型见图16.2，其中我们要研究的系统A包括场、原子、场与原子的作用. 此外还有系统A与库B的作用，即A与B有物质与能量交换过程. 库B的作用就对系统A产生耗散与起伏.

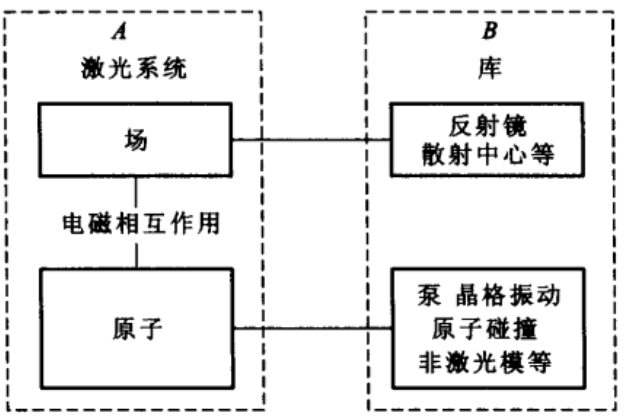


图16.2 激光器的库理论模型

系统A与库B的总的哈密顿量是

$$H=H_{\mathrm{L}}+H_{\mathrm{B}}+H_{\mathrm{L-B}}$$

其中激光系统的哈密顿量是

$$H_{\mathrm{L}}=H_{\mathrm{A}}(\text{原子})+H_{\mathrm{F}}(\text{场})+H_{\mathrm{F-A}}(\text{场与原子的作用}) \tag{16.61}$$

场的消灭算符是 a，产生算符是 a^{+}，光子能量是 $\hbar\Omega$，因此单模场的哈密顿量是

$$H_{\mathrm{F}}=\hbar\Omega a^{+}a \tag{16.62}$$

二能级原子总数是 N_0，第 μ 个原子能级间隔是 $\hbar\omega_\mu$，将原子能量的零点选在二能级正中间，上、下能级的能量分别是 $\left(\frac{1}{2}\hbar\omega_\mu\right)$ 和 $\left(-\frac{1}{2}\hbar\omega_\mu\right)$，对均匀加宽的二能级系统，$\omega_\mu\equiv\omega$. 原子的哈密顿量是

$$H_{\mathrm{A}}=\sum_{\mu=1}^{N_0}\frac{1}{2}\hbar\omega_\mu\,(\sigma_z)_\mu \tag{16.63}$$

其中 σ_z 是泡利算符，$(\sigma_z)_\mu$ 是第 μ 个原子的粒子数差的算符.

单模光场与二能级原子的作用的耦合常数是 g_μ，

$$H_{\mathrm{F-A}}=\sum_{\mu}g_\mu\hbar\,(a^{+}\,\sigma_\mu^{-}+a\sigma_\mu^{+}) \tag{16.64}$$

由(16.62)，(16.63)和(16.64)式，得到

$$H_{\mathrm{L}}=\hbar\Omega a^{+}a+\sum_{\mu=1}^{N_0}\frac{1}{2}\hbar\omega_\mu\,(\sigma_z)_\mu+\sum_{\mu=1}^{N_0}\hbar g_\mu(a^{+}\,\sigma_\mu^{-}+a\sigma_\mu^{+}) \tag{16.65}$$

对于均匀加宽的二能级原子，原子总数是 N_0，(16.65)式变为

$$H_{\mathrm{L}}=\hbar\Omega a^{+}a+\frac{1}{2}N_0\hbar\omega\sigma_z+N_0\hbar g(a^{+}\sigma^{-}+a\sigma^{+}) \tag{16.66}$$

在以上诸式中，

$$\left.\begin{aligned}\sigma^{+}&=|a\rangle\langle b|\\ \sigma^{-}&=|b\rangle\langle a|\\ \sigma^{+}&=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\\ \sigma^{-}&=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\\ \sigma_z&=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\end{aligned}\right\} \tag{16.67}$$

利用方程(16.64)可证下面的关系式

$$\left.\begin{aligned}[\sigma^{+},\sigma^{-}]&=|a\rangle\langle a|-|b\rangle\langle b|\\ [\sigma^{+},\sigma^{-}]&=\sigma_z\\ \sigma_z&=|a\rangle\langle a|-|b\rangle\langle b|\end{aligned}\right\} \tag{16.68}$$

$$\left.\begin{aligned}[\sigma^-,\sigma_z]&=2\sigma^-\\ [\sigma^+,\sigma_z]&=-2\sigma^+\end{aligned}\right\} \tag{16.69}$$

对易关系式(16.68)和(16.69),可推广到不同原子的上升算符、下降算符的对易关系.考虑到不同原子的 $\sigma^+,\sigma^-,\sigma_z$ 是对易的,因此,对第 i 和 j 个原子,有如下的对易关系

$$[\sigma_i^+,\sigma_j^-]=(\sigma_z)_i\delta_{ij} \tag{16.70}$$

$$[(\sigma_z)_i,\sigma_j^+]=2\sigma_i^+\delta_{ij} \tag{16.71}$$

$$[(\sigma_z)_i,\sigma_j^-]=-2\sigma_i^-\delta_{ij} \tag{16.72}$$

$$\begin{aligned}\dot a&=\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[a,\hbar\Omega a^+a]+\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\Big[a,\sum_\mu\hbar g_\mu(a^+\sigma_\mu^-+a\sigma_\mu^+)\Big]\\&=-\mathrm{i}\Omega[a,a^+]a-\mathrm{i}\Big[a,\sum_\mu g_\mu a^+\sigma_\mu^-\Big]\\&=-\mathrm{i}\Omega a-\mathrm{i}\sum_\mu g_{\mu'}\sigma_\mu^-\end{aligned} \tag{16.73}$$

$$\begin{aligned}\dot\sigma_\mu^-&=\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\Big[\sigma_\mu^-,\sum_{\mu'}\frac{1}{2}\hbar\omega_{\mu'},(\sigma_z)_{\mu'}\Big]\\&\quad+\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\Big[\sigma_\mu^-,\sum_{\mu'}\hbar g_{\mu'}(a^+\sigma_{\mu'}^-+a\sigma_{\mu'}^+)\Big]\\&=-\mathrm{i}\frac{1}{2}\Big[\sigma_\mu^-,\sum_{\mu'}\omega_{\mu'}(\sigma_z)_{\mu'}\Big]-\mathrm{i}\Big[\sigma_\mu^-,\sum_{\mu'}\hbar g_{\mu'}a\sigma_{\mu'}^+\Big]\\&=-\mathrm{i}\omega_\mu\sigma_\mu^-+\mathrm{i}g_\mu a(\sigma_z)_\mu\end{aligned} \tag{16.74}$$

$$\begin{aligned}(\dot\sigma_z)_\mu&=\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\Big[(\sigma_z)_\mu,\sum_{\mu'}\hbar g_{\mu'}(a^+\sigma_{\mu'}^-+a\sigma_{\mu'}^+)\Big]\\&=-\mathrm{i}a^+\Big[(\sigma_z)_\mu,\sum_{\mu'}g_{\mu'}\sigma_{\mu'}^-\Big]-\mathrm{i}a\Big[(\sigma_z)_\mu,\sum_{\mu'}g_{\mu'}\sigma_{\mu'}^+\Big]\\&=2\mathrm{i}g_\mu(\sigma_\mu^-a^+-a\sigma_\mu^+)\end{aligned} \tag{16.75}$$

对于多模激光器.第 λ 个模的算符,第 μ 个原子的算符分别是 a_λ,$\sigma_\mu^-,\sigma_{z,\mu}$,耦合常数是 $g_{\mu\lambda}$,(16.73)、(16.74)和(16.75)式则推广为

$$\dot a_\lambda=-\mathrm{i}\Omega a-\kappa_\lambda a-\mathrm{i}\sum_\mu g_{\mu\lambda}\sigma_\mu^-+F_\lambda(t) \tag{16.76}$$

$$\dot\sigma_\mu^-=-\mathrm{i}\omega_\mu\sigma_\mu^--\gamma_\parallel\sigma_\mu^-+\mathrm{i}\sum_\lambda g_{\mu\lambda}a_\lambda(\sigma_z)_\mu+\Gamma_\mu^-(t) \tag{16.77}$$

$$(\dot\sigma_z)_\mu=\gamma_\parallel[d_0-(\sigma_z)_\mu]+2\mathrm{i}\sum_\lambda g_{\mu\lambda}(\sigma_\mu^-a_\lambda^+-a_\lambda\sigma_\mu^+)+\Gamma_{z,\mu}(t) \tag{16.78}$$

这就是哈肯《协同学》中的方程式(8.2),(8.3)和(8.4)*.

* Haken H. Synergetics——An Introduction. 3rd ed. Berlin: Springer-Verlag, 1983

$\dot{a}$ 是场算符方程，$\dot{\sigma}^-$ 是偶极矩算符方程，$(\dot{\sigma}_z)_\mu$ 是反转粒子数算符方程.

对于均匀加宽的二能级原子，各个原子的 $\omega_\mu,\sigma_\mu,(\sigma_z)_\mu$ 是没区别的，引入

$$\left.\begin{aligned}\omega_\mu &\equiv \omega\\ g_\mu &= g\\ \sigma_\mu^- &\equiv \sigma^-\\ (\sigma_z)_\mu &\equiv \sigma_z\end{aligned}\right\} \tag{16.79}$$

再分别对场算符 a、偶极矩算符 σ^- 及反转粒子数算符 σ_z 引入耗散及起伏力，则得到单模激光器的全量子的朗之万方程[3][6].

$$\dot{a} = -\mathrm{i}\Omega a - \mathrm{i}gN_0\sigma^- - \kappa a + F(t) \tag{16.80}$$

$$\dot{\sigma}^- = -\mathrm{i}\omega\sigma^- + \mathrm{i}ga\sigma_z - \gamma_\perp\sigma^- + \Gamma^-(t) \tag{16.81}$$

$$\dot{\sigma}_z = 2\mathrm{i}g(\sigma^- a^+ - a\sigma^+) + \gamma_\parallel(d_0 - \sigma_z) + \Gamma_z(t) \tag{16.82}$$

其中 g 是 8.2 节给出的耦合常数，κ 是场算符的耗散，$\gamma_\perp$ 和 $\gamma_\parallel$ 分别是横向弛豫和纵向弛豫速率，d_0 是没有激光作用时由于泵浦过程和非相干过程(衰减)导致的平衡的反转粒子数[3][4]，$F(t),\Gamma^-(t)$ 和 $\Gamma_z(t)$ 分别是作用于场、偶极矩及反转粒子数算符的起伏力，它们各自对库的平均都是零，

$$\left.\begin{aligned}\langle F(t)\rangle &= 0\\ \langle \Gamma^-(t)\rangle &= 0\\ \langle \Gamma_z(t)\rangle &= 0\end{aligned}\right\} \tag{16.83}$$

16.4 单模激光的朗之万方程的求解

本节研究严格共振($\Omega=\omega$)的均匀加宽的二能级介质的单模激光器，先给出朗之万方程的解，再讨论解的物理意义，最后讨论单模激光的福克-普朗克方程及光子统计问题.

首先介绍单模激光的绝热近似解，采用慢变近似，引入

$$a = \tilde{a}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t},\quad \sigma^- = \tilde{\sigma}^-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t},\quad F = \tilde{F}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t}$$

并在以下的计算中略去记号“～”，则由(16.80)，(16.81)和(16.82)式得到慢变振幅的方程

$$\dot{a} = -\kappa a - \mathrm{i}gN_0\sigma^- + F(t) \tag{16.84}$$

$$\dot{\sigma}^- = -\gamma_\perp\sigma^- + \mathrm{i}ga\sigma_z + \Gamma^-(t) \tag{16.85}$$

$$\dot{\sigma}_z = \gamma_\parallel(d_0 - \sigma_z) + 2\mathrm{i}g(a^+\sigma^- - a\sigma^+) + \Gamma_z(t) \tag{16.86}$$

其中 $a,\sigma^-,\sigma_z,F(t),\Gamma^-(t)$ 和 $\Gamma_z(t)$ 均为慢变振幅，为了求解方程，先求

σ^- 的形式解，再分别代入(16.84)和(16.86)式.

为求 σ^- 的形式解，将(16.85)式的变量改为 τ

$$\frac{\mathrm{d}\sigma^-}{\mathrm{d}\tau}=-\gamma_\perp\sigma^-(\tau)+\mathrm{i}ga(\tau)\sigma_z(\tau)+\Gamma^-(\tau)$$

将上式两端分别乘 $\exp[-\gamma_\perp(t-\tau)]$，再求 $\int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}\tau$，即

$$\text{左边}=\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\gamma_\perp(t-\tau)}\mathrm{d}\sigma^-=\sigma^-(t)-\gamma_\perp\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\gamma_\perp(t-\tau)}\sigma^-\mathrm{d}\tau \tag{16.87}$$

$$\text{右边}=-\gamma_\perp\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\gamma_\perp(t-\tau)}\sigma^-\,\mathrm{d}\tau+\mathrm{i}g\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\gamma_\perp(t-\tau)}a(\tau)\sigma_z(\tau)\mathrm{d}\tau+\hat{\Gamma}^-(t) \tag{16.88}$$

其中

$$\hat{\Gamma}^-(t)=\int_{-\infty}^{t}\Gamma^-(\tau)\mathrm{e}^{-\gamma_\perp(t-\tau)}\mathrm{d}\tau \tag{16.89}$$

令左边等于右边，则有

$$\sigma^-=\mathrm{i}g\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\gamma_\perp(t-\tau)}a(\tau)\sigma_z(\tau)\mathrm{d}\tau+\hat{\Gamma}^-(t) \tag{16.90}$$

这里我们将采用极重要的绝热近似，即认为在偶极矩 σ^- 的弛豫时间 $T_2=1/\gamma_\parallel$ 内，$a(\tau)$ 和 $\sigma_z(\tau)$ 的变化可忽略，其物理意义是当场的慢变振幅 $a(\tau)$ 随时间变化时，原子的偶极矩能瞬时地跟随场的变化. 这从 $T_1=1/\gamma_\parallel\gg T_2=1/\gamma_\perp$，$1/\kappa\gg T_1$ 即可看出. 激光器的损耗小，$1/\kappa$ 大. 这样，可把(16.90)中的 $a(\tau)$ 和 $\sigma_z(\tau)$ 从积分号中提出来，

$$\begin{aligned}\sigma^-&=\mathrm{i}ga(\tau)\sigma_z(\tau)\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\gamma_\perp(t-\tau)}\mathrm{d}\tau+\hat{\Gamma}^-(t)\\&=\mathrm{i}ga(t)\sigma_z(t)/\gamma_\perp\end{aligned} \tag{16.91}$$

将(16.91)式代入方程(16.84)，则

$$\dot{a}=-\kappa a+g^2N_0a\sigma_z/\gamma_\perp+\hat{F}(t) \tag{16.92}$$

$$\hat{F}=F(t)+\mathrm{i}gN_0\Gamma^- \tag{16.93}$$

(16.92)式中第一项是耗散，第二项是受激辐射，第三项是起伏力，它包括直接影响场的起伏力 F 以及偶极矩 σ^- 的起伏力 Γ^-.

为了从方程(16.92)式中消去 σ_z 将 σ^- 代入 $\dot{\sigma}_z$，利用(16.91)式，

$$\dot{\sigma}_z=\gamma_\parallel(d_0-\sigma_z)-4g^2a^+a\sigma_z/\gamma_\perp+\Gamma_z(t) \tag{16.94}$$

其中第一项是反转粒子数的耗散，第二项是受激辐射，使反转粒子数减少，第三项是影响粒子数的起伏. 这里考虑到反转粒子数主要受弛豫和受激辐射的影响，可忽略起伏作用 $\Gamma_z(t)$. 或者从另一方面看，激光器的反转粒子数密度很高，由统计物理可知，粒子数越大，起伏越小，故有

$$\dot{\sigma}_z=\gamma_{\parallel}(d_0-\sigma_z)-4g^2a^+a\sigma_z/\gamma_{\perp} \tag{16.95}$$

现在再一次假定原子能瞬时跟随场的变化[3]，即在 $\dot{a}$ 的方程中，忽略 σ_z 随时间的变化，即

$$\dot{\sigma}_z=0 \tag{16.96}$$

由(16.96)式和(16.95)式得到

$$\sigma_z=d_0/[1+4g^2a^+a/\gamma_{\parallel}\gamma_{\perp}] \tag{16.97}$$

此式反映了增益饱和，与半经典理论公式相似.

当激光器在阈值附近工作时，光子数较少，a^+a 较小，(16.97)式可展开为

$$\sigma_z=d_0-4g^2a^+ad_0/\gamma\gamma_{\perp} \tag{16.98}$$

此式中 d_0 是没激光作用时由泵浦和弛豫过程决定的平衡时的反转粒子数. 当激光器工作时，反转降低，故有 $\sigma_z<d_0$. 由于第二项中 a^+a 较小，因此可在第二项中用临界反转 d_c 代替 d_0，即

$$\sigma_z=d_0-4(g^2/\gamma_{\parallel}\gamma_{\perp})d_ca^+a \tag{16.99}$$

将(16.99)式代入 $\dot{a}$ 的方程(16.92)，则

$$\dot{a}=(D_0g^2/\gamma_{\perp})a-\kappa a-4(g^4/\gamma_{\parallel}\gamma_{\perp}^2)D_caa^+a+\hat{F}(t) \tag{16.100}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}D_0&=N_0d_0\\D_c&=N_0d_c\end{aligned}\right\} \tag{16.101}$$

阈值条件由线性增益等于耗散决定，即

$$D_c=\kappa\gamma_{\perp}/g^2 \tag{16.102}$$

将(16.102)式代入(16.100)式，则

$$\dot{a}=\left(-\kappa+\frac{g^2}{\gamma_{\perp}}D_0\right)a-4\frac{g^2\kappa}{\gamma_{\parallel}\gamma_{\perp}}aa^+a+\hat{F}(t) \tag{16.103}$$

$$\dot{a}=Ga-B'aa^+a+\hat{F}(t) \tag{16.104}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}B'&=4\frac{g^2\kappa}{\gamma\gamma_{\perp}}\\G&=G'-\kappa\\G'&=D_0g^2/\gamma_{\perp}\end{aligned}\right\} \tag{16.105}$$

其中 G' 是小信号增益，κ 是损耗，$G'-\kappa$ 是线性净增益，B' 是自饱和参数. 显然，(16.104)式与拉姆学派的半经典及全量子的激光理论的结果一致，只是多了总的起伏力 $\hat{F}(t)$.

(16.104)式表明，在低于阈值时，$\dot{a}$ 主要由总的起伏力 $\hat{F}(t)$ 决定，因

此，辐射是无规则的. 又由于起伏力是高斯型的，因此光子分布是高斯分布，这正是热辐射特点.

用朗之万方程可讨论激光器在阈值以下及以上的行为[6].

低于阈值时，$B'\approx 0$，(16.105)式变为

$$\dot{a}=Ga+\hat{F}(t)=-|G|a+\hat{F}(t) \tag{16.106}$$

其形式解是

$$a(t)=\int_0^t \mathrm{e}^{-G(t-\tau)}\hat{F}(t)\mathrm{d}\tau+a(0)\mathrm{e}^{-Gt} \tag{16.107}$$

高于阈值时，将 a 看成复数 q，

$$q=(r_0+r_f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(t)} \tag{16.108}$$

代入

$$\dot{q}=Gq-B\,|q|^2q+\hat{F}(t) \tag{16.109}$$

$$(r_0+r_f)\mathrm{i}\,\dot{\phi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}=-\dot{r}_f\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}+G(r_0+r_f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}-B'(r_0+r_f)^3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}+\hat{F}(t) \tag{16.110}$$

或者

$$(r_0+r_f)\mathrm{i}\phi(t)+\dot{r}_f=G(r_0+r_f)-B'(r_0+r_f)^3+\hat{F}(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi(t)} \tag{16.111}$$

对于大的 G，我们有

$$\dot{\phi}=\frac{1}{r_0}\mathrm{Im}(\hat{F}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}) \tag{16.112}$$

$$\dot{r}_f=Gr_0-B'r_0^3+Gr_f-3B'r_0^2r_f+\mathrm{Re}(\hat{F}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}) \tag{16.113}$$

如果 $\dot{r}_f=0$，则

$$\gamma_0^2=\frac{G}{B'}=\frac{G'-\kappa}{B'} \tag{16.114}$$

r_0^2 是平均光子数密度.

当 G 增大时，r_0^2 也增大，由(16.112)式可知 $\dot{\phi}$ 变小. 由于 $\dot{\phi}$ 越接近常数，则线宽越窄，因此由于 G 的增大可使激光线宽变窄.

16.5 福克-普朗克方程与光子统计

把 a 仍然看成复数，则(16.109)变为

$$\dot{a}=\left(-\kappa+\frac{g^2}{\gamma_\perp}D_0\right)a-4\,\frac{g^2\kappa}{\gamma\gamma_\perp}|a|^2a+\hat{F} \tag{16.115}$$

将右边除 $\hat{F}$ 之外的部分看成朗之万方程的 $K(q)$，由(16.26)式可得到势

函数和分布函数

$$V(|a|)=-\left(-\kappa+\frac{g^2}{\gamma_\perp}D_0\right)|a|^2+2\frac{g^2\kappa}{\gamma_\parallel\gamma_\perp}|a|^4 \tag{16.116}$$

$$f_{st}(|a|)=N'\exp\left[-\frac{V(|a|)}{\mathscr{D}}\right] \tag{16.117}$$

由(16.116)式和(16.117)式可知：

(1) 低于阈值时，$\frac{g^2}{\gamma_\perp}D_0<\kappa$，这时 $f(|a|)$是$|a|$的高斯函数，即 f 是热辐射分布.

(2) 高于阈值时，$\frac{g^2}{\gamma_\perp}D_0>\kappa$，这时 $f(|a|)$不再是高斯分布，分布的峰值不在零点.

$f_{st}(|a|)$的曲线如图 16.3 所示.

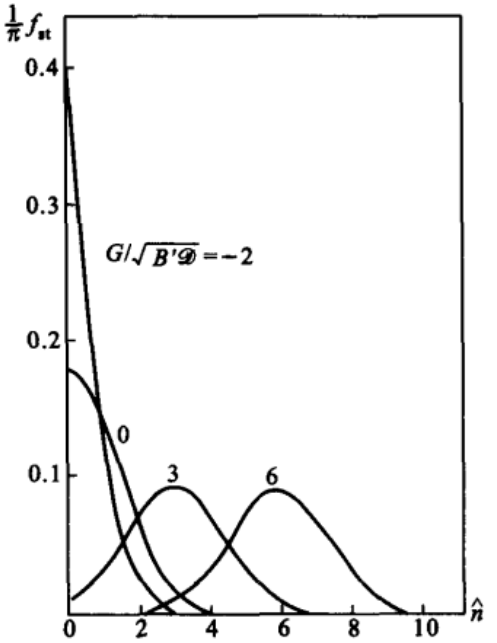


图 16.3 激光光子数的统计(其中四条曲线分别对应于 $G/\sqrt{B'\mathscr{D}}=-2,0,3,6$)
曲线−2 在阈值之下，f_{st}是高斯分布；曲线 0 是在阈值点；曲线 3,6 在阈值之上，f_{st}不是高斯分布

由(16.115)可得到福克-普朗克方程. 由(16.116)式和(16.117)式出发，采用经典的朗之万方程，也可验证福克-普朗克方程. 用极坐标 $q=re^{i\phi}$ 与拉姆理论相似，福克-普朗克方程是

$$\frac{\partial f}{\partial t}=-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[(Gr^2-B'r^4)f]+\mathscr{D}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}f\right\} \tag{16.118}$$

由激光器在低于阈值时的分布函数 f_1 可由(16.118)式求出，或者直接由(16.116)，(16.117)式得到

$$\left.\begin{aligned} f_1&=N'_1\exp\left[-V(|a|)/\mathscr{D}\right]\\ V(|a|)&=-\left(-\kappa+\frac{g^2}{\gamma_\perp}D_0\right)|a|^2\\ \frac{g^2D_0}{\gamma_\perp}&<\kappa \end{aligned}\right\} \tag{16.119}$$

在高于阈值时，分布函数

$$\left.\begin{aligned} f_2&=N'_2\exp\left[-V(|a|)/\mathscr{D}\right]\\ \frac{g^2D_0}{\gamma_\perp}&>\kappa \end{aligned}\right\} \tag{16.120}$$

$V(|a|)$由(16.116)式给出.

由分布函数还可求光子平均数$\langle n\rangle$和$\langle n^2\rangle$. 例如[6]

$$\langle a^+aa^+a\rangle=\int_0^\infty r^2\int_0^{2\pi}(r^4f)\mathrm{d}\phi\mathrm{d}r\equiv\langle n^2\rangle \tag{16.121}$$

分别用 f_1 及 f_2 求$\langle n^2\rangle$及$\langle n\rangle$. 定义

$$H_2=[\langle n^2\rangle-\langle n\rangle]/\langle n\rangle^2-1 \tag{16.122}$$

当低于阈值时

$$\langle n^2\rangle-\langle n\rangle=2\langle n\rangle^2,\quad H_2=1 \tag{16.123}$$

高于阈值时

$$\langle n^2\rangle-\langle n\rangle=\langle n\rangle^2,\quad H_2=0 \tag{16.124}$$

图 16.4 所示曲线表示 H_2 随$\langle n\rangle$的变化

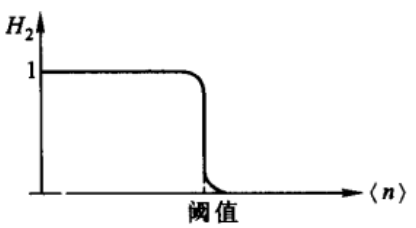


图 16.4　低于、高于、等于阈值时，光子数的均方差

习题与思考

(1) 证明$\langle F^+(t)a(t)\rangle_B=\frac{1}{2}\kappa\bar{n}(\Omega)$

其中 $\bar{n}$ 是黑体辐射的光子分布.

(2) 证明只有引入噪声算符(或起伏力),才能使$[a(t),a^{+}(t)]=1$成立.

(3) 给出$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a^{+}a)$的方程,并与拉姆的全量子理论的结果进行比较.

(4) 推导与方程(16.115)对应的福克-普朗克方程.

参考文献

[1] Haken H. A nonlinear theory of laser noise and coherence. Z. Phys., 1964, 181: 96 - 100.

[2] Haken H. Laser theory, encyclopedia of physics, XXV/2c. 2nd ed. Berlin: Springer, 1984.

[3] Lax M. In physics of quantum electronics. New York: McGraw-Hill, 1966.

[4] Lax M, Louisell W H. Quantum noise, Ⅲ, density-operator treatment of field and population fluctuations. Phys. Rev., 1969, 185, 568 - 591.

[5] Armstrnog J A, Smith A W. Intensity fluctuations in a GaAs laser. Phys. Rev. Lett., 1965, 14: 68 - 70.

[6] Arecchi F T, Rodari G S, Sona A. Statistics of the laser radiation at threshold. Phys. Lett., 1967, 25A: 59 - 63.

[7] Pike E R. Quantum optics. New York: Academic Press, 1970.

第 17 章　非线性光学的量子理论

本章介绍倍频、参量放大、四波混频以及双光子激光器的全量子理论.

17.1　倍　　频

我们先介绍非线性光学的一般概念、倍频(second-hamonic generation)的经典理论,最后给出量子化的哈密顿量和倍频的量子化方程.

17.1.1　非线性光学的概念

一般说,在线性光学中,介质的性质与光强无关,介质的极化强度与光场的一次方成正比.在光强比较强时,介质的极化强度与光场的关系不再是线性的,而是包含光场的二次方甚至更高次方.

当介质极化强度包含光场的非线性项时对它做傅里叶分析,会出现复杂的频率成分.

例如,把光场写成 $E_0\cos\omega t$,极化强度若与光场平方有关,即正比于 $\cos^2\omega t$,则

$$\cos^2\omega t=\frac{1}{2}(1+\cos 2\omega t) \tag{17.1}$$

其中按 2ω 频率振荡的成分即倍频或二次谐波,括号内的直流项,称为光学整流.若两个不同频率的光引起介质的非线性极化,例如极化强度含有 $\cos\omega_1 t\cos\omega_2 t$ 则

$$\cos\omega_1 t\cos\omega_2 t=\frac{1}{2}\cos[(\omega_1+\omega_2)t]+\frac{1}{2}\cos[(\omega_1-\omega_2)t] \tag{17.2}$$

其中 $(\omega_1+\omega_2)$ 及 $(\omega_1-\omega_2)$ 的成分,分别称为和频与差频.

非线性光学现象包括倍频、参量振荡、混频、非线性散射、饱和吸收、自聚焦、多光子过程等.当然,我们在本书中已介绍过的激光增益饱和、光学孤立子、光学双稳态、位相复共轭光学、光学混沌,都是非性光学现象.以后即将研究的共振荧光、光学压缩态等,也属于非线性光学.

17.1.2　倍频的经典理论

将非线性极化强度作为麦克斯韦方程的辐射源,这就是典型的经典

理论. 对于倍频，极化强度为

$$P_i(2\omega)=\sum_{jk}\chi_{ijk}(-2\omega,\omega,\omega)E_j^{(+)}(\omega)E_k^{(-)}(\omega) \tag{17.3}$$

χ_{ijk} 是极化率张量. 在电偶极近似下，可用量子力学算出 χ_{ijk}. 对于无耗散的介质

$$\chi_{ijk}(-\omega,2\omega,-\omega)=2\chi_{ijk}(-2\omega,\omega,\omega) \tag{17.4}$$

光场和光强分别为

$$E^{(+)}(\boldsymbol{r},t)\sum_j \boldsymbol{E}^{(+)}(\boldsymbol{k}_j,\omega_j)\exp\left[-\mathrm{i}(\omega_j t-\boldsymbol{k}_j\cdot\boldsymbol{r})\right] \tag{17.5}$$

$$I(\omega)=\frac{cn(\omega)}{2\pi}\left|\boldsymbol{E}^{(+)}(\omega)\right|^2 \tag{17.6}$$

$n(\omega)$ 是介质在频率 ω 的折射率. 将 $P_i(2\omega)$ 代入麦克斯韦方程，在慢变振幅近似下，得到

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}E_i^{(+)}(2\omega)}{\mathrm{d}z}&=\frac{\mathrm{i}2\pi(2\omega)^2}{k^{(i)}(2\omega)c^2}\sum_{jk}\chi_{ijk}(-2\omega,\omega,\omega)\\&\quad\times E_j^{(+)}(\omega)E_k^{(+)}(\omega)\cdot\exp(\mathrm{i}\Delta kz)\\\frac{\mathrm{d}E_i^{(+)}(\omega)}{\mathrm{d}z}&=\frac{\mathrm{i}4\pi\omega^2}{k^{(i)}(\omega)c^2}\sum_{jk}\chi_{ijk}(-2\omega,\omega,\omega)\\&\quad\times E_j^{(+)}(2\omega)E_k^{(-)}(\omega)\cdot\exp(-\mathrm{i}\Delta kz)\end{aligned}\right\} \tag{17.7}$$

在推导第二个方程时用到了(17.4)式，$k^{(i)}(\omega)\equiv n_i(\omega)\omega/c$.

$$\Delta k=\frac{\omega}{c}\left[-2n(2\omega)+n_j(\omega)+n_k(\omega)\right] \tag{17.8}$$

假定 $E(\omega)$ 是常数即只有很小部分的能量转换为 $E(2\omega)$，对(21.7)中的第一式积分，得到倍频光强为

$$I(2\omega)\propto E^4(\omega)l\omega^2\frac{\sin^2(\Delta kl/2)}{(\Delta kl/2)^2} \tag{17.9}$$

当 $\Delta k\to 0$ 时，倍频效率最高. 例如，设法使 $n(2\omega)=n(\omega)$，即相位匹配，则 $\Delta k=0$.

17.1.3 倍频的量子理论

倍频的相互作用哈密顿量为

$$H_{\mathrm{I}}=\hbar\sum_{ijk}\left[g_{ijk}(z)\hat{b}_i^{+}\hat{a}_j\hat{a}_k+\hbar\cdot c\right] \tag{17.10}$$

$$g_{ijk}=\frac{2\pi\omega}{n_i(2\omega)n_j(\omega)n_k(\omega)}\left(\frac{4\pi\hbar\omega}{V}\right)^{1/2}\times\chi_{ijk}(-2\omega,\omega,\omega)\exp(\mathrm{i}\Delta kz) \tag{17.11}$$

其中 V 是量子化体积(在这里就是光与非线性介质作用的体积)，$\hat{a}_j$，$\hat{a}_k$

分别是在 x，y 方向偏振的基波(ω)的消灭算符，$\hat{b}_x$，$\hat{b}_y$ 则是在两个偏振方向的二次谐波的消灭算符. H_1 的物理意义显然是消灭两个基波光子($\hat{a}_j\,\hat{a}_k$)同时产生一个倍频光子 $\hat{b}_i^+$，算符对易关系为

$$[\hat{a}\,,\hat{a}_j^+\,]=[\hat{b}\,,\hat{b}_j^+\,]=\delta_{i,j} \tag{17.12}$$

光场的量子化，即相当用下式代替经典场 $E_i^+(\omega)$

$$E_i^{(+)}(\omega)\to \mathrm{i}\left(\frac{2\pi\hbar\omega}{n_i^2(\omega)V}\right)^{1/2}a_i \tag{17.13}$$

用 H_1 及算符对易关系，可得到海森堡方程

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\,\hat{b}_i(z)}{\mathrm{d}z}&=\frac{\mathrm{i}n_i(2\omega)}{c}\sum_{jk}g_{ijk}(z)\hat{a}_j(z)\hat{a}_k(z)\\ \frac{\mathrm{d}\,\hat{a}_i(z)}{\mathrm{d}z}&=\frac{\mathrm{i}2n_i(\omega)}{c}\sum_{jk}g_{jik}^*(z)\hat{a}_k^+(z)b_j(z)\end{aligned}\right\} \tag{17.14}$$

其中 $i,j,k=x,y$(表示偏振). 取厄米共轭，即可得到和 $\hat{b}_i^+(z)$ 和 $\hat{a}_i^+(z)$ 的方程. 由于 $i=x,y$，所以共有 8 个方程. 注意这里用到了 $t\equiv -nz/c$.

方程(17.14)被用于研究倍频的各种量子效应，包括倍频的光学压缩态.

17.2 参量振荡与腔内四波混频

本节先介绍参量放大的半经典理论. 然后统一地处理参量振荡与腔内四波混频的全量子理论.

17.2.1 光学参量放大的经典理论

光学参量放大的物理过程是：当泵浦光(ω_p)与另一频率较低(ω_2)的光，共同作用于非线性介质，可对频率为 $\omega_3=(\omega_p-\omega_2)$ 的光进行放大. 至于参量放大，该名称来自电子学.

将非线性极化强度代入麦克斯韦方程，则

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}A_2^*}{\mathrm{d}z}&=-\frac{1}{2}\kappa_2A_2^*+\mathrm{i}\frac{g'}{2}A_3A_1\\ \frac{\mathrm{d}A_3}{\mathrm{d}z}&=-\frac{1}{2}\kappa_3A_3-\mathrm{i}\frac{g'}{2}A_3A_2^*\\ A_l&\equiv\sqrt{n_l/\omega_l}E_l,\quad l=1,2,3\end{aligned}\right\} \tag{17.15}$$

g' 是耦合常数. κ_2 和 κ_3 是损耗. 这是光学参量振荡的方程. 若 $\kappa_2=\kappa_3=0$，即无谐振腔的损耗，方程(17.15)简化为参量放大的方程. 特别当 $\omega_2=\omega_3$

时，则变为简并参量放大的方程

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}A_2^*}{\mathrm{d}z}&=\mathrm{i}\frac{g'}{2}A_1A_3\\ \frac{\mathrm{d}A_3}{\mathrm{d}z}&=-\mathrm{i}\frac{g'}{2}A_1A_2^*\end{aligned}\right\}\tag{17.16}$$

若初始条件为

$$\left.\begin{aligned}A_3(z=0)&=A_3(0)\\ A_2(z=0)&=A_2(0)\end{aligned}\right\}\tag{17.17}$$

则方程(17.16)的解为

$$\left.\begin{aligned}A_2^*(z)&=A_2^*(0)\cos\hbar\frac{g}{2}z+\mathrm{i}A_3(0)\sin\hbar\frac{g}{2}z\\ g&\equiv g'A_1\end{aligned}\right\}\tag{17.18}$$

这里假定泵浦光 A_1 比较强，而参量转换效率比较低，故把 A_1 当成常数. 此式适于 $k_1=k_2+k_3$.

若 $\Delta k\equiv k_1-k_2-k_3\neq 0$，方程(17.16)变为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}A_2^*}{\mathrm{d}z}&=\mathrm{i}\frac{g}{2}A_3\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Delta k)z}\\ \frac{\mathrm{d}A_3}{\mathrm{d}z}&=-\mathrm{i}\frac{g}{2}A_2^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Delta k)z}\end{aligned}\right\}\tag{17.19}$$

其解为

$$\left.\begin{aligned}A_3\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Delta k)z}&=A_3(0)\left[\cosh(bz)+\frac{\mathrm{i}\Delta k}{2b}\sinh(bz)\right]-\mathrm{i}\frac{g}{2b}A_2^*(0)\sinh(bz)\\ A_2^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Delta k)z}&=A_2^*(0)\left[\cosh(bz)-\frac{\mathrm{i}\Delta k}{2b}\sinh(bz)\right]+\mathrm{i}\frac{g}{2b}A_3(0)\sinh(bz)\end{aligned}\right\}\tag{17.20}$$

其中 $b=\sqrt{g^2-(\Delta k)^2}$.

17.2.2 参量振荡与四波混频的量子化哈密顿量

这里沿用 Walls 的思路统一处理这些过程. 极化率 χ 仍用经典的，但光场都是量子化的.

光与非线性介质的哈密顿量为

$$\left.\begin{aligned}H&=H_{\mathrm{F}}+H_{\mathrm{I}}+H_{\mathrm{E}}+H_{\mathrm{D}}\\ H_{\mathrm{F}}&=\sum_i\hbar\omega_i\hat{a}_i^+\hat{a}_i\\ H_{\mathrm{E}}&=\mathrm{i}\hbar E'\left[\exp(-\mathrm{i}\omega_{\mathrm{p}}t)\,\hat{a}_1-\exp(-\mathrm{i}\omega_{\mathrm{p}}t)\,\hat{a}_1\right]\\ H_{\mathrm{D}}&=\sum_i(\hat{a}_i^+\hat{\Gamma}_i+\hat{a}_i^+\hat{\Gamma}_i^+)\end{aligned}\right\}\tag{17.21}$$

其中 a_i^+，a_i 是第 i 个模的光子产生和消灭算符. 令泵浦模为$\hat{a}_1$，信号波模为 $\hat{a}_2$，$\hat{a}_3$. H_F 是自由场的哈密顿，H_E 表示泵浦光，泵浦波频率为 ω_p，振幅为 E'. H_D 是衰减项(damping)，$\hat{\Gamma}_i$，$\hat{\Gamma}_i^+$ 是曾用到过的表示耗散的算符. 相互作用哈密顿为

$$H_I=i\hbar(\kappa/2)((\hat{a}_1^+)^n\hat{c}-\hat{a}_1^n\,\hat{c}^+) \tag{17.22}$$

其中 κ 是耦合常数，它与非线性极化率成正比；n 是整数，$\hat{c}$ 是算符. H_I 可统一地描述下列非线性现象：

(1) $n=1$， $\hat{c}=\hat{a}_2^2$， 即简并参量振荡；

(2) $n=1$， $\hat{c}=\hat{a}_2\hat{a}_3$， 非简并参量振荡；

(3) $n=2$， $\hat{c}=\hat{a}_2^2$， 简并四波混频；

(4) $n=2$， $\hat{c}=\hat{a}_2\hat{a}_3$， 非简并四波混频.

参量振荡(或参量放大)，基本物理过程是泵浦光(ω_p)与信号光(ω_2)在非线性介质中作用，产生另一个频率(ω_3)的光，

$$\omega_p=\omega_2+\omega_3 \tag{17.23}$$

若 $\omega_2=\omega_3$ 时，称为简并参量振荡；$\omega_2\neq\omega_3$，则为非简并参量振荡. 四波混频，则是两个泵浦光和两个信号光在非线性介质中作用

$$2\omega_p=\omega_2+\omega_3 \tag{17.24}$$

$\omega_2=\omega_3$ 对应简并四波混频，否则即非简并四波混频.

对于非简并参量振荡和非简并四波混频，可引入下列算符

$$\left.\begin{aligned}\hat{b}_2&=\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_2+\hat{a}_3)\\ \hat{b}_3&=\frac{i}{\sqrt{2}}(\hat{a}_2-\hat{a}_3)\end{aligned}\right\} \tag{17.25}$$

相互作用哈密顿量为

$$H_I=i\hbar(\kappa/4)\{(\hat{a}_1^+)^n(\hat{b}_2^2+\hat{b}_3^2)-(\hat{a}_1)^n[(\hat{b}_2^+)^2+(\hat{b}_3^+)^2]\} \tag{17.26}$$

哈密顿量(17.22)式的厄米共轭的物理意义才准确代表这里的物理过程，例如$\hat{a}_3^+\ \hat{a}_2^+\ \hat{a}_1$ 代表泵浦光子消灭一个($\hat{a}_1$)，同时产生两个光子(ω_2 和 ω_3)即$\hat{a}_3^+$，$\hat{a}_2^+$. 第二项的物理过程相反，例如$\hat{a}_1^+\ \hat{a}_2\ \hat{a}_3$ 代表消灭两个光子(ω_2 和 ω_3)，产生一个泵浦光子 ω_p.

17.2.3 简并参量振荡器

利用 H_I 和算符对易关系，可以得到$\hat{a}_1$，$\hat{a}_2$ 的海森堡方程，然后再变成等价的 c 数的朗之万方程

$$\left.\begin{aligned}\dot{\alpha}_1 &= E-\bar{\gamma}_1\alpha_1-\frac{1}{2}\alpha_2^2\\ \dot{\alpha}_2 &= -\bar{\gamma}_2\alpha_2+\alpha_1\alpha_2^{+}+\Gamma_{\alpha_2}\end{aligned}\right\} \tag{17.27}$$

$$\left.\begin{aligned}E &= \kappa E'\\ \alpha_i &= (\kappa/2)\alpha_i'\end{aligned}\right\} \tag{17.28}$$

$$\bar{\gamma}_i=\gamma_i+\Delta_i \tag{17.29}$$

这里 α_i'即相干态光场，所以 α_i 和 α_i'都是复数而不再是算符. 对方程两边取共轭，可得到 α_1^{+} 和 α_2^{+} 的方程. 显然，量子化的方程(17.27)比经典方程多出了起伏项 Γ_{α_2}，起伏项的关联式为

$$\left.\begin{aligned}\langle\Gamma_{\alpha_2}(t)\Gamma_{\alpha_2}(t')\rangle &= -\kappa^2\alpha_1\delta(t-t')\\ \langle\Gamma_{\alpha_2}^{+}(t)\Gamma_{\alpha_2}^{+}(t')\rangle &= -\kappa^2\alpha_1^{+}\delta(t-t')\end{aligned}\right\} \tag{17.30}$$

其他的关联式为零. 在(17.29)式中，$\gamma_i(i=1,2)$都是腔的衰减常数，而 Δ_i 是腔的失谐参数

$$\left.\begin{aligned}\Delta_1 &= \omega_1-\omega_{\mathrm{p}}\\ \Delta_2 &= \omega_2-\omega_{\mathrm{s}}\\ \Delta_3 &= \omega_3-\omega_{\mathrm{i}}\end{aligned}\right\} \tag{17.31}$$

特别注意，这里 $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ 都是参量振荡器的谐振腔的模，$\omega_{\mathrm{p}},\omega_{\mathrm{s}},\omega_{\mathrm{i}}$ 分别是泵浦光、信号光、空载光(idler)的频率.

17.2.4 非简并参量振荡器

对于非简并的参量振荡器，仍用 $\alpha_i=(\kappa/2)\alpha_i'$，$\alpha_i'$是相干态光场，方程为

$$\left.\begin{aligned}\dot{\alpha}_1 &= E-\bar{\gamma}_1\alpha_1-\alpha_2\alpha_3\\ \dot{\alpha}_2 &= -\bar{\gamma}_2\alpha_2+\alpha_1\alpha_3^{+}+\Gamma_{\alpha_2}\\ \dot{\alpha}_3 &= -\bar{\gamma}_3\alpha_3+\alpha_1\alpha_2^{+}+\Gamma_{\alpha_3}\\ \langle\Gamma_{\alpha_2}(t)\Gamma_{\alpha_2}(t')\rangle &= -(\kappa/2)^2\alpha_1\delta(t-t')\end{aligned}\right\} \tag{17.32}$$

另外还有复共轭的方程.

特别当 $\bar{\gamma}_2=\bar{\gamma}_3$ 时，引如下面的复数更方便

$$\beta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_2+\alpha_3),\quad \beta_3=\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}(\alpha_2-\alpha_3)$$

方程(17.32)变为

$$\left.\begin{aligned}
&\dot{\alpha}_1 = E-\bar{\gamma}_1\alpha_1-\frac{1}{2}(\beta_2^2+\beta_3^2)\\
&\dot{\beta}_2 = -\bar{\gamma}_2\beta_2+\alpha_1\beta_2^*+\Gamma_{\beta_2}\\
&\dot{\beta}_3 = -\bar{\gamma}_2\beta_3+\alpha_1\beta_3^*+\Gamma_{\beta_3}\\
&\langle\Gamma_{\beta_2}(t)\Gamma_{\beta_2}(t')\rangle = -(\kappa/2)^2\alpha_1\delta(t-t')\\
&\langle\Gamma_{\beta_2}(t)\Gamma_{\beta_2}(t')\rangle = -(\kappa/2)^2\alpha_1\delta(t-t')
\end{aligned}\right\} \tag{17.33}$$

还有方程组(17.33)的复数共轭方程. 应同时使用

17.2.5 简并四波混频

我们曾专门介绍过四波混频的半经典理论. 这里用量子化的哈密顿量,得到海森堡方程,再用相干态光场(复数)代替算符,则有简并四波混频的量子力学方程(这里 $\alpha_i=(\kappa)^{1/2}\alpha_i'$):

$$\left.\begin{aligned}
&\dot{\alpha}_1 = E-\bar{\gamma}_1\alpha_1-\alpha_1^*\alpha_2^2+\Gamma_{\alpha_1}\\
&\dot{\alpha}_2 = -\gamma_2\alpha_2+\alpha_1^2\alpha_2^*+\Gamma_{\alpha_2}\\
&\langle\Gamma_{\alpha_1}(t)\Gamma_{\alpha}(t')\rangle = \kappa\alpha_2^2\delta(t-t')\\
&\langle\Gamma_{\alpha_2}(t)\Gamma_{\alpha_3}(t')\rangle = -\kappa\alpha_1^2\delta(t-t')
\end{aligned}\right\} \tag{17.34}$$

应用时再加上方程组(17.34)的复数共轭方程.

17.2.6 非简并四波混频

令 $\alpha_i=(\kappa/2)^{1/2}\alpha_i'$,$\alpha_i'$是相干态光场. 用类似方法,容易得到非简并四波混频的量子力学方程组

$$\left.\begin{aligned}
&\dot{\alpha}_1 = E-\bar{\gamma}_1\alpha_1-\alpha_1^*(\beta_2^2+\beta_3^2)+\Gamma_{\alpha_1}\\
&\dot{\beta}_2 = -\bar{\gamma}_2\beta_2+\alpha_1^2\beta_2^*+\Gamma_{\beta_2}\\
&\dot{\beta}_3 = -\bar{\gamma}_2\beta_3+\alpha_1^2\beta_3^*+\Gamma_{\beta_3}\\
&\bar{\gamma}_2 = \gamma_3
\end{aligned}\right\} \tag{17.35}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\langle\Gamma_{\alpha_1}(t)\Gamma_{\alpha_1}(t')\rangle = (\kappa/2)(\beta_2^2+\beta_3^2)\delta(t-t')\\
&\langle\Gamma_{\beta_2}(t)\Gamma_{\beta_2}(t')\rangle = -(\kappa/2)\alpha_1^2\delta(t-t')\\
&\langle\Gamma_{\beta_3}(t)\Gamma_{\beta_3}(t')\rangle = -(\kappa/2)\alpha_1^2\delta(t-t')
\end{aligned}\right\} \tag{17.36}$$

再加上这两个方程组的复共轭方程,其中 β_2,β_3 的定义同 17.2.4 节.

17.2.7 参量振荡与腔内四波混频的定态解

一般的参量振荡和腔内四波混频是连续输出的. 这时可由定态解来描述. 为此,取方程(17.27)、(17.33)、(17.34)和(17.35)中所有的 $\dot{\alpha}_i=$

$\dot{\beta}_i=0$. 在经典情况，起伏项也为零. 这时，朗之万方程就变成简单的代数方程了. 例如简并参量振荡

$$|\alpha_2|^2=2\Delta_1\Delta_2-\gamma_1\gamma_2\pm[E^2-(\gamma_1\Delta_2+\gamma_2\Delta_1)^2]^{1/2} \tag{17.37}$$

非简并参量振荡

$$|\beta_2|^2=|\alpha_2|^2/2 \tag{17.38}$$

简并四波混频

$$|\alpha_2|^2=\gamma_2^{-1}\{\Delta_1\Delta_2-\gamma_1\gamma_2\pm[|\bar{\gamma}_2|E^2-(\gamma_1\Delta_2+\gamma_2\Delta_1)^2]^{1/2}\} \tag{17.39}$$

非简并四波混频

$$|\beta_2|^2=|\alpha_2|^2/2 \tag{17.40}$$

在(17.37)～(17.40)式中，方括号前的±号表示，$|\alpha_2|^2$ 只取正值. (17.38)和(17.40)式还表明，非简并情况的信号振幅只是简并情况的 1/2. 这是因为对前者，泵浦光供给两个模的振荡能量，而对简并情况，泵浦光只供给一个模的振荡.

1987 年，Walls 用上述的动力学方程研究了光学压缩态.

17.3 双光子激光器的半经典理论

1965 年普罗霍罗夫提出了双光子激光器的建议. 普通的激光器，上、下能级间的一次跃迁只发射一个光子或吸收一个光子. 双光子激光器的特点在于一次跃迁可产生两个光子，频率分别为 ω_1 和 ω_2 即

$$\omega_{ab}=\omega_1+\omega_2 \tag{17.41}$$

双光子激光器的半经典理论，首先要计算双光子作用的极化强度，然后用拉姆的场方程和频率方程分别研究光强和频率特性.

用半经典理论，在平均场近似和旋转波近似下，可以求出近共振双光子作用的极化强度

$$P_j=\varepsilon_0E_j(\chi_j^{L}+\chi_j^{NL}) \tag{17.42}$$

其中 $j=1,2$ 对应频率 ω_1 和 ω_2. $\varepsilon_0E_j\chi_j^{L}$ 是线性极化强度，$\varepsilon_0E_j\chi_j^{NL}$ 是非线性极化强度

$$P_j^{NK}=\varepsilon_0E_j\chi_j^{NL},\quad j=1,2 \tag{17.43}$$

$$\chi_j^{NL}=\chi_0\left\{\frac{i+\Delta}{1+\Delta^2+I_1I_2}I_{3-j}+\frac{T_1}{T_2}\frac{i+\Delta^2}{1+\Delta^2+I_1I_2}\right\} \tag{17.44}$$

其中 χ_0 是一个常数，I_1 和 I_2 分别是频率为 ω_1 和 ω_2 的光强，T_1 和 T_2 分别为纵向及横向弛豫时间，Δ 是离谐参数

$$\Delta=(\omega_{ab}-\omega_1-\omega_2)T_1+\frac{1}{2}(\delta_1I_1+\delta_2I_2) \tag{17.45}$$

显然其中第一项是接 $1/T_1$ 归一化的失谐量，第二项是与光强有关的失谐量. 注意静电场引起的频率移动与电场成正比，即斯塔克效应. 现在把光场看成动态或交流的电场，所以 $\delta_1 I_1$ 和 $\delta_2 I_2$ 对频移的贡献称为动态或交流斯塔克效应. 当 $\omega_1=\omega_2\equiv\omega$，$\omega_{ab}=2\omega$ 时，即简并情况，$I_1=I_2$，$\delta_1=\delta_2$. 此外，注意在非简并的情况下，χ_1 和 I_2 有关，而 χ_2 和 I_1 有关.

利用拉姆的场方程和频率方程，对于 $j=1,2$，有

$$\left.\begin{aligned}
\dot{E}_1&=-\frac{1}{2}\frac{\omega_1}{Q_1}E_1-\frac{1}{2}\omega_1 E_1\,\mathrm{Im}\,\chi_1\\
\omega_1+\dot{\phi}_1&=\Omega_1-\frac{1}{2}\omega_1\,\mathrm{Re}\,\chi_1\\
\dot{E}_2&=-\frac{1}{2}\frac{\omega_2}{Q_2}E_2-\frac{1}{2}\omega_2 E_2\,\mathrm{Im}\,\chi_2\\
\omega_2+\dot{\phi}_2&=\Omega_2-\frac{1}{2}\omega_2\,\mathrm{Re}\,\chi_2
\end{aligned}\right\}\tag{17.46}$$

其中 Q_1 和 Q_2 分别是腔对频率为 ω_1 和 ω_2 的光的 Q 值，Ω_1 和 Ω_2 是被动腔的频率，ϕ_1 和 ϕ_2 是位相，Im 和 Re 分别代表虚部与实部.

由(17.44)式可知

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{Im}\,\chi_1&=\chi_0 I_2\,\frac{1}{1+\Delta^2+I_1I_2}\\
\mathrm{Im}\,\chi_2&=\chi_0 I_1\,\frac{1}{1+\Delta^2+I_1I_2}
\end{aligned}\right\}\tag{17.47}$$

代入(17.46)式中的场方程则

$$\left.\begin{aligned}
\dot{I}_1&=\chi_0\omega_1 I_1I_2\,\frac{1}{1+\Delta^2+I_1I_2}-\frac{\omega_1}{Q_1}I_1\\
\dot{I}_2&=\chi_0\omega_2 I_1I_2\,\frac{1}{1+\Delta^2+I_1I_2}-\frac{\omega_2}{Q_2}I_2
\end{aligned}\right\}\tag{17.48}$$

同样容易写出频率方程. 半经典理论的这些公式清楚表明了双光子激光器的特点：

(1) (17.48)式 $\dot{I}_1$ 及 $\dot{I}_2$ 的第一项是增益，第二项是损耗. 在一定范围内，增益与光强成正比，只有 I_1，I_2 非常强时，才出现增益饱和. 这样，双光子激光器便可能有高增益，高功率.

(2) 对于简并双光子激光器($\omega_1=\omega_2$)，$I_1=I_2\equiv I$. 当$(\Delta^2+I^2)\ll 1$ 时，增益正比于 I，所以光强在单位长度内的变化 $\mathrm{d}I/\mathrm{d}z\propto I^2$. 同理，双光子吸收过程也与 I^2 成正比. 与光强平方成正比也是其他双光子过程的共同特征.

(3) 若在能级间形成足够的粒子数反转，则可在 ω_1，ω_2 频率振荡，$\omega_1+\omega_2=\omega_{ab}$. 这样便可以调谐，即 ω_1 和 ω_2 连续可调但保持 $\omega_1+\omega_2=\omega_{ab}$.

此外(17.44)式还用于研究双光子双稳态及位相复共轭等.

17.4 双光子激光器的全量子化方程

光与二能级原子的双光子作用的哈密顿量

$$H = H_A + H_F + H_{AF} \tag{17.49}$$

$$H_A = \sum_{\mu} \hbar\omega_{\mu} b_{2\mu}^{+} b_{2\mu} \tag{17.50}$$

$$H_F = \sum_{\lambda} \hbar\omega_{\lambda} a_{\lambda}^{+} a_{\lambda} \tag{17.51}$$

$$H_{AF} = \frac{\hbar}{2} \sum_{\mu} \sum_{\lambda\lambda'} (g_{\mu\lambda\lambda'} \alpha_{\mu} a_{\lambda}^{+} a_{\lambda'} + g_{\mu\lambda\lambda'}^{*} \alpha_{\mu}^{+} a_{\lambda} a_{\lambda'}) \tag{17.52}$$

其中 α_μ 和 α_μ^+ 是偶极矩算符

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{\mu} &= b_{1\mu}^{+} b_{2\mu} \\ \alpha_{\mu}^{+} &= b_{2\mu}^{+} b_{2\mu} \end{aligned}\right\} \tag{17.53}$$

b 和 b^+ 分别是上、下能级电子的消灭算符和产生算符.

对于行波的情况

$$g_{\mu\lambda'} = \exp\left[-\mathrm{i}(k_{\lambda} + k_{\lambda'}) x_{\mu}\right] g_{\lambda\lambda'} \tag{17.54}$$

利用哈密顿量以及有关算符之间的对易关系,可得到量子力学的朗之万方程

$$\left.\begin{aligned} \dot{a}_{\lambda} &= (-\mathrm{i}\Omega_{\lambda} - \kappa_{\lambda}) a_{\lambda} - \mathrm{i} \sum_{\mu} \sum_{\lambda'} g_{\mu\lambda\lambda'} \alpha_{\mu} a_{\mu}^{+} + E_{\lambda}(t) \\ \dot{\alpha}_{\mu} &= (-\mathrm{i}\bar{\omega}_{\mu} - \gamma_{\perp}) a_{\mu} + \frac{1}{2} \sum_{\lambda\lambda'} g_{\mu\lambda\lambda'}^{*} a_{\lambda} a_{\lambda'} d_{\mu} + \Gamma_{\mu}(t) \\ \dot{d}_{\mu} &= -\gamma_{\parallel} (d_{\mu} - d_{\mu,0}) + \mathrm{i} \sum_{\lambda\lambda'} (g_{\mu\lambda\lambda'} \alpha_{\mu} a_{\lambda}^{+} a_{\lambda'}^{+} - \text{h. c.}) + \Gamma_{\mu d} \end{aligned}\right\} \tag{17.55}$$

式中 h. c. 代表厄米共轭. 注意在哈肯理论中,相当于把上述公式符号换为 $\hat{a} \to \hat{b}, \hat{b} \to \hat{a}$.

17.5 双光子激光器的半经典解

为了简便,这里只考虑单模、均匀加宽的情况. 这时 $\lambda = \lambda' \equiv \lambda_0$, $g_{\mu\lambda'} \equiv g_{\mu}$,对于行波,有

$$|g_{\mu}|^2 = g^2 \tag{17.56}$$

再引入 $d_{\mu,0} \equiv d_0$, $|a|^2 = n$, $\Omega \equiv \Omega_c$

$$\sum_{\mu} d_{\mu,0} = N' d_0 = D_0 \tag{17.57}$$

D_0 是未饱和的总的反转粒子数.

注意把方程(17.55)用的算符看成复数，而且平均起伏为零，即，

$$\langle F_\lambda(t)\rangle=\langle \Gamma_\mu(t)\rangle=\langle \Gamma_{\mu d}(t)\rangle=0 \tag{17.58}$$

则过渡到半经典的双光子激光方程.

利用旋转波近似，将 $a(t)$ 写成

$$a=\tilde{a}(t)\exp\left[-\mathrm{i}\omega_\lambda t\right] \tag{17.59}$$

对于所谓的 A 类激光器，有 $\gamma_\parallel,\gamma_\perp\gg\kappa$. 这时，用单光子激光器理论中常用的方法，相当于取

$$\left.\begin{aligned}\dot{d}&=0\\ \dot{\alpha}_\mu&=0\end{aligned}\right\} \tag{17.60}$$

这样求解 $\dot{\alpha}_\mu=0,\dot{d}=0$，将得到的 α_μ 代入 $\dot{a}$ 的方程，即得到

$$\dot{\tilde{a}}=(-\mathrm{i}\Omega_c-\kappa)\tilde{a}+\frac{1}{2}D_0\left[\gamma_\perp-\mathrm{i}(2\omega-\tilde{\omega})\right]^{-1}g^2n\tilde{a}$$

$$-\frac{1}{2}D_0g^4(\gamma_\perp/\gamma_\parallel)\left[\gamma_\perp-\mathrm{i}(2\omega-\tilde{\omega})\right]^{-1}\left[(2\omega-\tilde{\omega})^2+\gamma_\perp^2\right]^{-1}n^3\tilde{a} \tag{17.61}$$

在严格共振时，

$$\tilde{\omega}=2\Omega_c \tag{17.62}$$

这时，$\omega=\Omega_c,\tilde{\omega}=2\Omega_c$，代入方程(17.61)则有

$$\dot{\tilde{a}}=-\kappa\tilde{a}+\frac{1}{2}D_0(g^2/\gamma_\perp)|\tilde{a}|^2\tilde{a}-\frac{1}{2}D_0g^4(\gamma\gamma_\perp^2)^{-1}|\tilde{a}|^6\tilde{a} \tag{17.63}$$

与普通的单光子激光情况相似，也可定义势函数 V，

$$\dot{\tilde{a}}=-\partial V/\partial\tilde{a}^* \tag{17.64}$$

利用(17.64)式和(17.62)式，积分以后得到

$$V=\kappa|\tilde{a}|^2-\frac{1}{4}D_0(g^2/\gamma_\perp)|\tilde{a}|^4+\frac{1}{8}D_0g^4(\gamma\gamma_\perp^2)^{-1}|\tilde{a}|^6 \tag{17.65}$$

对不同的泵浦条件，即对应不同的 D_0，将 $V-|\tilde{a}|$ 曲线绘出，其基本特征与单光子情况不同，这时在阈值附近有一级相变而不是二级相变，如图 17.1 所示.

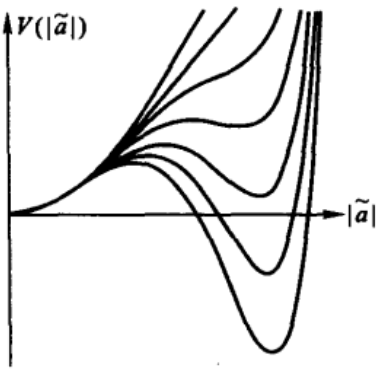


图 17.1 双光子激光器的一级相变类比

为了使激光器工作，这时需要有注入信号，当注入信号的频率与腔模频率相同时，方程(17.63)变为

$$\dot{\tilde{a}}=-\kappa\tilde{a}+C_1|\tilde{a}|^2\tilde{a}-C_2|\tilde{a}|^6\tilde{a}+\tilde{a}_0 \tag{17.66}$$

$\tilde{a}_0$ 是注入信号. 这时势函数 V 变为

$$V=\kappa|\tilde{a}|^2-\frac{1}{4}D_0(g^2/\gamma_\perp)|\tilde{a}|^4+\frac{1}{8}D_0g^4(\gamma\gamma_\perp^2)^{-1}|\tilde{a}|^8-\tilde{a}_0\tilde{a}^*-\tilde{a}_0^*\tilde{a} \tag{17.67}$$

参 考 文 献

[1] Schubert M, Wilhelmi B. Nonlinear optics and quantum electronics. New York: John Wiley & Sons Inc., 1986.

[2] Narducci L M, Edison W W, Furcinitti P, et al. Theory of a two - photo laser amplifier. Phys. Rev., 1977, A16: 1665 - 1670.

[3] Nikolaus B, Zhang D Z, Toschek P E. Two-photon laser. Phys. Rev. Lett., 1981, 47: 171 - 176.

[4] Walls D F. Special issue on squeezed state of the electromagnetic field. J. Opt. Soc. Am., 1987, B(4), 1450 - 1741.

第 18 章　超荧光与超辐射

本章首先介绍超荧光的概念与实验，然后从麦克斯韦-布洛赫方程出发，分别建立超荧光的半经典理论与全量子理论.

18.1　超荧光的概念与实验现象

18.1.1　超辐射与超荧光的特点

众所周知，普通的自发辐射或者荧光是非相干性的，其光强与激发态的原子数目 N 成正比，而且光强指数衰减，衰减常数或自发辐射寿命为 τ_{sp}. 这是自发辐射的个体性或非合作性的特征(各原子彼此无关地辐射).

超辐射与超荧光则与普通的自发辐射或荧光不同，用“超”字来反映它们的差别. 简单说，超辐射与超荧光都是相干的自发辐射，都来自原子的合作效应. N 个激发态的原子以相同的位相辐射，或 N 个有序的偶极子的相干辐射(相当于一个大的偶极子的辐射)，辐射的光场与 N 成正比，而光强与 N^2 成正比，整体行为与个体数目的平方成正比，这是各种合作效应的根本特点.

当 N 个原子发生相干自发辐射时，相当于自发辐射速率为 NA(A 是自发辐射系数). 这样，超辐射与超荧光的寿命则是 τ_{sp}/N. 当合作数目 N 很大时，超辐射与超荧光的脉宽将非常窄(短脉冲). 此外，N 个原子发生相干自发辐射时，叠加的结果使得发散角也变小(由样品的形状和衍射角决定). 因此，从相干性、方向性、短脉冲、高强度来看，超辐射与超荧光具有激光的若干重要特点. 但是，激光是受激辐射. 这是它们的区别.

超辐射与超荧光的研究，其意义是不言而喻的. 在理论上，这涉及合作效应以及合作自发辐射的相干性. 从实验上，为实现新的相干辐射机理开辟了途径. 特别是若能在 x 射线或 γ 射线实现超辐射与超荧光，更有深远影响.

图 18.1 表示超辐射和超荧光与普通自发辐射的区别.

18.1.2　超辐射与超荧光的区别

超辐射与超荧光的产生条件和机理不同. 超辐射是由狄克首先预言

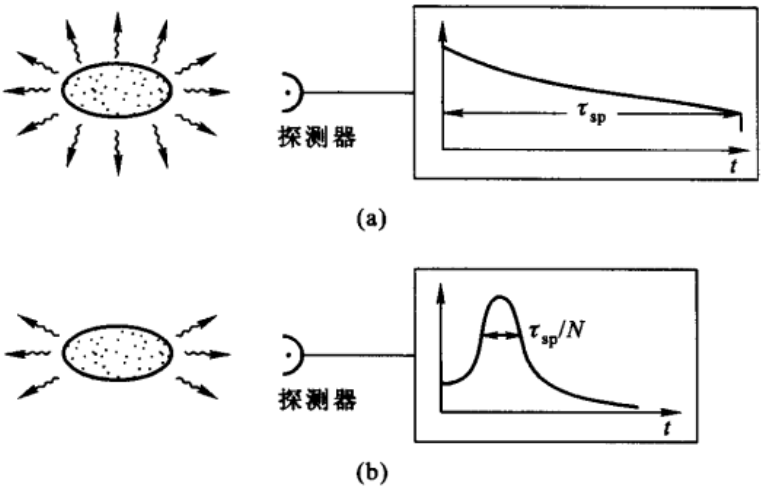


图 18.1 超辐射和超荧光与普通自发辐射的区别
(a)普通自发辐射 (b)超辐射与超荧光

的,他预言,对原子进行相干激发(用相干光脉冲照射原子样品),则会使原子偶极矩有序化(同位相)而发生相干辐射,其方向与激光脉冲相同.这种机理是基于原子样品的"相干制备"(coherent preparation),而辐射过程很像纯经典的宏观偶极子的辐射,它不具有自组织的特点.

同时狄克也考虑了非相干激发的原子系统的超辐射,即原子样品的尺寸必须小于光波的波长,或者在光波波长大小的体积内的原子用非相干激发方法形成粒子数反转,但没有宏观极化,这样也能产生相干自发辐射.它也没有自组织的特点,而且在红外与光波波段显然毫无实际意义(在波长大小的范围内原子数目太少).人们自然要问,若原子样品的尺寸远大于波长,会不会发生类似的相干自发辐射呢?这正是研究超荧光的问题和目的.

产生超荧光的前提条件,一不要相干激发;二不要原子样品尺寸小于波长;三不要谐振腔.这是不同于超辐射的条件.由于条件不同,相干自发辐射过程也不同.超荧光是自组织的结果.原子被非相干激发,起初原子偶极矩是无规的,该原子系统开始先辐射普通的荧光,光强正比于 N.该荧光作用于原子,导致原子间的关联.由于原子间的关联而产生相干自发辐射(性质像超辐射).起初的普通的荧光好像是个"种子",它是原子介质极化,极化的原子又会使光场增强,光场增强又使原子介质产生更强的极化,以此类推,使得原子介质产生宏观极化.这种宏观极化(同位相的许多极子)则产生合作辐射,即相干自发辐射.因此,虽然超荧光与超辐射都是合作效应,但超辐射的合作效应是由样品的制备条件决定的,而超荧光的合作效应则是自发地产生的,是自组织的结果.这种自组织的起因是非相

干的自发辐射，这本质上是量子力学现象. 又由于原子样品被激发，而处于非平衡态. 并且辐射是脉冲式的，所以最后可归结为：超荧光是涉及光与物质作用的非平衡态的量子力学系统的瞬态的合作现象，它是非平衡系统的自组织现象. 这种有序最初也是由无序（起伏即自发辐射）而引起的. 由于只能用量子电动力学才能解释最初的自发辐射，所以只有用光与物质作用的全量子理论才能解释超荧光.

18.1.3 超荧光的条件

若原子样品是铅笔状且菲涅尔数接近 1，则超荧光条件与合作衰减速率 γ_R 关系很大，

$$\gamma_R=\frac{3}{2}N\gamma[\lambda_0^2/(4\pi S)]=\frac{3}{8\pi}\gamma\rho L\lambda_0^2 \tag{18.1}$$

其中 λ_0 是波长，γ 是原子弛豫常数，N 是原子数目，L 和 S 是样品长度和截面，ρ 是原子数密度. 特别注意 γ_R 正比于 N 和 ρ.

超荧光条件要求

$$\gamma_\perp \ll \gamma_R \leqslant \frac{c}{L} \tag{18.2}$$

$\gamma_\perp$ 是原子的横向弛豫速率. $\gamma_\perp^{-1}$ 是解相时间（dephasing time），即破坏相干作用的时间. $\gamma_\perp \ll \gamma_R$ 即要求原子位相混乱之前完成超荧光过程以确保相干辐射. L/c 是光信号通过样品的时间，$\gamma_R \ll c/L$ 显然是要求在单程通过样品前完成超荧光过程.

定义合作参数 C（见第 10.3 节）

$$C=\gamma_R/(2\gamma_\perp)=\alpha L/[2(1-R)] \tag{18.3}$$

其中 L 是样品长度，R 是有腔器件（例双稳器件）的腔片反射率，α 是小信号共振增益系数

$$\alpha=\frac{3}{8}\frac{\gamma}{\gamma_\perp}\rho\lambda_0^2 \tag{18.4}$$

将(18.3)和(18.4)代入(18.2)，可知 $\gamma_\perp \ll \lambda_R$

$$\left.\begin{aligned} \alpha L &\gg 1 \\ C &\gg 1 \end{aligned}\right\} \tag{18.5}$$

则单程增益必须远大于 1（超荧光的原子样品只 $R=0$），或者合作参数远大于 1. $C \ll 1$ 时，合作效应可忽略，原子无规地自发辐射；$C \gg 1$ 时，合作效应占主导地位，压倒原子的个体非相干辐射过程；$C=1$ 相当临界点；$C<1$，原子发生非相干辐射，光强指数衰减；$C>1$，原子发生相干自发辐射，光强是脉冲式的（或主脉冲之后有若干小脉冲），第一个脉冲的高度正比于 N^2，脉宽是几个 τ_R 的量级，$\tau_R=\gamma_R^{-1}\propto N^{-1}$，所以脉宽很窄（远小于自

发辐射寿命).

若将(18.1)式代入(18.2)式的右半部分,则有

$$\left.\begin{aligned} L &\leqslant L_c \\ L_c &= \left(\frac{8}{3}\frac{c}{\rho\gamma\lambda_0^2}\right)^{1/2} \end{aligned}\right\} \tag{18.6}$$

其中 L_c 叫合作长度,即原子样品的长度必须小于合作长度. 由(18.5)式的 $\alpha L \gg 1$ 和(18.6)式的 $L \ll L_c$,则得到超荧光的必要条件

$$\alpha L_c \gg 1 \tag{18.7}$$

即在合作长度内,增益必须足够大.

当 $L \ll L_c$ 时,超荧光呈单脉冲,波形为双曲正割函数,这种单脉冲的超荧光称为纯超荧光. $L = L_c$ 时,超荧光为多脉冲. 若样品为非均匀加宽介质,

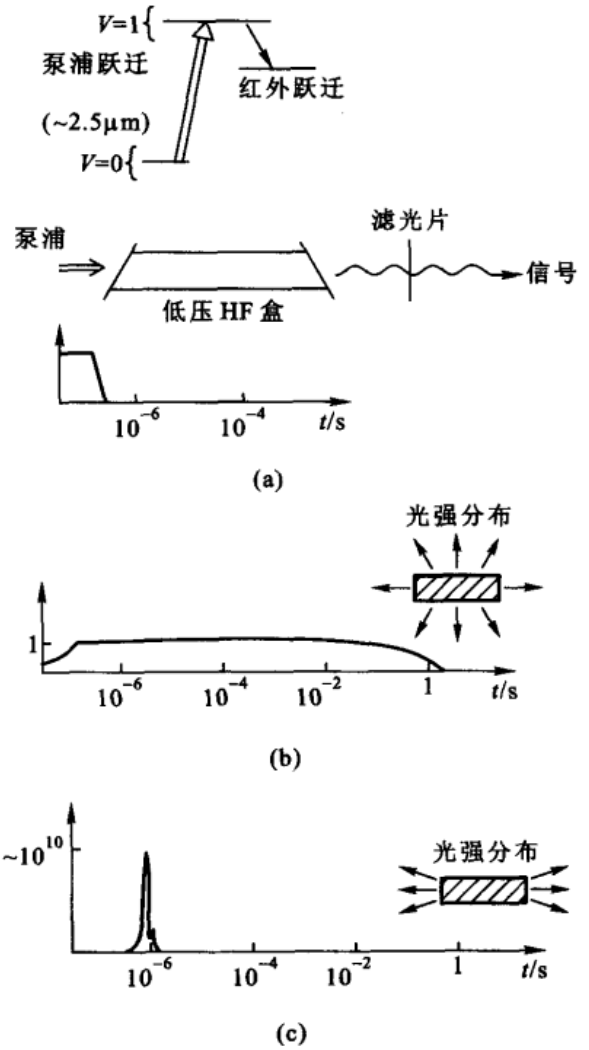


图 18.2 超荧光实验的 HF 能级图及实验结果

(a)激发脉冲 (b)非相干输出 (c)观察到的相干输出

以上公式中的 $\gamma_\perp$ 必须代之以非均匀加宽的线宽即 $(T_2^*)^{-1}$.

18.1.4 超荧光实验

超荧光是先由理论预言的. 为增加感性认识,先看一下实验结果是有益的.

第一个超荧光实验是由 Feld 等于 1973 年完成的,而纯超荧光实验则是 Gibbs 等于 1977 年完成的,见图 18.2. 他们用波长为 2.5 μm,脉宽为 100 ns 的激光对 HF 分子进行非相干激发,通过三能级方式在 HF 的 84 μm跃迁的两个能级间形成完全的粒子数反转. 测量到的超荧光信号的波长是 84 μm,脉宽约 200 ns,延时为 1 μs,峰值光强与 N^2 成正比,整个辐射过程完成的时间只是自发辐射寿命的10^{-6}倍.

实验还表明,超荧光的脉冲波形不同于简单理论预言的对称形的双曲正割形式

$$I\propto \operatorname{sech}^2[(t-t_D)/2\tau_R] \tag{18.8}$$

实验观察的脉冲形状不对称. 在理论中考虑 M-B 方程中的传播效应即可给予解释. 此外,观察的波形的振荡效应比简单理论预言要弱得多. 在理论中考虑到线性损耗及衍射的线性损耗也解释了实验现象.

18.2 超荧光的半经典理论

虽然半经典理论不能解释超荧光的起始信号即普通荧光,但是人为地假定已经开始产生荧光,便可用光与二能级原子作用的半经典的麦克斯韦-布洛赫方程解释超荧光的一些特点. 如 M-B 方程

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\right)E_0^{(+)}=\frac{i\omega_0}{2\varepsilon_0 c}P_0^{(+)}\\&\frac{\partial P_0^{(+)}}{\partial t}=\frac{\mu^2}{i\hbar}E_0^{(+)}D\\&\frac{\partial D}{\partial t}=\frac{2}{i\hbar}[P_0^{(-)}E_0^{(+)}-E_0^{(-)}P_0^{(+)}]\end{aligned}\right\} \tag{18.9}$$

其中用到慢变振幅近似、旋转波近似,且只考虑一维,严格共振,损耗为零. 为使方程形式简单,做如下的代换

$$\left.\begin{aligned}&z\to z\\&t\to\tau=t-z/c\end{aligned}\right\} \tag{18.10}$$

则方程(18.9)变为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}E_0^{(+)}&=\frac{i\omega_0}{2\varepsilon_0 c}P_0^{(+)}\\ \frac{\partial P_0^{(+)}}{\partial t}&=\frac{\mu^2}{i\hbar}E_0^{(+)}D\\ \frac{\partial D}{\partial t}&=\frac{2}{i\hbar}[P_0^{(+)}E_0^{(-)}-E_0^{(-)}P_0^{(+)}]\end{aligned}\right\}\tag{18.11}$$

引入布洛赫矢量的倾角 $\theta(z,\tau)$

可以证明

$$\left.\begin{aligned}P_0^{(+)}&=-i\mu\frac{D}{2\pi LW^2}\sin\theta(z,\tau)e^{-i\Phi}\\ D&=\frac{N}{\pi LW^2}\cos\theta(z,\tau)\end{aligned}\right\}\tag{18.12}$$

其中 L 和 W 分别是样品长度和截面半径，N 是总的初始反转粒子数.

将(18.12)式代入(18.11)式，则布洛赫方程变为

$$\frac{2\mu}{\hbar}E_0^{(+)}=e^{-i\Phi}\frac{\partial\theta}{\partial\tau}\tag{18.13}$$

麦克斯韦方程变为

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial z\partial\tau}=\frac{1}{LT_R}\sin\theta\tag{18.14}$$

其中 T_R 是超辐射特征常数，定义为 $T_R=8\pi\tau_0/(3D\lambda^2L)$，$\tau_0$ 是超荧光寿命，D 是反转粒子数密度，λ 是波长，L 是反转原子样品的长度. 将(18.14)式写成量纲为 1 的形式，则变为 sine－Gordon 方程

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial(z/L)\partial(\tau/T_R)}=\sin\theta\tag{18.15}$$

其中相当于把 z 和 τ 分别按 L 和 T_R 归一化. 该方程描述从 $\tau=0$ 到 $\tau\to\infty$时，倾角 θ 从接近零的值而扩张到$\theta=\pi$，该问题的初始条件是

$$\left.\begin{aligned}&\theta(z,\tau=0)=\theta_i\neq0\\ &\frac{\partial\theta(z,\tau=0)}{\partial z}=0\end{aligned}\right\}\tag{18.16}$$

为了便于求数值解，引入量纲为 1 的量

$$q=2\left(\frac{z}{L}\frac{\tau}{T_R}\right)^{1/2}\tag{18.17}$$

代入方程(18.15)，则得到

$$\theta''(q)+\frac{1}{q}\theta'(q)-\sin\theta=0\tag{18.18}$$

其中 θ 是 q 的函数. 求出 θ 之后便可知 $E_0^{(-)}$，从原子样品的一端发出的超荧光的光强则为 $E_0^{+}E_0^{(-)}$. 图 18.3 所示的是计算的曲线，理论计算表明，

超荧光发射是脉冲式的，而且在主脉冲之后还有起伏振荡，这与图 18.2(c)所示的实际波形基本一致.

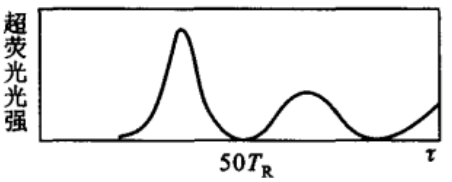


图 18.3 超荧光半经典理论曲线

18.3 超荧光的全量子 M－B 方程理论

本节推导超荧光的全量子化的麦克斯韦-布洛赫方程. 下节给出平均场近似的全量子化的 M－B 方程.

令超荧光的上、下能级分别为$|e\rangle$和$|g\rangle$，或者$|a\rangle$和$|b\rangle$，定义如下的算符(对原子系统)，

$$\left.\begin{aligned}\sigma_i^+ &= |e\rangle\langle g| = |a\rangle\langle b| \\ \sigma_i^- &= |g\rangle\langle e| = |b\rangle\langle a| \\ \sigma_i^{(3)} &= \frac{1}{2}[|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|] \\ &= \frac{1}{2}[|a\rangle\langle a| - |b\rangle\langle b|] = \frac{1}{2}\sigma_{z,i}\end{aligned}\right\} \tag{18.19}$$

其中下标“i”是指第 i 个原子. 对易关系为

$$\left.\begin{aligned}[\sigma_i^{(3)}, \sigma_j^{\pm}] &= \pm\delta_{ij}\sigma_i \\ [\sigma_i^+, \sigma_j^-] &= 2\delta_{ij}\sigma_i^{(3)}\end{aligned}\right\} \tag{18.20}$$

由这些算符可定义第 i 个原子的“电偶极算符”

$$\hat{d} = (\sigma_i^+ + \sigma_i^-)\mu\boldsymbol{\varepsilon}_a$$

其中 μ 是原子电偶极矩阵元，$\boldsymbol{\varepsilon}_a$ 是$|e\rangle \to |g\rangle$跃迁的单位偏振矢量.

下面对光场定义如下的算符

$$\left.\begin{aligned}E_0^{(+)}(r) &= -\mathrm{i}\sqrt{\frac{\hbar\Omega}{2\varepsilon_0 V}}\sum_{k,\varepsilon} a_{k,\varepsilon}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot r} \\ E_0^{(-)}(r) &= \mathrm{i}\sqrt{\frac{\hbar\Omega}{2\varepsilon_0 V}}\sum_{k,\varepsilon} a_{k,\varepsilon}^+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot r}\end{aligned}\right\} \tag{18.21}$$

其中算符 a 和 a^+ 的下标代表不同的模，$\boldsymbol{k}$ 是波矢，$\boldsymbol{\varepsilon}$ 是单位偏振矢量，横波条件要求 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}=0$. 算符对易关系是熟知的

$$[a_{k,\varepsilon}, a_{k',\varepsilon}^+] = \delta_{k',k}\delta_{\varepsilon',\varepsilon} \tag{18.22}$$

原子和场构成的系统的哈密顿量也是熟知的，

$$H=H_{\mathrm{A}}+H_{\mathrm{F}}+H_{\mathrm{A-F}} \tag{18.23}$$

$$\left.\begin{aligned} H_{\mathrm{A}} &= \hbar\omega_0\sum_i \sigma_i^{(3)} \\ H_{\mathrm{F}} &= \sum_{k,\varepsilon}\hbar\omega_k\left(a_{k\varepsilon}^{(+)}a_{k\varepsilon}+\frac{1}{2}\right) \\ H_{\mathrm{A-F}} &= -\sum_i (E^{(+)}(r_i)+E^{(-)}(r_i))\hat{d}_i \end{aligned}\right\} \tag{18.24}$$

为了得到 M－B 方程，还需要定义反转粒子数算符 $N(r)$和极化强度算符 $P(r)$

$$\left.\begin{aligned} N(r) &= \sum_i \delta_i(r-r_i)\sigma_i^{(3)} \\ P_{(r)}^{(\pm)} &= \mu\varepsilon_a\sum_i \delta_i(r-r_i)\sigma_i^{\pm} \end{aligned}\right\} \tag{18.25}$$

其中的 δ 函数的分布范围只限于大于原子尺寸而小于光波波长.

由海森堡方程

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[X,H] \tag{18.26}$$

其中 H 由(18.23)式给出，而 X 在这里代表 E,N,P. 这样通过直接计算可得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial P^{(+)}(r,t)}{\partial t} &= \mathrm{i}\omega_0 P^{(+)}(r,t)+2\mathrm{i}\frac{\mu^2}{\hbar}\varepsilon_a \\ &\quad\times\{\varepsilon_a[E^{(+)}(r,t)+E^{(-)}(r,t)]\}N(r,t) \end{aligned} \tag{18.27}$$

$$\frac{\partial N(r,t)}{\partial t}=\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[E^{(+)}(r,t)+E^{(-)}(r,t)]\times[P^{(+)}(r,t)-P^{(-)}(r,t)] \tag{18.28}$$

至于场方程，涉及对时间 t 的二次导数

$$\frac{\partial^2 E^{(+)}}{\partial t^2}-c^2\nabla\times\nabla\times\nabla E^{(+)}(r,t)=-\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial^2 P^{(-)}(r,t)}{\partial t^2} \tag{18.29}$$

方程(18.27)，(18.28)和(18.29)就是全量子化的用宏观量的算符的麦克斯韦-布洛赫方程，将它们与半经典理论的 M－B 方程比较，可知：(1)它们的形式完全一样；(2)全量子化 M－B 方程中的 $E^{(+)}$，$P^{(-)}$，N 都是量子力学算符；(3)系数中的因子 2 是因为$\langle N\rangle=\frac{1}{2}D$；(4)全量子的M－B 方程中用 $E^{(+)}$代表场的正频分量，用 $P^{(+)}$代表极化强度的正频分量，只要记住这几点，便可方便地使用原始文献中的方程(18.27)～(18.29)的形式.

应特别注意以上方程中 N 和 $P^{(\pm)}$不对易，$E^{(+)}$和 $E^{(-)}$不对易. 由于

不对易，必然有测不准关系，即必然有量子起伏，所以可解释超荧光的起始信号. 而在半经典理论中，$E^{(+)}$ 和 $E^{(-)}$ 是对易的(复数)，测不准量为零，起伏为零，对于超荧光的初始条件 $E=P=0$，不可能产生起始信号，原子也不可能跃迁. 归根到底说明了半经典理论不能解释自发辐射.

至于 M－B 方程中的 $E^{(\pm)}$ 和 $P^{(\pm)}$ 的次序可任意选择，$E^{(\pm)}$ 和 N 的次序亦然.

下面利用慢变振幅近似、旋转波近似、严格共振以及一维近似，把 $E^{(\pm)}(r,t)$ 和 $P^{(\pm)}(r,t)$ 写成

$$\left.\begin{aligned} E^{(\pm)}(r,t)&=E_0^{(\pm)}(z,t)\exp\{\mp i(\omega_0 t-k_0 z)\}\boldsymbol{\varepsilon}_a \\ P^{(\pm)}(r,t)&=P_0^{(\pm)}(z,t)\exp\{\pm i(\omega_0 t-k_0 z)\}\boldsymbol{\varepsilon}_a \end{aligned}\right\} \tag{18.30}$$

请特别注意这里 $P^{(-)}\propto e^{-i\omega_0 t}$ 代表正频分量(相当于半经典理论中的 $P^{(+)}$)，这是全量子的 M－B 方程(18.27)～(18.29)与半经典的 M－B 方程在正负号上的差别的原因.

在上述近似条件下，利用(18.30)式，则方程(18.27)～(18.29)为

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\right)E_0^{(+)}=\frac{i\omega_0}{2\varepsilon_0 c}P_0^{(-)} \\ &\frac{\partial P_0^{(-)}}{\partial t}=\frac{2i\mu^2}{\hbar}E_0^{(-)}N \\ &\frac{\partial N}{\partial t}=\frac{i}{\hbar}[P_0^{(+)}E_0^{(+)}-E_0^{(-)}P_0^{(-)}] \end{aligned}\right\} \tag{18.31}$$

在方程(18.31)中，算符的排列是正规顺序的(normal ordering)为计算方便，做变换 $z\to z,\tau\to(t-z/c)$，则(18.31)式变为

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial z}E_0^{(+)}=\frac{i\omega_0}{2\varepsilon_0 c}P_0^{(-)} \\ &\frac{\partial P_0^{(+)}}{\partial \tau}=\frac{2i\mu^2}{\hbar}E_0^{(-)}N \\ &\frac{\partial N}{\partial \tau}=\frac{i}{\hbar}[P_0^{(+)}E_0^{(+)}-E_0^{(-)}P_0^{(-)}] \end{aligned}\right\} \tag{18.32}$$

这里的麦克斯韦方程可以在原子样品内部($0<z<L$)积分

$$E_0^{(+)}(z,\tau)=\frac{i\omega_0}{2\varepsilon_0 c}\int_0^z P_0^{(-)}(z',\tau)\,dz' \tag{18.33}$$

此式还暗示光场在 z 点的演化只与 $z'<z$ 的事件有关，说明光场在 $+z$ 方向传播.

当原子样品尺寸较大时，应将全量子的 M－B 方程推广到三维情况. 若原子样品是气体，考虑到气体原子(或分子)运动的多普勒效应，M－B 方程也需要做相应的推广.

18.4 平均场近似下的全量子 M－B 方程

上面的全量子的 M－B 方程求解比较困难. 为了使计算简化，采用平均场近似. 平均场近似的实质，是忽略 $E_0^{(+)}(z,\tau)$ 随空间变量 z 的变化. 将 $E_0^{(+)}(z,\tau)$ 对 z 求平均，用平均值代替 $E_0^{(+)}(z,\tau)$. 由此可知，用平均场近似，就是忽略场随 z 的传播效应. 换言之，平均场理论绝不能解释场的空间传播效应. 本书中已多次用过平均场近似.

由(18.33)式出发，用平均值代替积分，

$$\bar{E}_0^{(+)}(x,\tau)=\frac{\mathrm{i}\omega_0}{2\varepsilon_0 c}\int_{-L/2}^{-L/2}P_0^{(-)}(z',\tau)\mathrm{d}z' \tag{18.34}$$

同样，在 M－B 方程中都用平均值 $\bar{E}_0^{(+)}$，$\bar{P}_0^{(+)}$ 和 $\bar{N}$ 代替 $E_0^{(+)}$，$P_0^{(+)}$ 和 N，则 M－B 方程(18.32)，(18.33)变为

$$\left.\begin{aligned}\bar{E}_0^{(+)}&=\frac{\mathrm{i}\omega_0}{2\varepsilon_0 c}L\bar{P}^{(-)}\\ \frac{\partial\bar{P}_0^{(+)}}{\partial\tau}&=\frac{2\mathrm{i}\mu}{\hbar}\bar{E}_0^{(-)}\bar{N}\\ \frac{\partial\bar{N}}{\partial\tau}&=\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\bar{P}_0^{(\pm)}\bar{E}_0^{(-)}-\bar{E}_0^{(-)}\bar{P}_0^{(-)}]\end{aligned}\right\} \tag{18.35}$$

其中的 $\bar{N}$ 和 $\bar{P}_0^{(+)}$ 可以用 σ^+，σ^-，$\sigma^{(3)}$ 表示，即

$$\left.\begin{aligned}\bar{N}&=\frac{1}{\pi LW^2}\sum_i\sigma_i^{(3)}=\frac{1}{\pi LW^2}D^{(3)}\\ \bar{P}^{(\pm)}&=\frac{\mu}{\pi LW^2}\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\omega_0\tau}D_{k_0}^{\pm}\end{aligned}\right\} \tag{18.36}$$

其中 $D^{(3)}$ 与半经典理论的反转粒子数 D 差 2 倍. L 和 W 分别是样品长度和截面半径，(πLW^2) 显然是样品体积. $D_{k_0}^{\pm}$ 是 $\sum_i\sigma_i^{\pm}$，即极化强度算符.

将(18.36)式代入(18.35)式，并且将(18.35)式中第一个方程 $\bar{E}_0^{(+)}$ 代换以消去 $\bar{E}_0^{(\pm)}$，这样由(18.35)式便得到

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}D_{k_0}^{+}}{\mathrm{d}\tau}&=\mathrm{i}\omega_0 D_{k_0}^{+}+\gamma_\nu D_{k_0}^{+}D^{(3)}\\ \frac{\mathrm{d}D^{(3)}}{\mathrm{d}\tau}&=-\gamma_\nu D_{k_0}^{+}D_{k_0}^{-}\end{aligned}\right\} \tag{18.37}$$

$$\nu\equiv\frac{3}{8}\frac{\lambda^2}{\pi^2W^2} \tag{18.38}$$

其中 $D_{k_0}^{+}$ 代表极化强度算符，$D^{(3)}$ 是反转粒子数，ν 是新定义的参数. 若从密度矩阵算符出发，也能得到(18.37)式.

为了求解方程(18.35),分两步考虑:(1)由于起伏或自发辐射,使系统进入初始的量子态.这是超荧光的初始阶段,用全量子方法处理;(2)有了适当的初始信号,便可使半经典方法再显身手,所以在第二阶段用半经典方法.

假定在 t_0 时刻已经有了一些荧光光子数,但数目甚少,由于光子数少,系统仍接近初态,系统的初态是全反转态,即原子全部在上能级,而下能级原子数为零($\rho_{aa}=1,\rho_{bb}=0$),总原子数是 N_0,即 $N_a-N_b=N_0$.由定义 $\sigma^3=\frac{1}{2}[|a\rangle\langle a|-|b\rangle\langle b|]$,故$\langle D^{(3)}\rangle$的初值$\langle D_0^{(3)}\rangle=N_0/2$(相当半经典理论的 $D=N_0$).因此,在 t_0 时仍有

$$\langle D_3(t_0)\rangle\approx N_0/2 \tag{18.39}$$

另一方面,时间 t_0 又必须足够长,使得荧光光子数足够多,半经典理论能适用,或者说算符 $D_{k_0}^+$ 和 $D_{k_0}^-$ 和 $D^{(3)}$ 在 $t>t_0$ 后都可看成"准对易"(qusai－commuting)的经典量.

由于对易关系$[D_{k_0}^+,D_{k_0}^-]=2D^{(3)}$,故有

$$\langle[D_{k_0}^+,D_{k_0}^-]\rangle=2\langle D^{(3)}\rangle\approx N_0,\quad t\approx 0 \tag{18.40}$$

此外,又由于 $t<t_0$ 时该过程近似为线性的,还可求出 $t\approx 0$ 时的 $\langle D_{k_0}^+D_{k_0}^-\rangle$.为计算 $\langle D_{k_0}^+D_{k_0}^-\rangle$,利用

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(D_{k_0}^+D_{k_0}^-)=D_{k_0}^+\frac{\mathrm{d}D_{k_0}^-}{\mathrm{d}\tau}+\left(\frac{\mathrm{d}D_{k_0}^+}{\mathrm{d}\tau}\right)D_{k_0}^- \tag{18.41}$$

再利用(18.37)式的第一个方程及其共轭,可得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(D_{k_0}^+D_{k_0}^-)=2D_3D_{k_0}^+D_{k_0}^-\gamma_\nu,\quad t\approx 0 \tag{18.42}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\langle(D_{k_0}^+D_{k_0}^-)\rangle&=2\langle D_3\rangle\langle D_{k_0}^+D_{k_0}^-\rangle\gamma_\nu\\&\approx N_0\langle D_{k_0}^+D_{k_0}^-\rangle\gamma_\nu,\quad t\approx 0\end{aligned} \tag{18.43}$$

解(18.43)式,则有

$$\langle D_{k_0}^+D_{k_0}^-\rangle_{t\approx 0}\approx N_0\mathrm{e}^{N_0\gamma_\nu\tau} \tag{18.44}$$

比较(18.44)式和(18.40)式,不难看出,只要 $t_0>(N_0\gamma_\nu)^{-1}$,则有

$$\langle D_{k_0}^+D_{k_0}^-\rangle_{t\approx 0}\gg\langle[D_{k_0}^+,D_{k_0}^-]\rangle \tag{18.45}$$

即两个算符的对易子的期待值远小于其乘积的期待值,这说明当 $t>t_0$ 后用经典处理可以自圆其说[4].至于荧光起始信号,可以证明它是高斯分布,且位相在 $0\sim 2\pi$ 间无规分布.

下面把 $D_{k_0}^+$,$D_{k_0}^-$和 $D^{(3)}$ 看成经典量,由方程(18.37),有

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}D_{k_0}^{+}&=\mathrm{i}\omega_0 D_{k_0}^{+}+\gamma_\nu D_{k_0}^{+}D^{(3)}\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}D^{(3)}&=-\gamma_\nu D_{k_0}^{+}D_{k_0}^{-}\end{aligned}\right\}\tag{18.46}$$

初始值假定为全反转(布洛赫矢量向上),即

$$\left.\begin{aligned}D^{(3)}(0)&=N_0/2\\ D_{k_0}^{+}(0)&=0\end{aligned}\right\}\tag{18.47}$$

引入新的变量 $\theta(t)$ 和 ϕ,即

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}D_{k_0}^{+}(t)&=\frac{N_0}{2}\sin\theta(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\\ D^{(3)}(t)&=\frac{N_0}{2}\cos\theta(t)\end{aligned}\right\}\tag{18.48}$$

布洛赫方程(18.46)变为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}&=\frac{1}{2T_{\mathrm{R}}}\sin\theta\\ \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}&=0\end{aligned}\right\}\tag{18.49}$$

$$T_{\mathrm{R}}\equiv(N_0\gamma_\nu)^{-1}\tag{18.50}$$

超荧光的全量子化理论的主要结果之一就是给出了超荧光的起始信号.对脉冲形状的计算则与半经典理论的结果相似.

参 考 文 献

[1] Gross M, Haroche S. Superradiance: an essay on the theory of collection spont. Emission Physics Reports, 1982, 93: 301 - 312.

[2] Dicke R H. Coherence in spontaneous radiation processes. Phys. Rev., 1954, 93: 99 - 102.

[3] Haake F. Fluctuation in superfluorescence. Phys. Rev., 1979, 26: 2047 - 2050.

[4] Bonifascio R. Dissipative systems in quantum optics. Berlin: Springer-Verlag, 1982.

[5] 沈柯. 关于超荧光. 激光, 1982, 9: 545.

[6] 彭金生. 一个简单系统超辐射拍的准量子理论处理. 华中师范学院院报, 1984, 20: 36.

第 19 章　共振荧光与光子反聚束

共振荧光是研究光的非经典效应的重要现象. 本章先介绍光的聚束、亚泊松分布，压缩态，然后研究共振荧光谱的三峰结构，以及共振荧光的反聚束效应、亚泊松分布、压缩态(分别简称 AB，SPPS 和 SS 效应).

19.1　光的反聚束、亚泊松分布、压缩态

目前已知的光场非经典效应有反聚束、亚泊松分布、压缩态. 这些现象都没有经典类比，是光的量子性质的反映. 故称为纯量子效应.

19.1.1　光的聚束与反聚束效应(bunching and antibunching)

研究光的性质时，最重要的是二阶关联函数

$$g^{(2)}(t,t+\tau)=g^{(2)}(\tau)$$

$$=\frac{\langle E^{(-)}(t)E^{(-)}(t+\tau)E^{(+)}(t+\tau)E^{(+)}(t)\rangle}{\langle E^{(-)}(t)E^{(+)}(t+\tau)\rangle^2} \tag{19.1}$$

或者用光强算符 I 的正规排列，定义为

$$g^{(2)}(t,t+\tau)=g^{(2)}(\tau)=\frac{\langle :I(t+\tau)I(t):\rangle}{\langle I(t)\rangle^2} \tag{19.2}$$

其中 τ 是关联时间，$E^{(\pm)}$ 和 I 分别是光场及光强的算符 $:\cdots:$ 代表算符的正规排列(即产生算符在左而消灭算符在右)，式中的尖括号代表量子力学期待值，力学量算符 O 的期待值为

$$\langle O\rangle=\mathrm{tr}\,\langle\rho O\rangle \tag{19.3}$$

其中 ρ 是场的密度算符.

$g^{(2)}(\tau)$ 可做为区分聚束、相干态及反聚束的判据

$$g^{(2)}(\tau)-1=\begin{cases}>0,\text{聚束}\\=0,\text{相干态}\\<0,\text{反聚束}\end{cases} \tag{19.4}$$

图 19.1(a)表示的是聚束与反聚束的区别. 上边的曲线代表 Brown - Twiss 实验结果，对普通的光源(热光源)，有 $g^{(2)}(\tau)>1$，$g^{(2)}(0)=2$，

$g^{(2)}(\infty)=1$，即有聚束效应 B. 下面的曲线表明反聚束效应 AB. 水平线代表相干态的激光，图 19.1(b)是测量 $g^{(2)}(\tau)$的示意图.

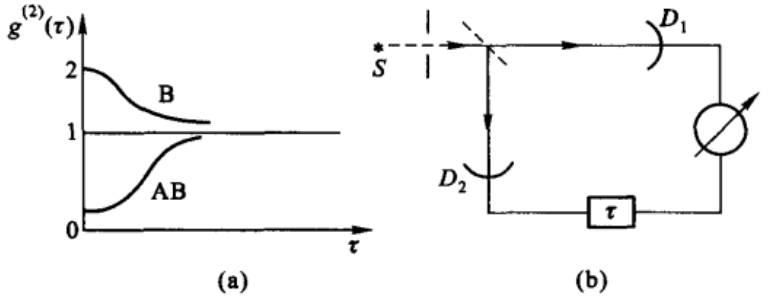


图 19.1 激光，聚束光和反聚束光的特性曲线

从二阶关联函数的物理意义很容易看出聚束与反聚束的差别：

(1) $g^{(2)}(\tau)$代表在时刻 $t+\tau$ 时刻对光强或光子数的测量与在 t 时刻的测量的关联. 或者说先在 t 时刻测量一束光的光子数，然后(经过延时)在 $t+\tau$ 测量到光子的几率与 $g^{(2)}(\tau)$成正比.

(2) 若在 $t+\tau$ 和 t 时刻对光强的测量是独立无关的，则有 $\langle :I(t+\tau)I(t): \rangle=\langle I(t+\tau)\rangle\langle I(t)\rangle=\langle I(t)\rangle^2$，这时显然有 $g^{(2)}(\tau)>1$. 相干态的激光即如此.

(3) 若 $g^{(2)}(\tau)=1$，则意味着先在 t 时刻测量光子，延迟一小段时刻 τ 再测量时，测到光子数的几率更大了. 这说明这种光的光子有着成群结队出现的趋势，称为聚束或正相关.

(4) $g^{(2)}(\tau)<1$ 则相反，即先在 t 时刻测量光子束，再在 $t+\tau$ 时测量，测到光子数的几率更小了，即这种光的光子互相排斥. 这种现象称为反聚束或负相关.

若把一束光中的光子看成一队小鱼，如果有一条小鱼被钓上来，其余小鱼无动于衷，就相当于 $g^{(2)}(\tau)=1$，似相干态的光. 若在 t 时钓住一条小鱼，其他小鱼立即从前后来救援，在 $t+\tau$ 时刻在同一点钓到鱼的几率就增加了，这相当于有聚束效应的光子. 相反，若在 t 时刻钓住一条小鱼，其他小鱼各自逃散，在 $t+\tau$ 时刻在同一地点钓到鱼的几率就减小了. 这种鱼就相当于有反聚束效应的光子.

下面以单程光场为例计算一下 $g^{(2)}(\tau)$. 对于单模光场

$$\left.\begin{aligned} g^{(2)}(t,t)=g^{(2)}(0)&=\frac{\langle a^+a^+aa\rangle}{\langle a^+a\rangle^2}\\ g^{(2)}(0)-1&=\frac{\langle n^2\rangle-\langle n\rangle^2-\langle n\rangle}{\langle n\rangle^2}\end{aligned}\right\} \tag{19.5}$$

对于我们熟悉的单模热辐射及单模相干态的光，

$$\left.\begin{aligned}\langle n^2\rangle &= \langle n\rangle^2 + 2\langle n\rangle, (\text{热辐射})\\ \langle n^2\rangle &= \langle n\rangle^2 + \langle n\rangle, (\text{相干态})\end{aligned}\right\} \tag{19.6}$$

分别代入(19.5)式则有

$$g^{(2)}(\tau) - 1 = \begin{cases} 1, \text{热辐射} \\ 0, \text{相干态} \end{cases} \tag{19.7}$$

所以热辐射呈聚束效应，相干态的光则既不聚束，也没有反聚束.

为什么说反聚束是非经典的效应呢？这可从经典关联函数以及量子理论的 P 表示来说明.

按照经典的关联函数的定义，单束(同一束光)的 $g_{11}^{(2)}(\tau)$ 定义为

$$g_{11}^{(2)} = \frac{\langle I(t)I(t+\tau)\rangle}{\langle I_1\rangle^2} \tag{19.8}$$

双束(两束光之间的关联)的 $g_{12}^{(2)}(\tau)$ 定义为

$$g_{12}^{(2)} = \frac{\langle I_1(t)I_2(t+\tau)\rangle}{\langle I_1\rangle\langle I_2\rangle} \tag{19.9}$$

其中角括号表示对时间平均，延时 τ 是正值.

由于光强总是正值，由(19.9)式可知，必有

$$g_{12}^{(2)}(\tau) \geqslant 0 \tag{19.10}$$

再由不定式的标准公式，可知单束光强必有

$$\langle I_1^2\rangle \geqslant \langle I_1\rangle^2 \tag{19.11}$$

将(19.11)式代入(19.8)式，则有

$$g_{11}^{(2)}(0) \geqslant 1 \tag{19.12}$$

对于更一般的情况，由柯西(Cauchy)不等式，有

$$\langle I_1^2\rangle\langle I_2^2\rangle \geqslant \langle I_1 I_2\rangle \tag{19.13}$$

其中对两束的测量有一个延时 τ，代入(19.9)式，则

$$g_{11}^{(2)}(0)g_{22}^{(2)}(0) \geqslant [g_{12}^{(2)}(\tau)]^2 \tag{19.14}$$

将(19.14)式用于单束情况，则

$$g_{11}^{(2)}(0) \geqslant g_{11}^{(2)}(\tau) \tag{19.15}$$

上面的三个不等式(19.10)，(19.14)和(19.15)就是经典光场必须满足的不等式.

显然，对于反聚束效应，因其 $g^{(2)}(\tau) < 1$，所以不满足(19.12)式，故称为非经典效应.

再从 $P(\alpha)$ 表示的情况来看. 利用 $P(\alpha)$ 表示，可把(19.5)式写成

$$g^{(2)}(0) - 1 = \frac{\int P(\alpha)\left[|\alpha|^2 - \langle|\alpha|^2\rangle\right]^2 \mathrm{d}^2\alpha}{\left[\int P(\alpha)\,|\alpha|^2 \mathrm{d}^2\alpha\right]^2} \tag{19.16}$$

其中 $\langle|\alpha|^2\rangle=\int P(\alpha)\,|\alpha|^2\mathrm{d}^2\alpha$.

$P(\alpha)$是准几率. 对于热光源以及相干态的光束,存在有$[g^{(2)}(0)-1]\geqslant 0$,故有 $P(\alpha)\geqslant 0$,即几率为正. 而对于反聚束的情况,$[g^{(2)}(0)-1]<0$,即几率为负

$$P(\alpha)<0 \tag{19.17}$$

这说明热辐射光和相干态的光(理想的激光),它们的光子关联特性完全可以用经典理论描述. 相反,具有反聚束效应的光,其光子关联特性必导致 $P(\alpha)$得负值,不能用经典理论描述.

关于光子反聚束的理论和各种途径见综述[3].

19.1.2 光子的亚泊松分布(sub-Poisson photon statistics)

为了区分光子分布的不同形式,Mandel 引入了 Q 因子

$$Q=\frac{\langle(\Delta n)^2\rangle-\langle n\rangle}{\langle n\rangle}=\frac{\langle n^2\rangle-\langle n\rangle^2-\langle n\rangle}{\langle n\rangle} \tag{19.18}$$

其中用到$(\Delta n)^2=\langle n^2\rangle-\langle n\rangle^2$. 因 Q 的不同,将光子分布区分为超泊松分布、泊松分布及亚泊松分布

$$Q\begin{cases}>0\text{,超泊松分布}\\=0\text{,泊松分布}\\<0\text{,亚伯松分布}\end{cases} \tag{19.19}$$

有时也利用 Fano 因子 F_n

$$F_n=\frac{\langle(\Delta n)^2\rangle}{\langle n\rangle}=\frac{\langle n^2\rangle-\langle n\rangle^2}{\langle n\rangle} \tag{19.20}$$

$$F_n\begin{cases}>1\text{,超泊松分布}\\=1\text{,泊松分布}\\<1\text{,亚泊松分布}\end{cases} \tag{19.21}$$

容易看出 $Q=F_n-1$

对熟知的热光源,有$\langle n^2\rangle=\langle n\rangle+2\langle n\rangle^2$. 而相干态的光$\langle n^2\rangle=\langle n\rangle+\langle n\rangle^2$,用(19.19)式可知,相干态满足泊松分布的判据.

特别注意,光子亚泊松分布也是纯量子效应,或者光场的非经典效应,没有经典类比.

光子的三种分布曲线见图 19.2.

光子的亚泊松分布与反聚束效应一般是不等价的. 只有在特殊情况才等价,例如,对单模光场,由(19.5)式和(19.18)式可知

$$Q=g^2(0)-1\text{,单模光场} \tag{19.22}$$

这时亚泊松分布与反聚束的条件才一样.

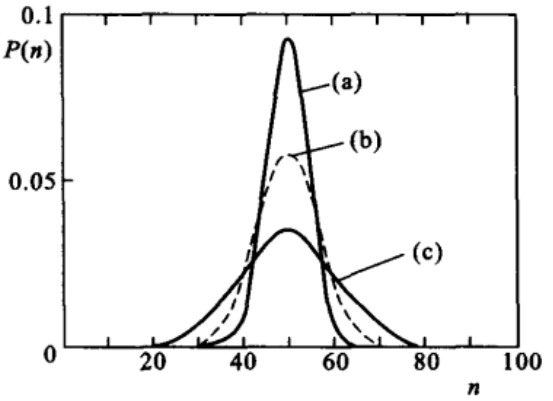


图 19.2 光子的三种分布曲线

(a)亚泊松分布 (b)泊松分布 (c)超泊松分布

19.1.3 光学压缩态(squeezed state)

在量子力学中,由测不准原理可知,若

$$[\hat{A},\hat{B}]=C \tag{19.23}$$

则 A 和 B 的均方差由下式决定

$$\langle(\Delta A)^2\ (\Delta B)^2\rangle\geqslant\frac{1}{4}|C|^2 \tag{19.24}$$

由光的产生算符 a^+ 和消灭算符 a 定义新的算符

$$\left.\begin{aligned}\hat{X}&=\frac{1}{2}(a+a^+)\\ \hat{Y}&=\frac{1}{2i}(a-a^+)\end{aligned}\right\} \tag{19.25}$$

由对易$[a,a^+]=1$,可求 $\hat{X}$ 和 $\hat{Y}$ 的对易式

$$[\hat{X},\hat{Y}]=\frac{i}{2} \tag{19.26}$$

利用(19.24)式可知

$$\langle(\Delta X)^2\rangle\langle(\Delta Y)^2\rangle\geqslant\frac{1}{16} \tag{19.27}$$

对于相干态,我们已知光场的两个分量的测不准量相等,

$$\langle(\Delta X)^2\rangle=\langle(\Delta Y)^2\rangle=\frac{1}{4} \tag{19.28}$$

所谓压缩态的光,就是指可能存在这样的光,它的两个分量的测不准量不相等,即

$$\left.\begin{aligned}\langle(\Delta X)^2\rangle<\frac{1}{4}\\ \langle(\Delta Y)^2\rangle>\frac{1}{4}\end{aligned}\right\} \tag{19.29}$$

或者

$$\left.\begin{aligned}\langle(\Delta X)^2\rangle>\frac{1}{4}\\ \langle(\Delta Y)^2\rangle<\frac{1}{4}\end{aligned}\right\} \tag{19.30}$$

但是仍满足(19.27)式,即不破坏测不准关系,那么这种光就称为压缩态的光.

光的压缩态与反聚束一般也不等价.理论和实验已证实了能产生压缩态的光.在第 20 章将专题介绍压缩态的理论与实验.

19.2 共振荧光的概念和实验

本节介绍共振荧光的物理概念以及它的光谱三峰结构的实验

19.2.1 共振荧光的物理概念

共振荧光是激光理论和量子光学中非常重要的现象.对这种现象的研究,揭示了强光场与弱光场的相干共振作用的特性,并且从理论上首先预言了光子的反聚束效应.

共振荧光的特点和概念可归结如下:

(1) 共振荧光是相干光与二能级原子发生共振(或近共振)作用的现象.

(2) 按照经典电动力学,频率为 ω 的相干光与二能级原子(跃迁频率为 ω_0)发生共振作用时,原子发射的荧光与入射光的频率一样,即谱线是一个单峰.然而,当入射光强增大到一定程度时,原子发射的荧光光谱有三个峰.弱场作用,原子对光发生弹性散射;强场作用,则发生非弹性散射.

(3) 相干光与二能级原子的共振作用,光的强弱由拉比频率 $\Omega=\mu E/\hbar$ 作为标准.当 $\Omega\ll\gamma_\perp$(横向弛豫或自然线宽)时,即弱场作用.当入射光强达到 $\Omega>\gamma_\perp$ 时,就称为强场的作用.这时荧光谱有三个峰,中间的峰的频率为 ω,两个边峰分别在 $\omega\pm\Omega$,即与中心峰距离为 $\pm\Omega$.理论计算表明,三个峰都是洛伦兹型,中心峰的线宽为 $\gamma_\perp$,边峰为 $(3/2)\gamma_\perp$.因此,共振荧光的条件是相干光激发、共振或近共振作用,而且 $\Omega>\gamma_\perp$.

(4) 当 $\Omega>\gamma_\perp$ 时，微扰论不适用. 在激光理论中已发展了处理这种强场作用的多种方法，它们在弱场近似下即得到经典电动力学结果.

(5) 与原子在直流电场中谱线移动的斯塔克效应对比，共振荧光的两个边峰位置由光场的电场 E(及原子参数 μ 等)决定，所以共振荧光又称为交流斯塔克效应或动态斯塔克效应.

(6) 相干光与单个的二能级原子作用，就可能发生共振荧光，所以它本质上是单原子(个体)效应，而不是合作效应.

(7) 由于 $\Omega\ll\gamma$ 时，荧光的线型和线宽与平衡态系统的辐射一样. 当 Ω 较大时，使系统远离平衡态. $\Omega=\gamma_\perp$ 是临界点. 从单峰到三峰，谱随光场或 Ω 的变化是连续的，因此这是远离平衡态系统的连续相变即二级相变.

(8) 共振荧光的第一个理论是 Mollow 于 1969 年建立的，1974 年由 Schuda 等的实验证实. 随后人们又研究了多原子的共振荧光以及三能级原子的共振荧光，还考虑了激发光的线宽、原子数起伏.

(9) 共振荧光还有反聚束、亚泊松分布，压缩态等非经典效应. 它的反聚束效应由 Walls 等预言，并被实验证实. 亚泊松分布也被实验证实.

(10) 由共振荧光可测量 Ω，μ，$\gamma_\perp$ 和光场 E.

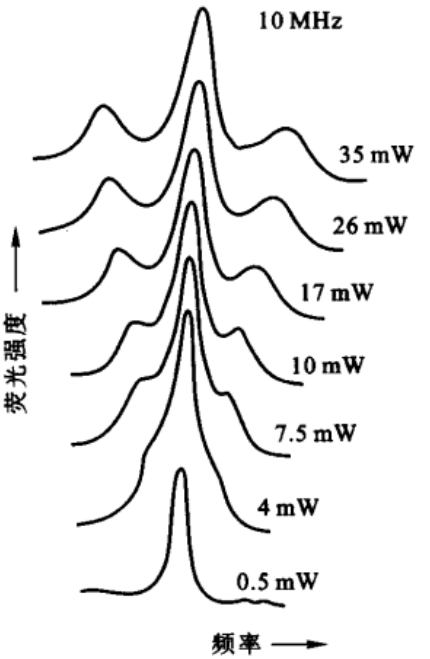


图 19.3 共振荧光谱(激发光从 0.5～35 mW)实验

19.2.2 共振荧光谱的三线结构实验

在实验中，用单模染料激光照射钠原子束、将激光频率调谐到钠原子的双线中的 D_2 线. 染料激光的线宽为 1 MHz. 同时用第二个染料激光进行拍频，拍频信号再由射频频谱分析仪处理，以决定荧光谱的结构和位置.

图 19.3 所示的是共振荧光谱的三峰结构的实验曲线.

19.3 共振荧光谱的理论

这里用光学布洛赫方程处理共振荧光问题，这种理论的基本思想是把量子化的光场与原子的作用归结为“经典场＋真空”与原子的作

用，即把量子效应归结为“真空与原子的作用”.

19.3.1 真空表象

在半经典理论中，哈密顿量是

$$H_{sc}=H_A-\hat{\mu}E(t) \tag{19.31}$$

在全量子理论中，哈密顿量 H_q 为

$$\hat{H}_q=\hat{H}_A-\hat{\mu}E(t) \tag{19.32}$$

(在薛定谔表象中$\hat{H}_q=\hat{H}_A-\hat{\mu}E(t)+\hat{H}_F$). 其中光场是量子化的

$$E_k(t)=\mathrm{i}\left(\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0 V}\right)^{1/2}\{a_k\exp(-\mathrm{i}\omega_k t)-a_k^+\exp(\mathrm{i}\omega_k t)\} \tag{19.33}$$

利用如下的位移算符 $D_k(\beta)$，可把(19.32)变到真空表象，

$$D_k(\beta)=\exp\left[\beta a_k^+-\beta^* a_k\right] \tag{19.34}$$

其中 a_k^+ 和 a_k 是算符，β 是复数. 利用对易关系可以证明

$$\left.\begin{aligned}D_k^{-1}(\beta)a_kD_k(\beta)&=a_k+\beta\\ D_k^{-1}(\beta)a_k^+D_k(\beta)&=a_k^++\beta^*\end{aligned}\right\} \tag{19.35}$$

即把算符 a_k 和 a_k^+ 分别平移了 β 和 β^*.

由相干态的定义

$$a_k|\alpha_k\rangle=\alpha_k|\alpha_k\rangle \tag{19.36}$$

可以得到(略去下标 k)

$$D^{-1}(\alpha)aD(\alpha)D^{-1}(\alpha)|\alpha\rangle=\alpha D^{-1}(\alpha)|\alpha\rangle \tag{19.37}$$

$$(a+\alpha)D^{-1}(\alpha)|\alpha\rangle=\alpha D^{-1}(\alpha)|\alpha\rangle \tag{19.38}$$

所以

$$aD^{-1}(\alpha)|\alpha\rangle=0$$

此式表明 $D^{-1}(\alpha)|\alpha\rangle$ 是真空态，即

$$D^{-1}(\alpha)|\alpha\rangle=|0\rangle \tag{19.39}$$

有人将(19.39)式作为相干态 $|\alpha\rangle$ 的定义.

为了变到真空表象，利用么正算符 T

$$T=D_n^{-1}(\alpha_n) \tag{19.40}$$

在真空表象中，态矢量 $|t\rangle$ 和哈密顿量分别是

$$|t\rangle=T\,|t_q\rangle \tag{19.41}$$

$$H=TH_qT^{-1}+\mathrm{i}\dot{T}T^{-1} \tag{19.42}$$

若入射光场为单模相干态 $|\alpha_n\rangle$，则它在真空表象中就变为真空态 $|0\rangle$，即

$$T|\alpha_n\rangle=D_n^{-1}(\alpha_n)|\alpha_n\rangle=|0\rangle \tag{19.43}$$

特别注意 $D(\alpha)$ 与时间 t 无关，所以(19.40)式所定义的 T 也与 t 无关，(19.42)式中 $\mathrm{i}\dot{T}T^{-1}=0$. 将(19.32)式的 H_q 代入(19.42)式，并利用

(19.40)式,得

$$\begin{aligned} H &= H_A - \hat{\mu} T \hat{E}(t) T^{-1} \\ &= H_A - \hat{\mu} D_n^{-1}(\alpha_n) \hat{E}(t) D(\alpha_n) \\ &\equiv H_A - \hat{\mu} E(t) \end{aligned} \tag{19.44}$$

其中 $\hat{E}(t) = \sum_k \hat{E}_k(t)$, $\overline{E}(t) = \sum_k \overline{E}_k(t)$. 由于 $D_n^{-1}(\alpha_n)$ 只作用到第 n 个模,所以

$$\left.\begin{aligned} \overline{E}_k(t) &= \overline{E}_k(t), \quad k \neq n \\ \overline{E}_n(t) &= T \hat{E}_n T^{-1}, \quad k = n \end{aligned}\right\} \tag{19.45}$$

为了从 $T\hat{E}_n T^{-1}$ 得到 $\overline{E}_n(t)$,只需利用 $T = D_n^{-1}(\alpha_n)$ 以及平移算符的性质,将 $\hat{E}_n$ 中的 a_n 换成 $(a_n + \alpha_n)$, a_n^+ 换成 $(a_n^+ + \alpha_n^*)$. 这样在表象变换中,除了算符 a_n, a_n^+ 之外,在光场中又增加了如下的项,

$$\mathrm{i}\left(\frac{\hbar\omega_0}{2\varepsilon_0 V}\right)^{1/2} \{\alpha_n \exp(-\mathrm{i}\omega_n t) - \alpha_n^* \exp(\mathrm{i}\omega_n t)\} \tag{19.46}$$

(19.46)式只不过是复数,不再是算符,它代表经典场,记为 $E_c(t)$. 即除了 a_n, a_n^+ 代表的量子场外,又多出了经典场 $E_c(t)$. 因此,在真空表象中,光场变为 $\hat{E}(t) + E_c(t)$,哈密顿量为

$$H = H_A - \hat{\mu} E_c(t) - \hat{\mu} \hat{E}(t) \tag{19.47}$$

综上所述,相干态的入射光与原子的作用(哈密顿量为 H_q)变到真空表象后,相干态变换成真空态,而光与原子的作用的哈密顿量变换成三项,第一项仍是 H_A,第二项是原子与经典场的作用,第三项是原子与真空的作用.

将(19.47)式与(19.31)式比较,可知半经典理论只是忽略了真空与原子的作用,而全量子理论只是在半经典理论的基础上再加上真空与原子的作用. 用真空表象研究光与二能级原子的作用便只需在半经典的布洛赫方程中再加上真空对原子的作用. 其实质是相干光可看成经典场再加上能量、光场及位相的真空起伏.

19.3.2 共振荧光的布洛赫方程与谱的结构

在讲相干态时,曾多次提到相干态光场是最接近经典场的量子场,它有最小的测不准量,而测不准量的实质与真空起伏有关. 在这种意义上,便可以把相干态的光看成"经典场+真空". 它与原子的作用便等价于经典场与原子的作用再加上真空对原子的作用. 这就是真空表象的含义.

真空效应表现在：(1)引起拉姆位移，(2)使得原子可以向真空中发射能量，由能量守恒可知原子跃迁到下能级（$\langle\sigma_z\rangle=-1,\langle\sigma^+\rangle=\langle\sigma^-\rangle=0$）. 也就是说，没有经典场的作用（$E_c=0$）时也有如下的衰减（真空作用表现为辐射对原子的阻尼）

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sigma_z&=-2\gamma_\perp\sigma_z\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sigma_x&=-\gamma_\perp\sigma_x\end{aligned}\right\}\tag{19.48}$$

对于纯粹的辐射衰减（请注意 $\gamma_a\neq0,\gamma_b=0,\gamma_\perp=\gamma_{ab}=\frac{1}{2}(\gamma_a+\gamma_b)=\frac{1}{2}\gamma_a$），$\gamma_\perp=\frac{1}{2}\gamma_\parallel$.

再加上经典场 E_c 的作用（即半经典布洛赫方程），

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{\Omega}-\gamma_\perp(\sigma_x\boldsymbol{i}+\sigma_y\boldsymbol{j})-2\gamma_\perp(\sigma_z+1)\boldsymbol{k}\tag{19.49}$$

$$\boldsymbol{\Omega}=\left(-\frac{\mu E}{\hbar},0,\omega-\omega_0\right)\tag{19.50}$$

其中，$\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{\Omega}$ 项代表经典场的作用，后两项是真空作用，(σ_z+1) 中的 1 是指在定态时原子在下能级，$\sigma_z^{(0)}=-1,\sigma_z-\sigma_z^{(0)}=(\sigma_z+1)$.

布洛赫方程(19.49)与半经典理论中有衰减的布洛赫方程的形式一样，但 $\gamma_\perp$ 和 $\gamma_\parallel$ 有了新的物理内容.

下面求解布洛赫方程. 在近共振时，$\omega\approx\omega_0$，由(19.50)式可知，布洛赫矢量的转轴很接近 x 轴，转速为 Ω. 若在 t_0 时刻相干光开始作用到原子上，到 t 时刻则有

$$\left.\begin{aligned}\sigma_y&\propto\sin\Omega(t-t_0)\\ \sigma_z&\propto\cos\Omega(t-t_0)\end{aligned}\right\}\tag{19.51}$$

当满足如下条件时，即

$$\Omega\gg\gamma_\perp\tag{19.52}$$

布洛赫矢量在衰减到零之前可以转很多圈. 光强越强，Ω 越大，转圈数目越多，见图 19.4. 注意 σ_y 在 y 方向的衰减常数是 $\gamma_\perp$，σ_z 在 z 方向的衰减常数是 $\frac{1}{2}\gamma_\perp$，在很多圈的转动中，平均衰减常数为

$$\bar{\gamma}=\frac{\gamma_\perp+\frac{1}{2}\gamma_\perp}{2}=\frac{3}{4}\gamma_\perp\tag{19.53}$$

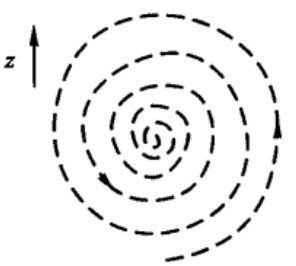


图 19.4 布洛赫矢量的转动与衰减

这样考虑到转动与平均衰减，则

$$\sigma_y \propto \exp\{-(3\gamma_\perp/4)(t-t_0)\}\sin\Omega(t-t_0) \tag{19.54}$$

$$\sigma_z \propto \exp\{-(3\gamma_\perp/4)(t-t_0)\}\cos\Omega(t-t_0) \tag{19.55}$$

而 σ_x 只衰减，几乎不转动(严格共振时则只沿 x 轴收缩)

$$\sigma_x \propto \exp\{(-\gamma_\perp/2)(t-t_0)\} \tag{19.56}$$

下面考虑共振荧光的谱. 由算符 $\sigma_x,\sigma_y,\sigma^+,\sigma^-$ 的定义已知

$$\left.\begin{aligned}\langle\sigma^-\rangle &= \rho_{12}\exp(-i\omega_0 t)\\ \langle\sigma^+\rangle &= \rho_{21}\exp(i\omega_0 t)\end{aligned}\right\} \tag{19.57}$$

即 σ^- 辐射正频的光，σ^+ 辐射负频的光，即

$$\left.\begin{aligned}E^{(+)} &\propto \sigma\left(t-\frac{\tau}{c}\right)f(r)\\ E^{(-)} &\propto \sigma^+\left(t-\frac{\tau}{c}\right)f(r)\end{aligned}\right\} \tag{19.58}$$

$f(r)$是描述偶极辐射场的空间分布的众所周知的函数. 辐射即共振荧光的光强为

$$\langle E^{(-)}E^{(+)}\rangle \propto \langle\sigma^+\sigma^-\rangle \tag{19.59}$$

其中 $\sigma^+=\sigma_x+i\sigma_y$，$\sigma^-=\sigma_x-i\sigma_y$，有

$$\langle\sigma^+\sigma^-\rangle=\frac{1}{4}\{\langle\sigma_x\sigma_x\rangle+\langle\sigma_y\sigma_y\rangle-i\langle\sigma_x\sigma_y\rangle+i\langle\sigma_y\sigma_x\rangle\} \tag{19.60}$$

其中 $-\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_x=2\sigma_z$. 在定态时，$\langle\sigma_z\rangle\approx 0$，所以共振荧光主要来自 σ_x 和 σ_y 的贡献：

(1) σ_x 的贡献

$$\langle\sigma_x(t_1)\sigma_x(t_2)\rangle \propto \exp[(-\gamma_\perp/2)(t_1-t_2)] \tag{19.61}$$

从旋转坐标系回到实验室坐标系，

$$\langle\sigma_x\sigma_x\rangle \propto \exp[(-\gamma_\perp/2)t]\cos\omega_0 t \tag{19.62}$$

做傅里叶分析，显然其中心频率在 ω_0，线宽为 $\gamma_\perp$.

(2) σ_y 的贡献

$$\langle\sigma_y\sigma_y\rangle \sim \exp[-(3\gamma_\perp/4)]\sin\Omega(t_1-t_2) \tag{19.63}$$

回到实验室坐标系

$$\langle\sigma_y\sigma_y\rangle=\exp[-(3\gamma_\perp/4)t]\sin\Omega t\cos\omega_0 t \tag{19.64}$$

或者

$$\langle\sigma_y\sigma_y\rangle=\frac{1}{2}\{\sin(\Omega+\omega_0)t+\sin(\Omega-\omega_0)t\}\exp[-(3\gamma/4)t] \tag{19.65}$$

显然，它包含两个峰，位置分别在$(\omega_0+\Omega)$和$(\omega_0-\Omega)$处，线宽都是

$3\gamma_\perp/2$.

如果仔细计算峰的高度，可知共振荧光谱的中心峰的高度等于边峰高度的 3 倍. 图 19.5 是共振荧光谱的三峰结构的计算结果.

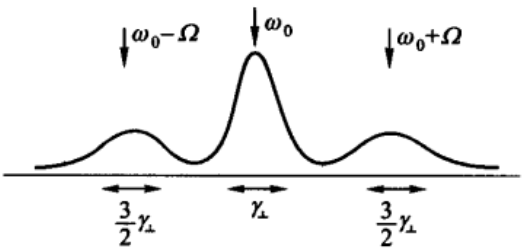


图 19.5 共振荧光谱的计算结果

对于非共振的情况，$\omega\neq\omega_0$. 这时 $\boldsymbol{\Omega}$ 轴在 $z-x$ 平面内而与 x 轴成 θ 角. 这时拉比频率是

$$\Omega=\sqrt{\left(\frac{\mu E}{\hbar}\right)^2+(\omega-\omega_0)^2} \tag{19.66}$$

$$\cos^2\theta=\frac{(\mu E/\hbar)^2}{\left[\left(\frac{\mu E}{\hbar}\right)^2+(\omega-\omega_0)^2\right]} \tag{19.67}$$

布洛赫矢量的平均衰减常数是

$$\bar{\gamma}=\left(\frac{1}{2}+\frac{\cos^2\theta}{4}\right)\gamma_\perp \tag{19.68}$$

这对共振荧光谱的宽度有影响.

关于共振荧光谱的计算可参考[3].

19.4 单原子共振荧光的反聚束效应

本节计算单原子共振荧光的反聚束效应. 基本思路是先求解光学布洛赫方程得到 $\rho_{22}(t)$ 等；然后利用拉克斯(Lax)的量子回归定理，把二阶关联函数与 $\rho_{22}(t)$ 联系起来，再由 $[g^2(\tau)-1]$ 判断反聚束效应.

19.4.1 光学布洛赫方程的解

频率为 ω 的相干光与能级间隔为 $\hbar\omega_0$ 的二能级原子作用，在相互作用表象中的哈密顿量

$$\hat{H}=\hbar\omega_0\sigma^+\sigma+\hbar\omega_0 a^+a+\hbar\{g\exp(\mathrm{i}\Delta t)\sigma^+a+g^*\exp(-\mathrm{i}\Delta t)a^+\sigma\} \tag{19.69}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\sigma^+&=|2\rangle\langle 1|\\ \sigma&=|1\rangle\langle 2|\end{aligned}\right\} \tag{19.70}$$

$$\Delta=\omega_0-\omega \tag{19.71}$$

g 是耦合常数.

Mollow 等利用马尔克夫近似，把场和原子算符的乘积分解，由(19.69)式得到熟知的布洛赫方程，再引入衰减项，这样便有

$$\frac{d\rho_{22}}{dt}=-ig\alpha\rho_{12}+ig^*\alpha^*\rho_{21}-2\gamma_\perp\rho_{22} \tag{19.72}$$

$$\frac{d\rho_{21}}{dt}=-(\gamma'+i\Delta)\rho_{21}+ig\alpha\,(\rho_{22}-\rho_{11}) \tag{19.73}$$

$$\left.\begin{aligned}\rho_{11}+\rho_{22}&=1\\ \rho_{12}&=\rho_{21}^*\end{aligned}\right\} \tag{19.74}$$

α 是相干态光场，平均光子数为 $|\alpha|^2$，$2\gamma_\perp$ 是上能级自发辐射衰减，γ' 是 $\gamma_\perp$ 与碰撞加宽之和，$g\alpha$ 是与拉比频率 Ω 有关

$$\Omega=2\,|g\alpha| \tag{19.75}$$

假定初始条件为

$$\rho_{22}(0)=\rho_{12}(0)=\rho_{21}(0)=0 \tag{19.76}$$

则 $\rho_{22}(t)$ 的起始变化(短时行为)为

$$\rho_{22}(t)=|g\alpha|^2t^2 \tag{19.77}$$

在弱场近似下，从初始条件(19.76)式，可得到

$$\rho_{22}(t)=|g\alpha|^2\left\{\frac{\gamma'/\gamma_\perp}{\Delta^2+\gamma'^2}+\frac{(2\gamma_\perp-\gamma')/\gamma_\perp}{\Delta^2+(2\gamma_\perp-\gamma')^2}\exp(-2\gamma_\perp t)\right.$$
$$\left.-\frac{2[\gamma'(2\gamma_\perp-\gamma')+\Delta^2]\cos\Delta t-4\Delta(\gamma_\perp-\gamma')\sin\Delta t}{(\Delta^2+\gamma'^2)[\Delta^2+(2\gamma_\perp-\gamma')^2]}\times\exp(-\gamma' t)\right\} \tag{19.78}$$

若初条件 $\rho_{21}(0)\neq0$，从(19.76)式还可得到非对角元

$$\rho_{21}(t)=\frac{ig\alpha}{i\Delta+\gamma'}\{\exp[-(i\Delta+\gamma')t]+\rho_{21}(0)\cdot\exp[-(i\Delta+\gamma')t]\} \tag{19.79}$$

当 $\gamma'=\gamma$ 时，有

$$\rho_{22}(t)=\frac{|g\alpha|^2}{\Delta^2+\gamma_\perp^2}[1+\exp(-2\gamma_\perp t)-2\cos\Delta t\exp(-\gamma t)] \tag{19.80}$$

当 $\gamma'\gg\gamma$ 且 $t\gg1/\gamma'$ 时

$$\rho_{22}(t)=\frac{|g\alpha|^2\gamma'/\gamma_\perp}{\Delta^2+\gamma'^2}[1-\exp(-2\gamma_\perp t)] \tag{19.81}$$

此时(19.72)式不适用.

利用下面的速率方程也可得到方程(19.81)，令

$$\frac{\mathrm{d}\rho_{22}}{\mathrm{d}t}=R-2\gamma_{\perp}\rho_{22} \tag{19.82}$$

$$R\equiv 2\,|g\alpha|^2\gamma'/(\Delta^2+\gamma'^2) \tag{19.83}$$

R 是泵浦速率，若 R 从(19.83)式取特殊值，则方程(19.82)的解也是(19.81)式，若将(19.78)式对 Δ 积分，则有

$$\int \rho_{22}(t)\mathrm{d}\Delta=(\pi\,|g\alpha|^2/\gamma_{\perp})[1-\exp(-2\gamma_{\perp}t)] \tag{19.84}$$

也与(19.81)式的形式一样.

在严格共振($\Delta=0$)时，可得到 $\rho_{22}(t)$ 的一般解

$$\rho_{22}(t)=\frac{|g\alpha|^2}{\gamma_{\perp}\gamma'+2|g\alpha|^2}\left\{1-\frac{2\gamma_{\perp}+\gamma'+\lambda}{2\lambda}\cdot\exp[-(2\gamma_{\perp}+\gamma'-\lambda)t/2]\right.$$
$$\left.+\frac{2\gamma_{\perp}+\gamma'-\lambda}{2\lambda}\exp\,[-(2\gamma_{\perp}+\gamma'+\lambda)t/2]\right\} \tag{19.85}$$

其中

$$\lambda=[(2\gamma_{\perp}-\gamma')^2-16\,|g\alpha|^2]^{1/2} \tag{19.86}$$

若原子没有碰撞加宽，则 $\gamma'=\gamma_{\perp}$，(19.85)式变为

$$\rho_{22}(t)=\frac{|g\alpha|^2}{\gamma_{\perp}^2+2|g\alpha|^2}\left\{1-\frac{3\gamma+\lambda}{2\lambda}\exp\left[-\frac{3\gamma_{\perp}-\lambda}{2\lambda}t\right]\right.$$
$$\left.+\frac{3\gamma-\lambda}{2\lambda}\exp\left[-\frac{3\gamma_{\perp}+\lambda}{2\lambda}t\right]\right\} \tag{19.87}$$

强场极限时 $\Omega\gg\gamma_{\perp}$，λ 是虚数，(19.87)式变为

$$\rho_{22}(t)=\left\{1-\exp\left[-\frac{3\gamma_{\perp}t}{2}\right]\cos\Omega t\right\},\quad(\Delta=0,\Omega\gg\gamma_{\perp}) \tag{19.88}$$

其中拉比频率 $\Omega=2|g\alpha|$.

19.4.2 拉克斯的量子回归定理

利用拉克斯(Lax)的量子回归定理，可以把二阶关联函数与上面计算的 $\rho_{22}(t)$ 联系起来，从而使反聚束问题迎刃而解.

由算符 σ^+，σ^- 的定义，可知在相互作用表象

$$\langle\sigma^+\rangle=\exp(\mathrm{i}\omega t)\rho_{12}(t) \tag{19.89}$$

$$\langle\sigma\rangle=\exp(-\mathrm{i}\omega t)\rho_{21}(t) \tag{19.90}$$

$$\langle\sigma^+\sigma\rangle=\rho_{22}(t)=1-\langle\sigma\sigma^+\rangle \tag{19.91}$$

其中(19.91)式说明 $\rho_{22}(t)$ 与单时期待值 $(\sigma^+(t)\sigma(t))$ 有关. 由量子回归定理，可从单时期待值计算双时关联函数.

量子回归定理认为，如果

$$\langle\hat{A}(t)\rangle=\sum\alpha_i(t)\langle\hat{A}_i(0)\rangle \tag{19.92}$$

则有

$$\langle \hat{B}(0)\hat{A}(t)\hat{C}(0)\rangle = \sum_i \alpha_i(t)\langle \hat{B}(0)\hat{A}_i(t)\hat{C}(0)\rangle \tag{19.93}$$

其中 $\hat{A},\hat{B},\hat{C}$ 都是算符. 下面利用该定理计算 $g^{(2)}(t)$.

由方程(19.72)和(19.73)的线性特性(只含 ρ_{ij} 的一次项),可知方程的解 $\rho_{ij}(t)$ 和初值 $\rho_{12}(0),\rho_{21}(0)$ 和 $\rho_{22}(0)$ 成线性关系. 利用(19.91)式,可知 $\langle\sigma^+\sigma\rangle$ 与 $\rho_{22}(t)$ 都与 $\rho_{ij}(0)$ 成线性关系. 这样可把 $(\sigma^+\sigma)$ 写成

$$\begin{aligned}\langle\sigma^+(t)\sigma(t)\rangle = &\alpha_1(t)+\alpha_2(t)\langle\sigma(0)\rangle+\alpha_3(t)\langle\sigma^+(0)\rangle\\ &+\alpha_4(t)\langle\sigma^+(0)\sigma(0)\rangle\end{aligned} \tag{19.94}$$

其中 $\alpha_i(t)$ 可由布洛赫方程的解确定,但这里并不需要其具体表达式. 进而考虑到,经过很长的时间之后,系统便与初条件无关了. 这样(19.94)式的系数必满足下式:

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_2(\infty)=\alpha_3(\infty)=\alpha_4(\infty)=0\\ &\langle\sigma^+(\infty)\sigma(\infty)\rangle=\alpha_1(\infty)\end{aligned}\right\} \tag{19.95}$$

下面把 $\sigma^+(t)\sigma(t)$ 看成量子回归定理中的 $\hat{A}$,且令 $\sigma^+(0)=\hat{B}(0)$,$\sigma(0)=\hat{C}(0)$,则由(19.93)式有

$$\langle\sigma^+(0)\sigma^+(t)\sigma(t)\sigma(0)\rangle=\alpha_1(t)\langle\sigma^+(0)\sigma(0)\rangle \tag{19.96}$$

其中左边的 $\sigma^+(t)\sigma(t)$ 用(19.94)式的算符形式代入,并且其中的一些项为零,即

$$\begin{aligned}\langle\sigma^+(0)\sigma(0)\sigma(0)\rangle&=\langle\sigma^+(0)\sigma^+(0)\sigma(0)\rangle\\ &=\langle\sigma^+(0)\sigma^+(0)\sigma(0)\sigma(0)\rangle=0\end{aligned} \tag{19.97}$$

(19.97)式的关系式容易利用(19.94)和(19.95)式得到,即对(19.97)式的每一部分都用量子回归定理,并且把数(例如 $\sigma^+(0)=\rho_{12}(0)$ 是数)都看成算符特例,再特别注意到这时(19.92)式右边系数 α_i 都为零.

再一次利用(19.58)式,即 $E^{(+)}\sim\sigma,E^{(-)}\sim\sigma^{(+)}$,可把二阶关联函数写成原子算符的形式,即

$$g^{(2)}(t)=\frac{\langle\sigma^+(0)\sigma^+(t)\sigma(t)\sigma(0)\rangle}{[\langle\sigma^+(\infty)\sigma(\infty)\rangle]^2} \tag{19.98}$$

其中表明 $t'=0$ 与 $t'+t\equiv 0+t$ 之间的关联. 分母中的光强期待值换成了定态的期待值(这里只考虑定态条件).

将方程(19.96)和方程(19.95)的第 2 式代入(19.98)式,则

$$g^{(2)}(t)=\frac{\alpha_1(t)}{\alpha_1(\infty)} \tag{19.99}$$

再利用(19.94)式和(19.95)式的系数以及(19.91)式,可知

$$\alpha_1(t)=\langle\sigma^+(t)\sigma(t)\rangle=\rho_{22}(t) \tag{19.100}$$

代入(19.99)式则得到我们期待已久的二阶关联函数的公式

$$g^{(2)}(t)=\frac{\rho_{22}(t)}{a_1(\infty)} \tag{19.101}$$

近年已经有人进一步计算了多原子合作共振荧光的二阶关联函数.

19.4.3 反聚束效应及实验

将强场近似的 $\rho_{22}(t)$ 公式(19.88)代入 $g^{(2)}(t)$,可知当延时 t 较短时,$g^{(2)}(t)<1$,即有反聚束效应.将弱场的 $\rho_{22}(t)$ 公式(19.81)代入,也有 $g^{(2)}(t)<1$,图 19.6 所示的是钠原子共振荧光的反聚束效应实验曲线,图中的 Ω 即拉比频率,曲线(a)有一部分满足 $g^{(2)}(t)<1$,这正是产生反聚束效应的判据,表明在该条件下,产生了反聚束;曲线(*b*)则是接近产生反聚束但尚未产生反聚束.究竟能否产生反聚束取决于 Ω 与 $\gamma_\perp$.

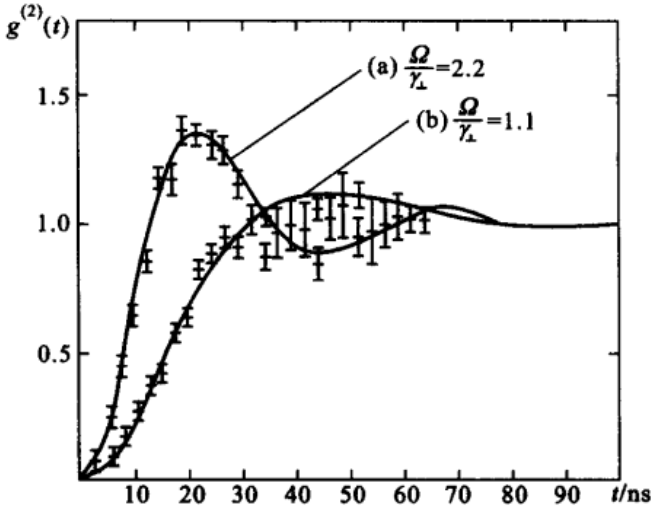


图 19.6 反聚束效应($\Delta=0$)

(a)$\Omega=2|g\alpha|=2.2\gamma_\perp$ (b)$\Omega=2|g\alpha|=1.1\gamma_\perp$

参 考 文 献

[1] Mollow B P. Power spectrum of light scattered by two-level systems. Phys. Rev., 1969,188:1969 - 1972.

[2] Walls D F. Evidence for the quantum nature of light. Nature,1979,280:451 - 460.

[3] Bonifacio R. Dissipative Systems in Quantum Optics. Berlin:Spinger-Verlag,1982.

[4] 王育竹等. Proceeding of the seventh international conference. Hawaii, 1985. 6. 24 -28.

第 20 章　光学压缩态

本章介绍光学压缩态(squeezed state)的定义、性质、产生、检测，以及可能的应用.

20.1　光学压缩态的概念和定义

光学压缩态或压缩态的光(squeezed light)是一种非经典光场，它没有经典类比. 简单说，量子起伏决定了光信号的最低噪声极限(真空起伏)，利用非线性光学方法可以将噪声压缩到低于噪声极限从而产生比激光的有序性更高的光，即压缩态的光. 1976 年美国的 Yuen 等首先从理论上预言了压缩态的光，1985 年由 Slusher 等用实验产生了压缩态的光.

20.1.1　真空起伏与压缩态概念

众所周知，很多因素会使光源发出的光的振幅及位相发生起伏. 例如，发光原子的碰撞，光源的元件的机械振动，光源中的原子激发速率的无规变化等，都是噪声之源. 不过，这类因素均可在原则上予以克服. 然而，即使这些因素都排除掉，还有一道不可逾越的障碍，这就是真空起伏.

真空起伏是量子力学概念. 例如，我们对一群光子大军“点名”(测量时)，会发现，这次点名的数与下次点名的数不同. 这支光子队伍，随时有“开小差”跑掉的，又随时有钻进来“混饭吃”的. 那么“开小差”的跑到何处去了？“混饭吃”的又是从哪里钻进来的？科学家们在对光子队伍进行“纪律检查”时，发现光子队伍即使生活在真空中，它也要受到干扰. 原来真空不空，“开小差”的光子跑到真空去了，“混饭吃”的光子也是从真空中钻进来的. 真空就是它们的“防空洞”和“避难所”. 即使人们不对光子队伍进行“点名”(测量)，也随时有光子从真空中“冒”出来，又有光子消失在真空中. 这就是真空起伏的奥秘.

实际上即使没有辐射(没有光子)，也会有真空起伏. 从辐射的谐振子模型来看，辐射是谐振子激发的结果. 当谐振子激发到第 1 激发态时，出现 1 个光子，激发到第 2 个激发态时，出现 2 个光子. 以此类推，激发到第 n 个激发态，则出现 n 个光子，当谐振子处于基态($n=0$)，则没有光子出

现或没有辐射. 然而基态的能量却不是零，而是$\frac{1}{2}\hbar\omega$，即零点能量或零点起伏. 这就是 $H=(n+\frac{1}{2})\hbar\omega$ 的含义. 即使没有辐射场的激发，也会有这种起伏，故称为零点起伏.

真空起伏与量子力学测不准原理密切相关. 例如坐标与动量、光子数与位相分别构成一对测不准量，一般说，凡是非对易的两个算符，其对应的力学量都是不可能同时准确测定的，即有一定的测不准量. 光场的产生算符 a^+ 和消灭算符 a 是非对易的，与之对应的光场的负频分量 $E^{(+)}(t)$ 与正频分量 $E^{(+)}(t)$ 也是非对易的，所以 $E^{(+)}(t)$ 和 $E^{(-)}(t)$ 也必须服从测不准原理，即 $E^{(+)}(t)$ 和 $E^{(-)}(t)$ 的测不准量的乘积必须大于或等于一个极小值. 光场的测不准量便意味着光场的起伏或噪声，其极小值便是由真空起伏决定的.

随着激光的发明与发展，人们对起伏与噪声的研究和控制已经接近量子力学的理论极限，即最小测不准量. 对理想的激光(即相干态的光)，光场可写成熟知的指数形式，这个指数又可写成正弦项与余弦项之和，即两个正交分量之和，这两个正交分量分别对应光子消灭算符的实部与虚部. 因此这两个正交分量的振幅 X 和 Y 是非对易的，所以 X 和 Y 的测不准量必须服从测不准原理. 相干态的光，其两个正交分量的测不准量之积等于测不准关系决定的极小值，而且这两个分量各自的测不准量的大小相等. 由此决定了激光装置的噪声极限.

所谓压缩态的光，就是其两个正交分量 X 和 Y 仍服从量子力学测不准原理，但是它们的测不准量的大小不相等. 一个分量的测不准量低于测不准关系的极限值，另一个分量的测不准量则高于该极限值. 但两者乘积仍大于或等于测不准关系的极限值. 换言之，压缩态的光场的一个分量的起伏或噪声被压缩到真空起伏之下，所付出的代价是另一分量的起伏却高于真空起伏. 这就是有得有失，有所为有所不为. 这多少有些像人的大脑的选择思维，当你聚精会神考虑某件事时，对这件事的灵敏度很高，然而对别的事却漠不关心，甚至视而不见、听而不闻了.

由压缩态的概念可知，为了产生压缩态的光，必须具备两个条件：第一，使光场的两个正交分量的测不准量分别低于真空起伏和高于真空起伏(但两者乘积还服从测不准原理). 第二，必须对这两个分量“择优支持”，使得起伏低于量子力学极限的分量能够占优势. 由于这两个分量的位相正好差 90°，所以任何产生和检测压缩态的方法都必须使用对位相敏感的物理过程和技术，现在已知有数十种方案可产生压缩态的光. 本章

第 8 节和第 9 节将介绍压缩态的产生方法.

对压缩态的光的研究有重要的理论和实验意义. 在理论上,光学压缩态是光场的典型的非经典效应之一,是纯量子效应,它是检验光的全量子理论的试金石之一. 在技术上,光学压缩态可能对超高信噪比的光通信、低噪声甚至零噪声的光放大器、超高灵敏的干涉仪(用于检测引力波等)有革命性的影响.

20.1.2 光学压缩态的图示

图示往往使复杂的抽象概念一目了然. 图 20.1 中,(a)是相干态,表明余弦分量 $\hat{X}\cos\omega t$ 的振幅 $\hat{X}$ 的起伏或测不准量,右边绘出了 $\hat{X}(X_1)$和

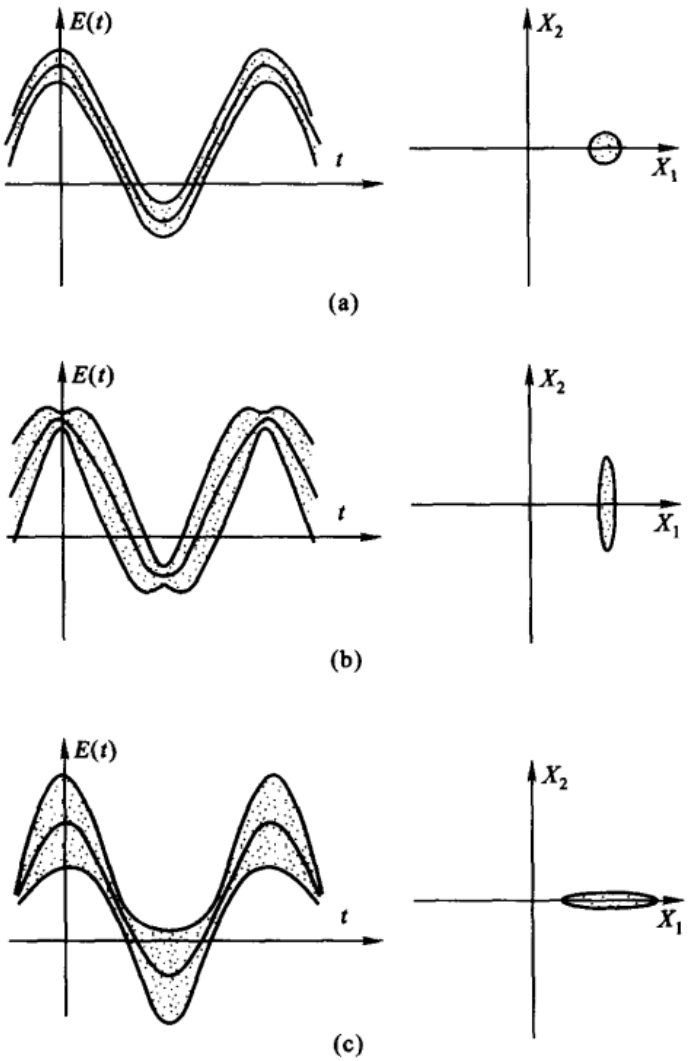


图 20.1 光场的测不准量与光学压缩态示意图

(a)相干态 (b)压缩态$|\alpha,s\rangle$,($s>0$),在位相为 0,π 等处振幅起伏被压缩 (c)压缩态$|\alpha,s\rangle$,$s<0$,位相起伏被压缩

$\hat{Y}(X_2)$的测不准范围是圆形，表明 $\hat{X}$ 和 $\hat{Y}$ 的测不准量相等. 图(b)和(c)分别表明振幅起伏被压缩和位相起伏被压缩.

图 20.2 表明在相空间中的测不准量. (a)是相干态$|\alpha\rangle$；(b)是压缩态$|\alpha, se^{i\theta}\rangle$，$s>0$，以后会看到 s 是压缩参数，θ 是压缩角；(c)是光子数态，两个同心圆之间的区域是光子数起伏.

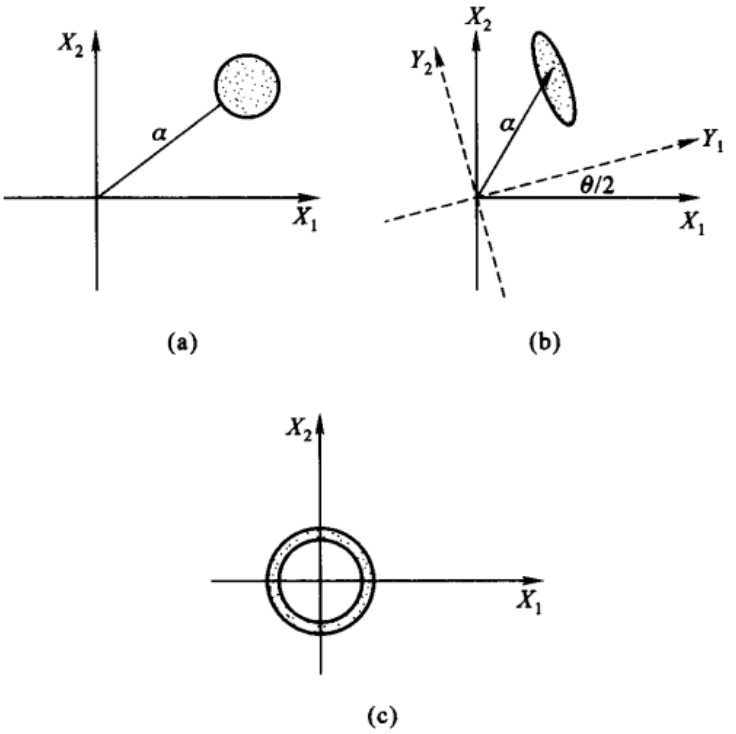


图 20.2 在相空间中的测不准量

(a)相干态$|\alpha\rangle$ (b)压缩态$|\alpha, se^{i\theta}\rangle$，$s>0$ (c)光子数态$|n\rangle$

20.1.3 压缩态的定义及分类

(1) 压缩相干态

如果光场的两个正交分量 $\hat{X}$ 和 $\hat{Y}$ 的测不准量为最小，而一个分量的测不准量小于最小极限，另一个分量的测不准量大于量子极限，则该光场是压缩相干态的光场，即

$$\left.\begin{aligned} &\langle(\Delta\hat{X})^2\rangle\langle(\Delta\hat{Y})^2\rangle=\frac{1}{16} \\ &\langle(\Delta\hat{X})^2\rangle<\frac{1}{4}, \quad \langle(\Delta\hat{Y})^2\rangle>\frac{1}{4} \\ &\langle(\Delta\hat{X})^2\rangle>\frac{1}{4}, \quad \langle(\Delta\hat{Y})^2\rangle<\frac{1}{4} \end{aligned}\right\} \tag{20.1}$$

它之所以称为压缩相干态，是因为二分量的测不准量的乘积等于最小测不准量，这与相干态相似. 它又称为最小测不准的压缩态，理想压缩态，也叫双光子相干态，它的一个特例是压缩真空态.

(2) 广义压缩态

广义压缩态不要求有最小测不准量. 它定义为

$$\left.\begin{aligned} &\langle(\Delta\hat{X})^2\rangle\langle(\Delta\hat{Y})^2\rangle=\frac{1}{16}\\ &\langle(\Delta\hat{X})^2\rangle<\frac{1}{4},\quad \langle(\Delta\hat{Y})^2\rangle>\frac{1}{4}\\ &\langle(\Delta\hat{X})^2\rangle>\frac{1}{4},\quad \langle(\Delta\hat{Y})^2\rangle<\frac{1}{4} \end{aligned}\right\} \tag{20.2}$$

(3) 多模压缩态

即压缩态的光是双模(两个频率)或更多的模(频率). 有的光学压缩态实验即能产生有两个分离频率 ω_+，ω_- 的压缩态的光.

(4) 高阶压缩态

上述压缩态只涉及对$\langle(\Delta\hat{E}_1)^2\rangle$或$\langle(\Delta\hat{E}_2)^2\rangle$的压缩. 如果$\langle(\Delta\hat{E}_1)^{2N}\rangle$小于量子极限(即相干态的相应的量)，称该光场的 $\hat{E}_1$ 分量是 N 阶压缩的. 这里 $\hat{E}_1$ 和 $\hat{E}_2$ 是光场 E 的两个正交分量，而 $N=1,2,\cdots$

20.2 起伏、均方差与关联函数

本章介绍光场起伏与光强起伏的数学描述，作为研究压缩态的预备知识.

20.2.1 光场的量子起伏

大家熟知的辐射量子化理论是以简谐振子为基础的，

$$\left.\begin{aligned} \hat{E}(z,t)&=(2\omega^2/\varepsilon_0 V)^{1/2}\hat{q}(t)\sin kz\\ \hat{H}(z,t)&=(2\varepsilon_0 c^2/V)^{1/2}\hat{p}(t)\cos kz \end{aligned}\right\} \tag{20.3}$$

其中 $k=\omega/c$ 是波数，V 是腔的量子化体积.

$$[\hat{q},\hat{p}]=\mathrm{i}\hbar \tag{20.4}$$

定义非厄米算符 $\hat{a}$ 和 $\hat{a}^+$

$$\left.\begin{aligned} \hat{a}&=(2\hbar\omega)^{-1/2}(\omega\hat{q}+\mathrm{i}\hat{p})\\ \hat{a}^+&=(2\hbar\omega)^{-1/2}(\omega\hat{q}-\mathrm{i}\hat{p}) \end{aligned}\right\} \tag{20.5}$$

显然 $\hat{a}$ 和 $\hat{a}^+$ 分别是消灭和产生算符，频率为 ω 的模的光场算符是

$$\hat{E}(z,t)=\frac{1}{2}\mathscr{E}_c\{\hat{a}(t)+\hat{a}^+(t)\} \tag{20.6}$$

$$\mathscr{E}_c\equiv 2^{3/2}\mathscr{E}_0\sin kz \tag{20.7}$$

这里 $\mathscr{E}_0$ 是单个光子的“电场”.

我们对 $\hat{a}$ 和 $\hat{a}^+$ 的性质是熟悉的

$$[\hat{a},\hat{a}^+]=1 \tag{20.8}$$

$$\left.\begin{aligned}\hat{a}|n\rangle&=\sqrt{n}|n-1\rangle\\ \hat{a}^+|n\rangle&=\sqrt{n+1}|n+1\rangle\end{aligned}\right\} \tag{20.9}$$

光子数态为

$$|n\rangle=\frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^+)^n|0\rangle \tag{20.10}$$

在量子力学中,力学量 $\hat{O}$ 的起伏用均方差描述

$$\langle(\triangle\hat{O})^2\rangle\equiv\langle\hat{O}^2\rangle-\langle\hat{O}\rangle^2 \tag{20.11}$$

若算符 $\hat{A}$ 和 $\hat{B}$ 有对易关系

$$[\hat{A},\hat{B}]=\hat{C}$$

则有测不准公式

$$\langle(\Delta A)^2\rangle\langle(\Delta B)^2\rangle\geqslant\frac{1}{4}|\langle C\rangle|^2 \tag{20.12}$$

(20.12)式中的等号对应于“最小测不准量”的态. 容易证明单模辐射场的基态(或振子基态)为最小测不准态.

$$\langle 0|\hat{p}|0\rangle=\langle 0|\hat{q}|0\rangle=0 \tag{20.13}$$

$$\left.\begin{aligned}\langle(\Delta q)_0^2\rangle&\equiv\langle 0|\hat{q}^2|0\rangle=\langle 0|\left(\frac{\hbar}{2\omega}\right)(\hat{a}+\hat{a}^+)(\hat{a}+\hat{a}^+)^+|0\rangle=\frac{\hbar}{2\omega}\\ \langle(\Delta p)_0^2\rangle&\equiv\langle 0|\hat{p}^2|0\rangle=\hbar\omega/2\end{aligned}\right\} \tag{20.14}$$

$$\langle(\Delta p)_0^2\rangle\langle(\Delta q)_0^2\rangle=(\hbar/2)^2 \tag{20.15}$$

(20.15)式即表明辐射场基态有最小测不准量.

对于相干态,已知相干态定义为$|\alpha\rangle$,

$$\left.\begin{aligned}\hat{a}\,|\alpha\rangle&=\alpha|\alpha\rangle\\ \alpha&\equiv|\alpha|\exp(i\phi)\end{aligned}\right\} \tag{20.16}$$

在光子数表象中,

$$|\alpha\rangle=\exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \tag{20.17}$$

单模相干态的光子数的均方差为

$$\langle(\Delta n)^2\rangle=\langle\hat{n}^2\rangle-\langle\hat{n}\rangle^2=|\alpha|^2=\langle\hat{n}\rangle \tag{20.18}$$

其中$|\alpha|^2$是该相干态的平均光子数.

我们还曾证明过相干态也有最小测不准量,

$$\langle(\Delta q)_\alpha^2\rangle\langle(\Delta p)_\alpha\rangle^2=(\hbar/2)^2 \tag{20.19}$$

还可证明,相干态在坐标及动量空间均为高斯型的波包,即

$$\left.\begin{aligned}\Psi(q)&=\langle q\,|\alpha\rangle=C\exp\left[(-q^2/4)\langle(\Delta q)_\alpha^2\rangle\right]\\ \Psi(p)&=\langle p\,|\alpha\rangle=C'\exp\left[(-p^2/4)\langle(\Delta p)_\alpha^2\rangle\right]\end{aligned}\right\} \tag{20.20}$$

20.2.2 正交分量的算符

前面曾提到光场的两个正交分量,下面给出具体形式.

由于$\hat{q}$和$\hat{p}$有不同的量纲,可写成量纲为1的算符,

$$\left.\begin{aligned}\hat{X}&=\frac{1}{2}(\hat{a}+\hat{a}^+)=(\omega/2\hbar)^{1/2}\hat{q}\\ \hat{Y}&=\frac{1}{2\mathrm{i}}(\hat{a}-\hat{a}^+)=(2\hbar\omega)^{-1/2}\hat{p}\end{aligned}\right\} \tag{20.21}$$

这样便可把光场写成

$$\begin{aligned}\hat{E}(z,t)&=\frac{1}{2}\mathscr{E}_c\left[\hat{a}\exp(-\mathrm{i}\omega t)+\hat{a}^+\exp(\mathrm{i}\omega t)\right]\\ &=\mathscr{E}_c(\hat{X}\cos\omega t+\hat{Y}\sin\omega t)\end{aligned} \tag{20.22}$$

由$\hat{q}$和$\hat{p}$的对易关系,易证

$$[\hat{X},\hat{Y}]=\mathrm{i}/2 \tag{20.23}$$

$$\langle(\Delta\hat{X})^2\rangle\langle(\Delta\hat{Y})^2\rangle\geqslant\frac{1}{16} \tag{20.24}$$

从(20.22)式可看出$\hat{X}$和$\hat{Y}$分别对应光场的余弦分量和正弦分量,二者位相差90°.

对于相干态,容易证明它的光场的两个正交分量的均方差相等,即

$$\langle(\Delta\hat{X})^2\rangle=\langle(\Delta\hat{Y})^2\rangle=\frac{1}{4} \tag{20.25}$$

20.2.3 光强的起伏

光强的起伏可用前已用到过的二阶关联函数来描述

$$g(t,t+\tau)=\frac{\langle:\hat{I}(t+\tau)\hat{I}(t):\rangle}{\langle\hat{I}\rangle^2} \tag{20.26}$$

其中$\hat{I}$是光强算符,:…:代表正规乘积(产生算符在左而消灭算符在右).

在讲光的反聚束时曾证明，对于单模光场

$$g^{(2)}(t,t)-1\equiv g^{(2)}(0)-1=\frac{\langle\hat{a}^{+}\hat{a}^{+}\hat{a}\hat{a}\rangle}{\langle\hat{a}^{+}\hat{a}\rangle^{2}}-1$$

$$=|(\langle(\Delta\hat{n})^{2}\rangle-\langle\hat{n}\rangle)|/\langle\hat{n}\rangle^{2} \tag{20.27}$$

Mandel 因子定义为

$$Q=\frac{\langle(\Delta\hat{n})^{2}\rangle-\langle\hat{n}\rangle}{\langle\hat{n}\rangle}=\langle\hat{n}\rangle[g^{(2)}(0)-1] \tag{20.28}$$

对于相干态，易证

$$\langle(\Delta\hat{n})_{a}^{2}\rangle=\langle\hat{n}\rangle \tag{20.29}$$

$$g^{(2)}(0)-1=0 \tag{20.30}$$

最后回到相空间中的相干态测不准量的图 20.2 中的(a). 对于强的相干态 $|\alpha|\gg1$，则光场的测不准量等于图中圆的半径即 1/4，因此可计算光子数的测不准量.

$$\left(|\alpha|\pm\frac{1}{4}\right)^{2}\approx|\alpha|^{2}\pm\frac{1}{2}|\alpha|=\langle\hat{n}\rangle\pm\frac{1}{2}\langle(\Delta\hat{n})^{2}\rangle^{1/2}$$

$$\langle(\Delta\hat{n})^{2}\rangle^{1/2}=|\alpha| \tag{20.31}$$

这与(20.18)式一样.

有了这些预备知识，我们将转而具体讨论压缩态，并经常与相干态比较.

20.3 双光子压缩态与准光子本征态

双光子压缩态就是压缩相干态，是测不准量最小的态. 它的一个特例可定义为准光子的本征态(即后面谈到的压缩真空态).

对于一个单模光场，使它的一部分与其位相复共轭混合，则产生一个新的模

$$\hat{b}_{s}=\mu\hat{a}+\nu\hat{a}^{+} \tag{20.32}$$

$$\mu^{2}-\nu^{2}=1 \tag{20.33}$$

下面证明，若 $\hat{a}$ 是在相干态，则 $\hat{b}_{s}$ 就在压缩态. 换言之，$\hat{a}$ 的本征态被定义为相干态，$\hat{a}|\alpha\rangle=\alpha|\alpha\rangle$，那么 $\hat{b}_{s}$ 的本征态就是压缩态. 从物理上来说，让一束激光(相干态)与其位相复共轭的光发生混合，则产生压缩态的光.

定义

$$\left.\begin{aligned}\hat{X}_{s}&=\frac{1}{2}(\hat{b}_{s}+\hat{b}_{s}^{+})\\ \hat{Y}_{s}&=\frac{1}{2\mathrm{i}}(\hat{b}_{s}-\hat{b}_{s}^{+})\end{aligned}\right\} \tag{20.34}$$

并且令

$$\mu=\cosh s$$
$$\nu=-\sinh s$$

满足(20.33)式. 由(20.32)及(20.34)式有

$$\begin{aligned}\hat{X}_s&=\frac{1}{2}\{\hat{a}\cosh s-\hat{a}^+\sinh s+\hat{a}^+\cosh s-\hat{a}\sinh s\}\\&=\frac{1}{2}(\hat{a}+\hat{a}^+)e^{-s}=\hat{X}e^{-s}\end{aligned}\tag{20.35}$$

同理

$$\hat{Y}_s=\hat{Y}e^{s}$$

其中用到 $e^{-s}=(\cosh s-\sinh s)$, $e^{s}=(\cosh s-\sinh s)$, 以及 $\hat{X}$ 和 $\hat{Y}$ 与 $\hat{a}$ 和 $\hat{a}^+$ 的关系.

注意其中 s 是数而不是算符, 所以

$$\left.\begin{aligned}\langle(\Delta\hat{X}_s)^2\rangle&=\langle(\Delta\hat{X})^2\rangle e^{-2s}=\frac{1}{4}e^{-2s}\\\langle(\Delta\hat{Y}_s)^2\rangle&=\langle(\Delta\hat{Y})^2\rangle e^{2s}=\frac{1}{4}e^{2s}\end{aligned}\right\}\tag{20.36}$$

显然有

$$\left.\begin{aligned}&\langle(\Delta\hat{X}_s)^2\rangle\langle(\Delta\hat{Y}_s)^2\rangle=\frac{1}{16}\\&\langle(\Delta\hat{X}_s)^2\rangle<\frac{1}{4}\\&\langle(\Delta\hat{Y}_s)^2\rangle>\frac{1}{4}\end{aligned}\right\}\tag{20.37}$$

所以在 $\hat{b}_s$ 的本征态的光, 其两个正交分量的测不准量的乘积等于最小测不准量(与相干态相似), 但分量 $\hat{X}_s$ 的测不准量小于相干态的情况, 而分量 $\hat{Y}_s$ 的测不准量则大于最小测不准量. 因此, $\hat{b}_s$ 的本征态就是压缩相干态.

此外, 由 $[\hat{a},\hat{a}^+]=1$, 可以证明

$$\left.\begin{aligned}[\hat{b}_s,\hat{b}_s^+]&=1\\[\hat{X}_s,\hat{Y}_s]&=\frac{1}{2}i\end{aligned}\right\}\tag{20.38}$$

$\hat{a}_s$ 与 $\hat{a}_s^+$ 的对易关系与 $\hat{a},\hat{a}^+$ 的对易关系一样, 所以 $\hat{b}_s$ 和 $\hat{b}_s^+$ 称为"准光子"的消灭算符及产生算符. 与光子的情况相似, 可以将"准光子数"态定义为 $|n_s\rangle$,

$$\hat{b}_s^+\hat{b}_s|n_s\rangle=n_s|n_s\rangle\tag{20.39}$$

而哈密顿量为

$$\hat{H}_s=\hbar\omega\left(\hat{b}_s^+\ \hat{b}_s+\frac{1}{2}\right) \tag{20.40}$$

最后特别指出，因为 $\hat{b}_s$ 的本征态是压缩态，令其本征态为 $|\beta\rangle_{\mu\nu}$，即有

$$\hat{b}_s|\beta\rangle_{\mu\nu}=\beta|\beta\rangle_{\mu\nu} \tag{20.41}$$

这样，有关光子相干态的全部性质及公式都可移植到压缩态的研究，只需记住现在处理的是“准光子”. 这种移植是直截了当的，有关公式不必赘述.

20.4 用位移算符与压缩算符定义的压缩态

本节介绍压缩态的另一种定义，即用位移算符（或平移算符）和压缩算符定义压缩态.

20.4.1 位移算符 $D(\alpha)$

我们曾指出，可以用位移算符来定义相干态 $|\alpha\rangle$，即

$$|\alpha\rangle=\hat{D}(\alpha)|0\rangle \tag{20.42}$$

其中

$$\hat{D}(\alpha)=\exp(\alpha\hat{a}^+-\alpha^*\hat{a}) \tag{20.43}$$

位移算符导致如下的变换

$$\left.\begin{aligned}\hat{a}&\to\hat{D}^{-1}(\alpha)\hat{a}\hat{D}(\alpha)=\hat{a}+\alpha\\ \hat{a}^+&\to\hat{D}^{-1}(\alpha)\hat{a}^+\hat{D}(\alpha)=\hat{a}^++\alpha^*\end{aligned}\right\} \tag{20.44}$$

即分别把 $\hat{a}$ 和 $\hat{a}^+$ 平移 α 和 α^*.

同样可用光场的两个正交分量来定义位移算符，即

$$\hat{D}(\alpha)=\exp\left[2\mathrm{i}(\mathrm{Im}\alpha\hat{X}-\mathrm{Re}\alpha\hat{Y})\right] \tag{20.45}$$

$\hat{D}(\alpha)$ 使 $\hat{X}$ 和 $\hat{Y}$ 分别平移 $\mathrm{Re}\alpha$ 及 $\mathrm{Im}\alpha$，即

$$\left.\begin{aligned}\hat{X}&\to\hat{D}^{-1}(\alpha)\hat{X}\hat{D}(\alpha)=\hat{X}+\mathrm{Re}\alpha\\ \hat{Y}&\to\hat{D}^{-1}(\alpha)\hat{Y}\hat{D}(\alpha)=\hat{Y}+\mathrm{Im}\alpha\end{aligned}\right\} \tag{20.46}$$

图 20.3 表明，位移算符，只不过是把相空间中的真空的圆（原点在(0，0)而半径代表真空起伏）平移到新的位置，图形及大小均不变，但圆心位置从(0,0)移到坐标点($\mathrm{Re}\alpha$, $\mathrm{Im}\alpha$)，而平移的方向与 $\hat{X}$ 夹角为 ϕ，$\tan\phi=\mathrm{Im}\alpha/\mathrm{Re}\alpha$，平移的距离就是 α. 这又一次清楚地表明，相干态的光完全等价于经典

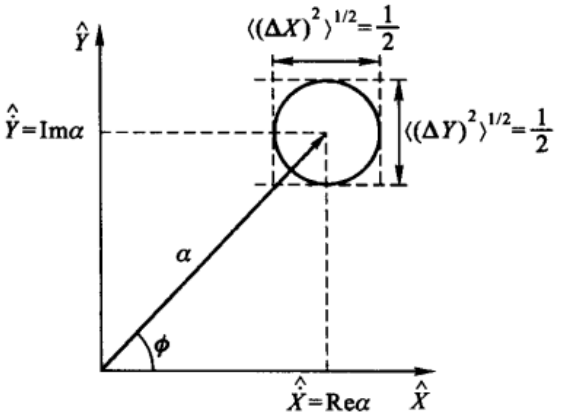


图 20.3 位移算符 $\hat{D}(\alpha)$的作用

光场(α)再加上真空起伏. 这正如在 19.2 节介绍共振荧光时所讲过的那样.

20.4.2 压缩算符

压缩算符定义为

$$\left.\begin{aligned}\hat{S}(\zeta)&=\exp\left(\frac{1}{2}\zeta^{*}\hat{a}^{2}-\frac{1}{2}\zeta\hat{a}^{+2}\right)\\ \zeta&=s\exp(\mathrm{i}\theta)\end{aligned}\right\}\tag{20.47}$$

其中 s 是压缩参数,θ 是压缩角,$0\leqslant s<\infty$,$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$,可以用对易关系证明,$\hat{S}(\zeta)$的作用为

$$\left.\begin{aligned}\hat{a}\rightarrow\hat{S}^{-1}(\zeta)\hat{a}\hat{S}(\zeta)&=\hat{a}\cosh s-\hat{a}^{+}\exp(\mathrm{i}\theta)\sinh s\\ \hat{a}^{+}\rightarrow\hat{S}^{-1}(\zeta)\hat{a}^{+}\hat{S}(\zeta)&=\hat{a}^{+}\cosh s-\hat{a}\exp(\mathrm{i}\theta)\sinh s\end{aligned}\right\}\tag{20.48}$$

压缩算符的作用,在相空间中如图 20.4 所示. 此图表明,压缩算符把对应相干态的圆压缩成椭圆(一个方向收缩而另一个方向扩张),该椭圆的长轴与那条和 $\hat{X}$ 轴成 θ 角的直线垂直,但圆心的位置(到原点的距离和方位)不变. 图中的 χ 角与检测技术有关. 在下面将看到,当检测压缩态的光的时候,被测到的信号取决于如下的光场算符.

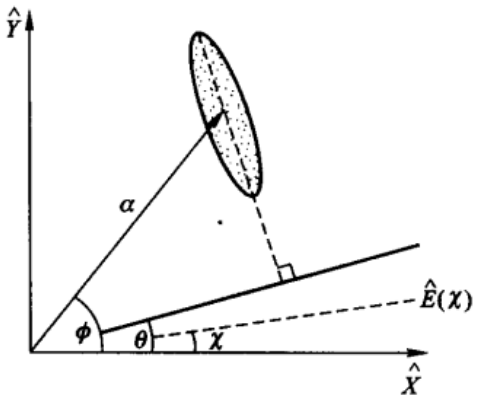


图 20.4 压缩算符的作用,它把相干态的圆压成椭圆. 角度 χ 是位相检测角(见正文)

$$\hat{E}(\chi)=\frac{1}{2}\mathscr{E}_{c}\{\exp(\mathrm{i}\chi)\hat{a}^{+}+\exp(-\mathrm{i}\chi)\hat{a}\}\tag{20.49}$$

与原来的光场算符比较，χ 取代了原来 ωt 的位置. 图 20.4 中的 χ 角即(20.49)中的 χ 角，图中的虚线代表复矢量 $\hat{E}(\chi)$的方向，复数振幅矢量 α 在 $\hat{E}(\chi)$方向的投影就是检测到的信号的平均值，而椭圆在 $\hat{E}(\chi)$的投影就是检测到的信号的均方差.

20.4.3 用位移算符与压缩算符定义压缩态

用算符 $\hat{D}(\alpha)$和 $\hat{S}(\zeta)$定义压缩态，有清晰的几何图像，且便于研究压缩态的一般性质以及压缩态的光子统计，这里仅给出定义几何图像，其他问题见 20.4 及 20.5 节.

用 $\hat{D}(\alpha)$和 $\hat{S}(\zeta)$定义的压缩态，有两种等价的形式和两种定义. Cave 的定义为

$$|\alpha,\zeta\rangle=\hat{D}(\alpha)\hat{S}(\zeta)|0\rangle \tag{20.50}$$

Yuen 的定义为

$$|\alpha,\zeta\rangle=\hat{S}(\zeta)\hat{D}(\alpha)|0\rangle \tag{20.51}$$

这两种定义的几何图像见图 20.5. 其中的 $\hat{D}(\alpha)\hat{S}(\zeta)|0\rangle$即

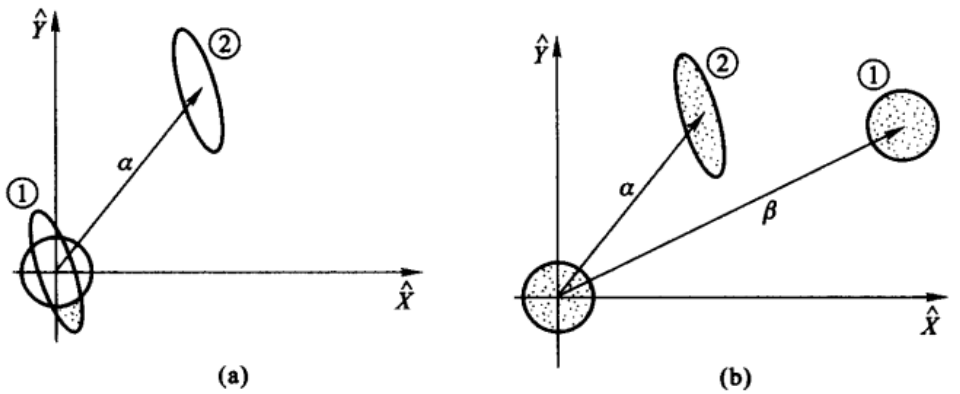


图 20.5 用算符 $\hat{D}(\alpha)$，$\hat{S}(\zeta)$定义的压缩态

(a)$\hat{D}(\alpha)\hat{S}(\zeta)|0\rangle$，先压后移 (b)$\hat{S}(\zeta)\hat{D}(\alpha)|0\rangle$，先移后压

先把真空态压缩成椭圆. 注意 $\zeta=s\exp(\mathrm{i}\theta)$，椭圆的形状由压缩参数 s 决定，而方位由压缩角 θ 决定. 而 Yuen 的定义 $\hat{S}(\zeta)\hat{D}(\alpha)|0\rangle$则是先把真空态平移，继而再压缩成椭圆.

Cave 和 Yuen 的定义是等价的. 这是因为经过适当的变换之后 $\hat{D}(\alpha)$和 $\hat{S}(\zeta)$可交换位置，有

$$\hat{S}(\zeta)\hat{D}(\alpha)=\hat{S}(\zeta)\hat{D}(\alpha)\hat{S}^{+}(\zeta)\hat{S}(\zeta)=\hat{D}(\beta)\hat{S}(\zeta) \tag{20.52}$$

$$\left.\begin{aligned}\hat{D}(\beta)&\equiv\hat{S}(\zeta)D(\alpha)\hat{S}^{+}(\zeta)\\ \beta&\equiv\alpha\cosh s+\alpha^{*}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\sinh s\end{aligned}\right\}\tag{20.53}$$

对于特殊情况 $\alpha=0$ 及 $\theta=0$，则：

$$\left.\begin{aligned}\hat{D}(\alpha)&=\exp(\alpha\hat{a}^{+}-\alpha^{*}\hat{a})=1,\quad \alpha=0\\ \hat{S}(\zeta)&=\exp\left(\frac{1}{2}s\hat{a}^{2}-\frac{1}{2}s\hat{a}^{+2}\right),\quad \theta=0\end{aligned}\right\}\tag{20.54}$$

这时压缩态为

$$|0,\zeta\rangle=\hat{S}(\zeta)|0\rangle\tag{20.55}$$

这种压缩态称为真空压缩态.

如果 $\alpha=0,\theta=0,\zeta=s$，则(20.55)式变为

$$|0,s\rangle=\hat{S}(s)|0\rangle\tag{20.56}$$

注意这时 $\hat{S}(s)$的变换式(20.48)变为

$$\left.\begin{aligned}\hat{a}&\to\hat{S}^{-1}(s)\hat{a}\hat{S}(s)=\hat{a}\cosh s-\hat{a}^{+}\sinh s\\ \hat{a}^{+}&\to\hat{S}^{-1}(s)\hat{a}^{+}\hat{S}(s)=\hat{a}^{+}\cosh s-\hat{a}\sinh s\end{aligned}\right\}\tag{20.57}$$

这时(20.57)式与(20.32)式一样. 这说明在 20.3 节中定义的压缩态(作为准光子本征态)，实际上是压缩真空态的 $\theta=0$ 的特例，即对真空的测不准量的圆形只沿 X 方向压缩成椭圆(在 Y 方向扩张).

最后再回到“双光子相干态”的名称. 因为在单光子过程，算符的指数部分只含产生或消灭算符 $\hat{a}^{+}$ 和 $\hat{a}$ 的一次方. 而现在 $\hat{S}(\zeta)$算符显然含有 $(\hat{a}^{+})^{2},\hat{a}^{2}$ 这对应双光子过程，在 Yuen 最初讨论的情况中，压缩后的光场两个正交分量的测不准量之积是最小测不准量，即与相干态有相似之处. 因此，Yuen 最初称之为“双光子相干态”.

20.5 光学压缩态的一般性质

本节主要计算光学压缩态的光场的两个正交分量的测不准量，下节再考虑光子数与位相.

由光学压缩态的定义(20.50)式和 $\hat{D}(\alpha)$，$\hat{S}(\zeta)$的公式(20.44)，(20.48)，可计算一些重要算符的期待值. 下面用简单的尖括号代表对压缩态的期待值.

$$\left.\begin{aligned}|\alpha,\zeta\rangle&=\hat{D}(\alpha)\hat{S}(\zeta)|0\rangle\\ \langle\hat{a}\rangle&=\langle\alpha,\zeta|\hat{a}|\alpha,\zeta\rangle\end{aligned}\right\}\tag{20.58}$$

将$|\alpha,\zeta\rangle$代入，并用算符 $\hat{D}(\alpha)$，$\hat{S}(\zeta)$的性质，可求出

$$\left.\begin{aligned}\langle\hat{a}\rangle&=\alpha\\ \langle\hat{a}^{+}\rangle&=\alpha^{*}\end{aligned}\right\} \tag{20.59}$$

此式表明$\langle\hat{a}\rangle$,$\langle\hat{a}^{+}\rangle$的值与压缩参数无关. 光子数的期待值为

$$\langle\hat{n}\rangle=\langle\hat{a}^{+}\hat{a}\rangle=|\alpha|^{2}+\sinh^{2}s \tag{20.60}$$

其中第一项与相干态的光场振幅 α 有关,而第二项是真空压缩的贡献,还可计算$\langle\hat{a}\hat{a}\rangle$等,

$$\langle\hat{a}\hat{a}\rangle=\alpha^{2}-\exp(\mathrm{i}\theta)\sinh s\cosh s \tag{20.61}$$

由以上结果,可计算出光场的两个正交分量的期待值为

$$\left.\begin{aligned}\langle\hat{X}\rangle&=\frac{1}{2}(\alpha+\alpha^{*})=\mathrm{Re}\alpha\\ \langle\hat{Y}\rangle&=\frac{1}{2\mathrm{i}}(\alpha-\alpha^{*})=\mathrm{Im}\alpha\end{aligned}\right\} \tag{20.62}$$

还可得到两个正交分量的测不准量

$$\left.\begin{aligned}\langle(\Delta\hat{X})^{2}\rangle&=\frac{1}{4}\left\{\exp(-2s)\cos^{2}\left(\frac{1}{2}\theta\right)+\exp(2s)\sin^{2}\left(\frac{1}{2}\theta\right)\right\}\\ \langle(\Delta\hat{Y})^{2}\rangle&=\frac{1}{4}\left\{\exp(-2s)\sin^{2}\left(\frac{1}{2}\theta\right)+\exp(2s)\cos^{2}\left(\frac{1}{2}\theta\right)\right\}\end{aligned}\right\} \tag{20.63}$$

式(20.63)的几何表示见图 20.6. 椭圆长轴的长度为 $1/2\exp(s)$,短轴长度为 $1/2\exp(-s)$. 椭圆的取向由 θ 决定. 由椭圆理论可知,该椭球向 X,Y 轴的投影等于 $\hat{X}$ 和 $\hat{Y}$ 的均方差的平方根$\langle(\Delta\hat{X})^{2}\rangle^{1/2}$和$\langle(\Delta\hat{Y})^{2}\rangle^{1/2}$.

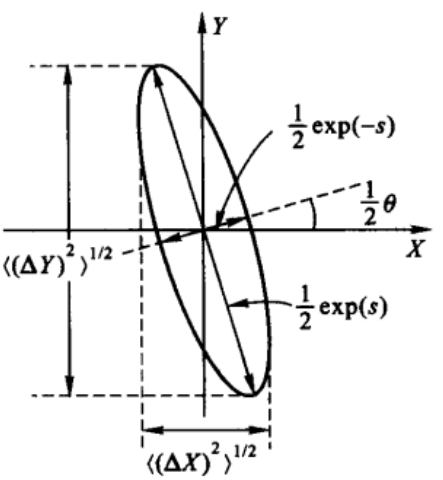


图 20.6 压缩态椭球的形状与取向 s 决定椭圆轴长,θ 决定椭圆取向,椭圆在 $\hat{X}$ 和 $\hat{Y}$ 的投影决定$\langle(\Delta\hat{X})^{2}\rangle^{1/2}$和$\langle(\Delta\hat{Y})^{2}\rangle^{1/2}$

特别注意,式(20.63)表明$\langle(\Delta\hat{X})^{2}\rangle$和$\langle(\Delta\hat{Y})^{2}\rangle$与相干态光场振幅 α 无关. 比较图 20.6 和图 20.4,可知图 20.4 能正确代表光场压缩特性. 由此还表明,对真空的压缩 $\hat{S}(\zeta)|0\rangle$即代表压缩态的本质. $\hat{D}(\alpha)$只影响两个正交分量的期待值$\langle\hat{X}\rangle$和$\langle\hat{Y}\rangle$,而不影响测不准量$\langle(\Delta\hat{X})^{2}\rangle$和$\langle(\Delta\hat{Y})^{2}\rangle$.

由(20.63)式可知,光场的 X 分量的压缩态的条件是

$$\cos\theta>\tanh s \tag{20.64}$$

特别当 $\theta=0$ 时,$\langle(\Delta\hat{X})^{2}\rangle$和$\langle(\Delta\hat{Y})^{2}\rangle$达最小值,

$$\left.\begin{aligned}\langle(\Delta\hat{X})^2\rangle&=\frac{1}{4}\exp(-2s),\quad \theta=0\\ \langle(\Delta\hat{Y})^2\rangle&=\frac{1}{4}\exp(2s),\quad \theta=0\end{aligned}\right\}\tag{20.65}$$

这与准光子本征态定义的压缩公式(20.36)一样. 由(20.63)式还易得出对光场 Y 分量压缩的条件

$$\cos\theta<-\tanh s\tag{20.66}$$

光场的两个正交分量的测不准量之积为

$$\langle(\Delta\hat{X})^2\rangle^{1/2}\langle(\Delta\hat{Y})^2\rangle^{1/2}=\frac{1}{4}\{\cosh^2(2s)\sin^2\theta+\cos^2\theta\}^{1/2}\tag{20.67}$$

最小测不准量的条件是

$$\langle(\Delta\hat{X})^2\rangle^{1/2}\langle(\Delta\hat{Y})^2\rangle^{1/2}=\frac{1}{4},\quad \theta=0,\pi\tag{20.68}$$

对其他角度,测不准量较大,极大条件是

$$\langle(\Delta\hat{X})^2\rangle^{1/2}\langle(\Delta\hat{Y})^2\rangle^{1/2}=\frac{1}{4}\cosh 2s,\quad \theta=\frac{1}{2}\pi,\frac{3}{2}\pi\tag{20.69}$$

显然,在图 20.6 中,若取两个新的正交分量分别沿着椭圆长、短轴,对该图中的两个新的正交分量而言,却是代表最小测不准态的压缩态了.

由 $\hat{S}(\zeta)$的定义可知,当 $\zeta=0$ 时,压缩态便还原成相干态了

$$\hat{D}(\alpha)\hat{S}(0)|0\rangle=\hat{D}(\alpha)|0\rangle$$

这时,将 $\zeta=0$(即 $s=0$)代入上列公式,便都简化为相干态的结果. 在另一个相反的极限,即 s 很大,测不准椭圆则趋向一条线(垂直于 $\hat{X}-\hat{Y}$ 平面内的$\frac{1}{2}\theta$ 方向. 若 $\theta=0$,则 $\hat{X}$ 分量的测不准量趋向零(向 $\hat{X}$ 轴的投影为零),而 $\hat{Y}$ 的测不准量则迅速发散. 这些特殊的压缩态(将测不准椭圆压缩成线)称为"线态".

$\theta=0$,$s\to\infty$的线态$|X\rangle$是算符 $\hat{X}$ 的本征态

$$\hat{X}|X\rangle=X|X\rangle$$

比较一般的压缩态$|\alpha,s\rangle$,$\theta=0$ 的波函数或坐标表象,可定义为它向线态$|X\rangle$的投影

$$\begin{aligned}\langle X|\alpha,s\rangle=&[2\exp(2s/\pi)]^{1/4}\times\exp\{-(x-\mathrm{Re}\alpha)^2\exp(2s)\\&+2\mathrm{i}\alpha\mathrm{Im}\alpha-\mathrm{i}\mathrm{Re}\alpha\mathrm{Im}\alpha\}\end{aligned}\tag{20.70}$$

$$|\langle X|\alpha,s\rangle|^2=[2\exp(2s/\pi)]^{1/2}\exp[-2(x-\mathrm{Re}\alpha)^2\exp(2s)]\tag{20.71}$$

这表明,压缩态也是高斯型的波包.

20.6 光学压缩态与光子反聚束及亚泊松分布

本节先计算光子数的测不准量，并由此讨论光学压缩态与光子反聚束及亚泊松分布的关系. 最后计算位相的测不准量.

20.6.1 光子数的测不准量

光子数在压缩态的平均值由(20.60)式给出. 用类似的方法还可计算出压缩态的光子数的均方差

$$\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle=|\alpha|^2\exp(-2s)\cos^2\left(\phi-\frac{1}{2}\theta\right)+\exp(2s)\sin^2\left(\phi-\frac{1}{2}\theta\right)+2\sinh^2 s\cosh^2 s \tag{20.72}$$

其中 $\alpha=|\alpha|\exp(\mathrm{i}\phi)$. 这样，对单模压缩态，就得到了二阶关联函数和 Mandel 的亚泊松因子：

$$\left.\begin{aligned} g^{(2)}(0)-1&=\frac{|\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle-\langle\hat{n}\rangle|}{\langle\hat{n}\rangle^2}\\ Q&=\frac{\langle(\Delta n)^2\rangle-\langle\hat{n}\rangle}{\langle\hat{n}\rangle^2}=\langle\hat{n}\rangle[g^{(2)}(0)-1]\end{aligned}\right\} \tag{20.73}$$

其中$\langle\hat{n}\rangle$和$\langle(\Delta n)^2\rangle$分别由(20.60)式和(20.72)式给出. 下面讨论两种有重要实际意义的特殊情况：

(1) 真空压缩态($\alpha=0$). 实验产生的压缩态的光多是在压缩真空态. 这时 $\alpha=0$，由(20.72)和(20.60)式得到

$$\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle=2\langle\hat{n}\rangle(\langle\hat{n}\rangle+1) \tag{20.74}$$

$$g^{(2)}(0)=3+(1/\langle\hat{n}\rangle) \tag{20.75}$$

$$Q=2\langle n\rangle+1 \tag{20.76}$$

即压缩真空态的光同时还有聚束效应与超泊松分布.

(2) 强的相干态加压缩态($|\alpha|^2\gg\exp(2s)$). 在压缩态的检测中，有一个强的相干态的光叠加到被检测的压缩态的光，这样必须考虑到相干态的光对平均光子数的贡献. 这时，

$$|\alpha|^2\gg\exp(2s) \tag{20.77}$$

$$\langle\hat{n}\rangle\approx|\alpha|^2 \tag{20.78}$$

(20.72)式变为

$$\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle=|\alpha|^2\left[\exp(-2s)\cos^2\left(\phi-\frac{1}{2}\theta\right)\right]+\exp(2s)\sin^2\left(\phi-\frac{1}{2}\theta\right) \tag{20.79}$$

而亚泊松因子 Q 及二阶关联函数变为

$$Q=[\exp(-2s)-1]\cos^2\left(\phi-\frac{1}{2}\theta\right)+[\exp(2s)-1]\sin^2\left(\phi-\frac{1}{2}\theta\right)$$
$$=|\alpha|^2(g^{(2)}-1) \tag{20.80}$$

由此可知,光子反聚束与亚泊松分布的条件为

$$\cos(2\phi-\theta)>\tanh s \tag{20.81}$$

与压缩态的条件(20.64)式即 $\cos\theta>\tanh s$ 比较,清楚表明,当 $\phi=0$ 时(即在相干态光场振幅矢量 α 的方向,压缩态、反聚束、亚泊松分布的条件相同.因此,这个附加的相干态的强信号,迫使真空压缩态由聚束、超泊松分布变为反聚束与亚泊松分布.

对于给定的 s,还很容易求出亚泊松因子 Q 的极值($|\alpha|^2\ll\exp(2s)$ 时)

$$Q_{\min}=|\alpha|^2\ (g^{(2)}-1)_{\min}=\exp(-2s)-1,\phi=\frac{1}{2}\theta \tag{20.82}$$

$$\left.\begin{aligned}Q_{\max}&=|\alpha|^2\ (g^{(2)}-1)_{\max}=\exp(2s)-1\\ \phi&=\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{2}\pi\end{aligned}\right\} \tag{20.83}$$

20.6.2 压缩态光子分布函数

实际上$\langle n\rangle$和$\langle(\Delta n)^2\rangle$都是与光子分布函数 P_n 紧密联系的.对于压缩态$|\alpha,\zeta\rangle$,其光子分布函数是

$$P_n=|\langle n\,|\alpha,\zeta\rangle|^2 \tag{20.84}$$

其中$\langle n|\alpha,\zeta\rangle$由 Yuen 于 1976 年给出,即为

$$\langle n|\alpha,\zeta\rangle=(n!\ \cosh s)^{-1/2}\left[\frac{1}{2}\exp(\mathrm{i}\theta)\tanh s\right]^{n/2}\times$$
$$\exp\left\{-\frac{1}{2}|\alpha|^2+\alpha^*\exp(\mathrm{i}\theta)\tanh s\right\}H_n\left\{\frac{\alpha+\alpha^*\exp(\mathrm{i}\theta)\tanh s}{(2\exp(\mathrm{i}\theta)\tanh s)^{1/2}}\right\} \tag{20.85}$$

其中 H_n 是厄米多项式.

对于$|\alpha|^2\gg\exp(2s)$的情况(有相干态的强信号),上式可以简化,(20.84)式可变为

$$P_n\approx\exp\left[-(n-|\alpha|^2)/2\langle(\Delta n)^2\rangle\right]/(2\pi\langle(\Delta n)^2\rangle)^{1/2} \tag{20.86}$$

其中$\langle(\Delta n)^2\rangle$见(20.79)式,它与 ϕ,θ,α,s 有关.

图 20.7 的曲线表示由(20.84)式严格计算的分布函数 P_n.

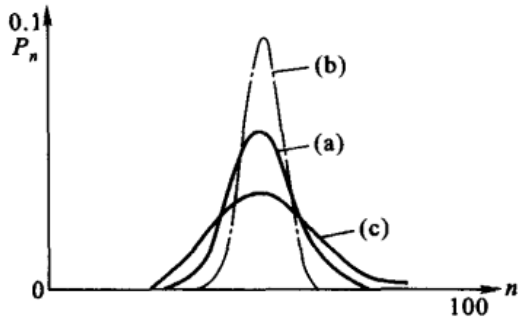


图 20.7 压缩态的光子分布函数($|\alpha|^2=49$)
(a)$s=0$,($Q=0$) (b)$s=0.5$,$\phi=(\theta+\pi)/2$,($Q<0$)
(c)$s=0.5$,$\phi=\theta/2$,($Q>0$)

20.6.3 压缩态光场的位相的测不准量

这里仍考虑附加有强的相干态光的情况($|\alpha|^2\gg\exp(2s)$). 利用我们在辐射量子化中定义的位相算符,可算出它在$|\alpha,\zeta\rangle$态的测不准量

$$(\Delta\phi)^2=[\exp(-2s)\sin^2(\phi-\theta/2)+\exp(2s)\cos^2(\phi-\theta/2)]/(4|\alpha|^2) \tag{20.87}$$

ϕ角的示意图见图 20.4. 由(20.87)和(20.72)式的$\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle$,可得到

$$\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle^{1/2}\Delta\phi=1/2,\quad [\phi=\theta/2,(\theta+\pi)/2] \tag{20.88}$$

在ϕ的特殊角度,$\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle^{1/2}\Delta\phi$为最小测不准量,但在其他角度,它大于最小测不准量. 不难看出,$\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle^{1/2}\Delta\phi$与$\langle(\Delta\hat{X})^2\rangle^{1/2}\cdot\langle(\Delta\hat{Y})^2\rangle^{1/2}$的最小测不准量的条件大不相同,见(20.68)式.

20.7 多模压缩态与高阶压缩态

本节介绍多模压缩态与高阶压缩态.

20.7.1 双模(频率为ω_+,ω_-)压缩态定义为

$$|\alpha_+,\alpha_-,\zeta\rangle=\hat{D}_+(\alpha_+)\hat{D}_-(\alpha_-)\hat{S}_{+-}(\zeta)|0\rangle \tag{20.89}$$

其中

$$\hat{D}_\pm(\alpha_\pm)=\exp(\alpha_\pm\hat{a}_\pm^+-\alpha_\pm^*\hat{a}_\pm) \tag{20.90}$$

$$S_{+-}(\zeta)=\exp(\zeta^*\hat{a}_+\hat{a}_--\zeta^*\hat{a}_+^+\hat{a}_-^+) \tag{20.91}$$

其中

$\zeta=s\exp(i\theta)$,$0\leqslant s<\infty$,$0\leqslant\theta\leqslant2\pi$. $|0\rangle$是双模真空态.

位移算符 $\hat{D}_{\pm}(\alpha_{\pm})$ 分别作用到两个模，仍似(20.44)式. 压缩算符的作用为

$$\hat{S}_{+-}^{-1}(\zeta)\hat{a}_{\pm}\hat{S}_{+-}(\zeta)=\hat{a}_{\pm}\cosh s-\hat{a}_{\mp}^{+}\exp(\mathrm{i}\theta)\sinh s \tag{20.92}$$

利用(20.89)式及 $\hat{D}_{\pm}(\alpha_{\pm})$，$\hat{S}_{+-}(\zeta)$ 的公式，可计算出一些期待值

$$\left.\begin{aligned}
&\langle\hat{a}_{+}\rangle=\alpha_{+}\\
&\langle\hat{a}_{-}\rangle=\alpha_{-}\\
&\langle\hat{a}_{+}^{+}\hat{a}_{+}\rangle=|\alpha_{+}|^{2}+\sinh^{2}s\\
&\langle\hat{a}_{-}^{+}\hat{a}_{-}\rangle=|\alpha_{-}|^{2}+\sinh^{2}s\\
&\langle\hat{a}_{+}\hat{a}_{-}\rangle=\alpha_{+}^{*}\alpha_{-}\\
&\langle\hat{a}_{-}^{+}\hat{a}_{+}\rangle=\alpha_{-}^{*}\alpha_{+}\\
&\langle\hat{a}_{+}\hat{a}_{+}\rangle=\alpha_{+}^{2}\\
&\langle\hat{a}_{-}\hat{a}_{-}\rangle=\alpha_{-}^{2}\\
&\langle\hat{a}_{+}\hat{a}_{-}\rangle=\langle\hat{a}_{-}\hat{a}_{+}\rangle=\alpha_{+}\alpha_{-}-\exp(\mathrm{i}\theta)\sinh s\cosh s
\end{aligned}\right\} \tag{20.93}$$

与单模压缩态的$\langle\hat{n}\rangle$及$\langle\hat{a}\hat{a}\rangle$公式(20.60)和(20.61)比较，可知压缩效应(与 s 有关)只影响到光子数的对角元期待值$\langle\hat{a}_{\pm}^{+}\hat{a}_{+}\rangle$，$\langle\hat{a}_{-}^{+}\hat{a}_{-}\rangle$和二模交叉的非对角元期待值$\langle\hat{a}_{+}\hat{a}_{-}\rangle$，$\langle\hat{a}_{-}\hat{a}_{+}\rangle$.

双模压缩态光场的正交分量之一 $\hat{X}$ 为

$$\hat{X}=(\hat{a}_{+}+\hat{a}_{+}^{+}+\hat{a}_{-}+\hat{a}_{-}^{+})/2^{3/2} \tag{20.94}$$

用(20.93)式中的一些公式可证

$$\langle\hat{X}\rangle=(\mathrm{Re}\alpha_{+}+\mathrm{Re}\alpha_{-})/2^{1/2} \tag{20.95}$$

$$\langle(\Delta\hat{X})^{2}\rangle=\frac{1}{4}\left[\exp(-2s)\cos^{2}\frac{1}{2}\theta+\exp(2s)\sin^{2}\frac{1}{2}\theta\right] \tag{20.96}$$

请注意这与单模压缩态的结果一样，见(20.62)，(20.63)式.

以上的讨论，都是针对分立的模(分立的频率)，实际上压缩态光源向真空辐射时涉及连续的模(连续频率)，1985—1987 年 Walls 等对连续模的压缩态理论已进行了研究.

20.7.2 高阶压缩态

对前述单模压缩态的另一推广是高阶压缩态. $2N$ 阶的压缩态定义为

$$\langle:(\Delta\hat{E}_{1})^{2N}:\rangle<\text{最小测不准量},N=1,2,3,\cdots$$

其中最小测不准量当然等于相干态的测不准量.

Mandel 等研究了高阶压缩，并证明了当 N 是偶数时，对于相干态有

(记为$\langle\cdots\rangle_c$)

$$\langle(\Delta\hat{E}_1)^N\rangle_c=(N-1)!!\ C^{N/2} \tag{20.97}$$

若对特定的角度 ϕ,使得下式成立则为 N 阶压缩

$$\langle(\Delta\hat{E}_1)^N\rangle<(N-1)!!\ C^{N/2} \tag{20.98}$$

其中 $C\equiv[E^{(+)},E^{(-)}]$.

对于更特殊的 ϕ 角,可使

$$\langle:(\Delta\hat{E}_1)^N:\rangle<0 \tag{20.99}$$

这称为本征压缩.

20.8 四波混频产生光学压缩态的实验

20.8.1 光学压缩态实验概况

从理论上看,为实现光学压缩态,应有两个基本条件.第一个条件是有合适的机制,对光强或光场的振幅的起伏进行抑制.第二个条件是有合适的对相位灵敏的放大机制,使得被压缩的光场分量放大,而另一个分量衰减.例如,含有光场 2 次项的一些非线性光学过程越是在起伏的峰值,效应越强(双光子吸收、2 次谐波等),利用这类效应便可减小起伏.负反馈也可减小起伏,另一方面,许多非线性光学过程,都涉及位相匹配,即对位相敏感(例如 2 次谐波、参量振荡等).因此,光学压缩态的理论途径很多,已达近 40 种.

在实验方面,1985 年 Slusher 等用四波混频方法首先实现了光学压缩态.随后.又有人用参量放大等 7 种方法实验成功.

在任何的光学压缩态实验中,都必须特别注意,泵浦场的起伏、各种损耗,都会减小甚至完全破坏压缩态.

例如,即使一个部分透射镜、一个分束器,都会有损耗.由起伏-耗散定理,必然引起一定的起伏.若对光强的损耗为 η,则场的衰减为 $\eta^{1/2}$.若腔内光场的光子数起伏为零,则通过损耗为 η 的元件输出之后,有

$$\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle=0\rightarrow\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle=(1-\eta)\langle\hat{n}\rangle \tag{20.100}$$

上式右边的 n 是透过的光子数.

20.8.2 四波混频产生压缩态的原理

下面介绍用四波混频实现光学压缩态的原理与实验,大家知道,用四波混频可产生位相复共轭的光.例如,用两束泵浦光,方向相反地作用于

非线性介质(例如原子束).若有第三束光入射到该介质,则可产生第四束光,后者与第三束光成位相复共轭.

假设入射光的消灭算符和产生算符分别为 $\hat{a},\hat{a}^+$ 则位相复共轭光可用如下的消灭算符描述

$$\left.\begin{aligned}\hat{b}^+ &= \mu\hat{a}+\nu\hat{a}^+\\ \mu^2-\nu^2 &= 1\end{aligned}\right\} \tag{20.101}$$

如果入射光是在相干态(激光),则位相复共轭光可处于压缩态.

若泵浦光很强,则可看成经典光场 E,非线性极化率为

$$\chi^{(3)}(E)=\chi^{(3)}E^2 \tag{20.102}$$

其中 E 是泵浦光场,$\chi^{(3)}$ 是介质的三阶极化率.相互作用哈密顿量为

$$\hat{H}=\hbar\{\chi^{(3)^*}E^2\hat{a}^2+\chi^{(3)}E^2\hat{a}^{+2}\} \tag{20.103}$$

假如初态光场为真空态$|0\rangle$,则真空起伏将被压缩.若初始时刻为 $t=0$,则在 t 时刻的态

$$|t\rangle=|0,\zeta\rangle=\exp(-\mathrm{i}\hat{H}t/\hbar)|0\rangle=\exp\left(\frac{1}{2}\zeta^*\hat{a}^2-\frac{1}{2}\zeta\hat{a}^{+2}\right)|0\rangle \tag{20.104}$$

其中压缩参数为

$$\zeta=2\mathrm{i}\chi^{(3)}t \tag{20.105}$$

显然,(20.104)式就是 $\hat{S}(\zeta)|0\rangle$,这正是(20.55)式定义的真空压缩态.在 20.3 节中已给出了这种压缩态的基本公式

$$\langle(\Delta\hat{X})^2\rangle=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2s}$$

$$\langle(\Delta\hat{Y})^2\rangle=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2s}$$

这里

$$s=2\chi^{(3)}t \tag{20.106}$$

更详细的计算,应从哈密顿量得到运动方程,再加上起伏项,即

$$\frac{\mathrm{d}\hat{a}_3}{\mathrm{d}z}=\mathrm{i}\kappa^*\hat{a}_4^+ +\Gamma_3 \tag{20.107}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{a}_4}{\mathrm{d}z}=-\mathrm{i}\kappa^*\hat{a}_3^+ +\Gamma_4 \tag{20.108}$$

$$\langle\Gamma_3(t)\Gamma_4(t')\rangle=-\mathrm{i}\chi^{(3)}\delta(t-t') \tag{20.109}$$

求解方程,即可得到(20.106)式.

用四波混频产生压缩态的全量子理论也于 1985 年前后发表,出发点即为全量子的 M-B 方程.

20.8.3 用四波混频产生光学压缩态的实验

图 20.8 是利用非简并四波混频方法产生光学压缩的示意图. 用染料激光作为泵浦光，频率为 ν_p，腔模间隔为 ν_c. 位相复共轭信号的频率为 $\nu_p \pm 3\nu_c$.

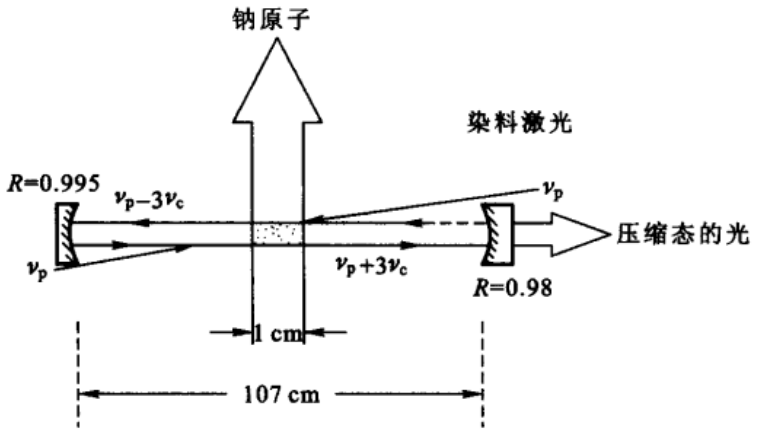


图 20.8 钠原子束中的四波混频产生压缩态

钠原子束直径 1 cm，通过马赫数为 2 的超音速喷嘴喷出，这样使原子束准直. 泵浦光与原子束成很小的角度，在泵浦光的方向上观察到的原子束多普勒线宽为 100 MHz，原子密度为 $10^{11}\sim10^{12}$ cm^{-3}. 泵浦光与钠双线中的 D_2 线的频率差 $\Delta=1.5$ GHz. 这样能接近共振以增强混频的非线性作用，同时离共振又足够远，以减少自发辐射噪声. 这时的饱和光强为 1 $kW\cdot cm^{-2}$. 实际的泵浦光强约 100 $W\cdot cm^{-2}$，照射原子束的面积约 0.01 cm^2. 泵浦光是稳频的(小于 0.1 MHz).

该实验得到的压缩比为 7%～10%，改进后约达到 20%. 若将真空起伏压缩到零，则为 100%的压缩比. 对真空起伏不压缩，则压缩比为 0%.

20.9 用光学参量振荡实现光学压缩态

1987 年我国青年科学家吴令安等在美国德克萨斯大学，用光学参量振荡方法，实现了光学压缩态. 压缩比达到 60%.

20.9.1 光学参量振荡的相敏机制

用打秋千的例子最容易说明参量振荡的相敏机制. 试看一个女孩子打秋千，秋千到最高点，她下蹲；秋千到最低点，她直立，这样秋千的振幅越来越大. 反之，若她的动作改变 90°的位相；秋千到最高点时她直立；秋

千到最低点时她下蹲，则秋千振幅逐渐减小(衰减). 这个女孩周期性的一蹲一立，就是振荡，相当于泵浦波. 而秋千的往返运动，也是振荡，相当于信号波. 秋千能否振荡，完全取决于它与女孩动作的位相关系，相同位相的能放大，不同位相的则衰减. 这两个正交分量相当于图 20.1，图 20.2 中的 X_1, X_2 或 X, Y.

若把秋千看成单摆，从秋千顶点到女孩重心的距离，即为摆的长度. 摆长是单摆的最重要参数. 女孩一蹲一立，即是周期性地改变该系统的参数. 通过有规律地调节系统参数而实现放大或振荡，就是参量放大器或参量振荡器. 打秋千，就是机械的参量振荡器，在电子学中，使电感或电容等参数周期性变化可产生电振荡，即是电学中的参量放大或振荡. 我们研究的光学参量放大或振荡，实际上是用泵浦光周期性地调节光学介质参数(极化强度)，而实现在另外的频率上的放大或振荡.

在打秋千的例子中，女孩的“泵浦”作用的效率为 ω_p，秋千的振荡频率为 $1/2\omega_p$(即秋千往返一次振荡，女孩要蹲两次、立两次)，故有简并参量振荡

$$\omega_p = 2\omega \tag{20.110}$$

对参量振荡的更一般形式为

$$\omega_p = \omega_1 + \omega_2, \quad \omega_1 \neq \omega_2 \tag{20.111}$$

这就是非简并的参量振荡.

20.9.2 用光学参量振荡实现压缩态的原理

光学参量振荡过程的哈密顿量也与(20.103)式相似，只不过把其中的 $\chi^{(3)}E^2$ 换成 $\chi^{(3)}E$，这里 E 是光学参量振荡的泵浦光场. 因此，用光学参量放大器或振荡器也可实现真空压缩态

$$\left.\begin{aligned} |t\rangle &= \hat{S}(\zeta)|0\rangle \\ \zeta &= 2i\chi^{(2)}t \end{aligned}\right\} \tag{20.112}$$

$$\left.\begin{aligned} \langle(\Delta\hat{X})^2\rangle &= \frac{1}{4}e^{-2s} \\ \langle(\Delta\hat{Y})^2\rangle &= \frac{1}{4}e^{2s} \\ s &= 2\chi^{(2)}t \end{aligned}\right\} \tag{20.113}$$

更详细的理论计算，可以直接从全量子化的光学参量振荡方程出发，也可用下述方法，即把哈密顿量写成

$$\hat{H} = \hbar\omega\hat{a}^+\hat{a} + \hbar\{f_1\hat{a}^+ + f_2(\hat{a}^+)^2\} \tag{20.114}$$

$$\left.\begin{aligned} f&=|f|\exp(\mathrm{i}\phi)\\ f_1&=f\exp(-\mathrm{i}\omega t)\\ f_2&=r(t)\exp\left[-\mathrm{i}\,(2\omega t+\phi)\right]\end{aligned}\right\} \tag{20.115}$$

f_1 代表信号波，f_2 代表泵浦波. 令

$$\hat{a}'(t)\equiv\hat{a}_{\mathrm{H}}(t)\exp(\mathrm{i}\omega t) \tag{20.116}$$

其中 $\hat{a}_{\mathrm{H}}$ 是海森堡表象中的算符. 运动方程的解为

$$\hat{a}'(t)\equiv\hat{a}\cosh[2R(t)]-\mathrm{i}\exp(-\mathrm{i}\psi)+\hat{a}^{+}\sinh[2R(t)]+\kappa(t) \tag{20.117}$$

而

$$R(t)=\int_0^t r(t')\,\mathrm{d}t' \tag{20.118}$$

$$\kappa(t)=-\mathrm{i}\int_0^t\{f\cosh[2R(t'-t)]-\mathrm{i}\exp(-\mathrm{i}\psi)\times f^{*}\sinh[2R(t'-t)]\}\mathrm{d}t' \tag{20.119}$$

为了简化计算，令 $r(t)$ 为常数，并且适当选择泵浦光的位相 $\psi=\pi/2$，可把 $\hat{a}$ 的公式简化. 由 $\hat{a}$ 可计算出

$$\left.\begin{aligned}\langle(\Delta\hat{X}_1)^2\rangle&=\frac{1}{4}\exp(-4rt)\\ \langle(\Delta\hat{X}_2)^2\rangle&=\frac{1}{4}\exp(4rt)\end{aligned}\right\} \tag{20.120}$$

20.9.3 用光学参量振荡实现压缩态的实验

图 20.9 是实验装置示意图，其中所用的非线性介质是 MgO：$LiNbO_3$、泵浦光 $\lambda_p=0.53\ \mu m$，参量振荡的波长 $\lambda=2\lambda_p=1.06\ \mu m$，称为“亚谐波”. 腔的长度为 10 cm，镜 M 作为泵浦光的输入镜，对 0.53 μm 的光的透射为 3.5%，而对 1.06 μm 的光的透射为 0.06%. M′是亚谐波的输出镜，对 1.06 μm 的光的透射为 4.3%或用 7.3%，然而对 0.53 μm 的光却是几乎全反射.

非线性晶体 MgO：$LiNbO_3$ 尺寸为 $25\times9\times9\ mm^3$，镀增透膜以减少对 0.53 μm 和 1.06 μm 的光的损耗，加热到 98℃以实现位相匹配. 泵

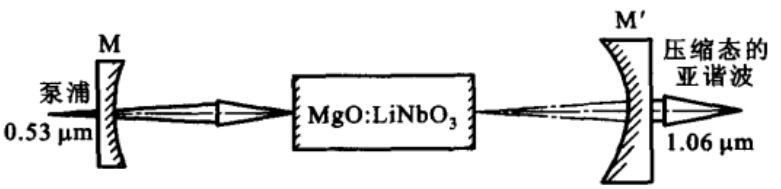


图 20.9 用光学参量放大实现压缩态

浦光是用 YAG 激光倍频. 倍频晶体为 $Ba_2NaNb_5O_{15}$，其英文字头为 BANANA，即“香蕉”. 泵浦光的功率为 30 mW，低于参量振荡阈值.

检测系统实际上是测量如下算符的起伏，见(20.49)式

$$\hat{E}(\chi)=\frac{1}{2}\mathscr{E}_c[\exp(i\chi)\hat{a}^+ +\exp(-i\chi)\hat{a}] \tag{20.121}$$

测量表明该压缩态是最小测不准型的，压缩比为 63%.

20.10 压缩态的检测与应用

对压缩态的光的测量需专门理论与技术，它的一些应用也与测量有关.

20.10.1 压缩态的光的测量

压缩态的一种测量方法见图 20.10. 输入信号是 $\hat{a}$，本地振荡为 $\hat{a}_L$，中间是分束器，振幅反射和透射率分别为 r、t，因有位相关系，r 和 t 是复数，D_1 和 D_2 是两个探测器.

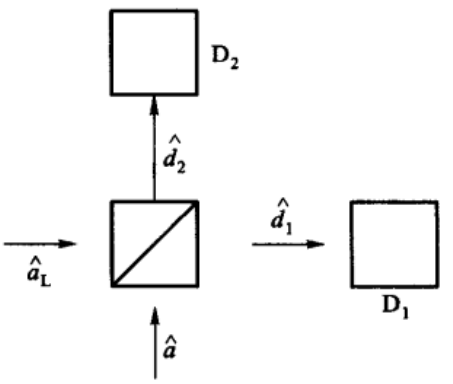


图 20.10 压缩态的光的检测

由图可知，经过分束器以后的两束光的消灭算符分别为 $\hat{d}_1$，$\hat{d}_2$，其关系为

$$\begin{pmatrix}\hat{d}_1\\ \hat{d}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r & t\\ t & r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{a}_L\\ \hat{a}\end{pmatrix} \tag{20.122}$$

该光学矩阵的么正性要求下列条件

$$\left.\begin{aligned}|r|^2+|t|^2=1\\ t^*r^*+r^*t^*=0\end{aligned}\right\} \tag{20.123}$$

对通常的检测系统，$|r|\ll|t|$. (20.123)式的第二式即

$$\arg r-\arg t=\pi/2 \tag{20.124}$$

被测信号为

$$\hat{d}_1^+\hat{d}_1=|r|^2\hat{a}_L^+\hat{a}_L+t^*r\hat{a}^+\hat{a}_L+r^*t\hat{a}_L^+\hat{a}+|t|^2\hat{a}^+\hat{a} \tag{20.125}$$

本地振荡与信号频率都是相干态的，且很强. 这时

$$\langle\hat{d}_1^+\hat{d}_1\rangle=|r|^2|\alpha_L|^2+2|r||t||\alpha_L|\langle\hat{E}(\chi)\rangle+|t|^2\langle\hat{a}^+\hat{a}\rangle \tag{20.126}$$

$$E(\chi)=\frac{1}{2}\{\exp(\mathrm{i}\chi)\hat{a}^{+}+\exp(-\mathrm{i}\chi)\hat{a}\} \tag{20.127}$$

$$\chi=\arg r-\arg t+\phi_{\mathrm{L}}=\phi_{\mathrm{L}}\pi/2 \tag{20.128}$$

其中 $E(\chi)$ 是以 $\mathscr{E}_{\mathrm{c}}$ 为单位的. 利用近似条件

$$|r||\alpha_{\mathrm{L}}|\gg|r||\alpha|$$

α 是输入信号的复数振幅，这时(20.125)式的最后一项可以忽略，平均光子数为

$$\langle\hat{n}_1\rangle\equiv\langle\hat{d}_1^{+}\hat{d}_1\rangle=|r|^2|\alpha_{\mathrm{L}}|^2[|r|^2+4|t|^2\langle(\Delta\hat{E}(\chi))^2\rangle]$$

光电探测器 D_1 的计数中，$|\alpha_{\mathrm{L}}|^2$ 的贡献是已知的，可以减去，这时的光电计数为

$$\begin{aligned}\langle m_1\rangle&=2\eta|r||t||\alpha_{\mathrm{L}}|\langle\hat{E}(\chi)\rangle\\&=2\eta|r||t||\alpha_{\mathrm{L}}||\alpha|\cos(\chi-\phi)\end{aligned} \tag{20.129}$$

$$\langle(\Delta m_1)^2\rangle=\eta|r|^2|\alpha_{\mathrm{L}}|\{1+\eta|t|^2[4\langle(\Delta\hat{E}(\chi))^2\rangle-1]\} \tag{20.130}$$

其中大括号内的“1”代表真空起伏. 显然，对相干态 $\langle(\Delta\hat{E}(x))^2\rangle=\frac{1}{4}$，(20.130)式的方括号为零. 对压缩态

$$\langle(\Delta E(\chi))^2\rangle<\frac{1}{4} \tag{20.131}$$

对特定的 χ 角，$\langle(\Delta m_1)^2\rangle<\langle(m_1)\rangle$ 即可以是亚泊松分布.

由过去的公式(20.60)，(20.93)即有

$$\left.\begin{aligned}\langle\hat{n}\rangle&\equiv|\alpha|^2+\sinh^2 s\\\langle\hat{a}\hat{a}\rangle&=\alpha^2-\exp(\mathrm{i}\theta)\sinh s\cosh s\end{aligned}\right\} \tag{20.132}$$

由(5.126)式可证

$$\langle(\Delta\hat{E}(\chi))^2\rangle=\frac{1}{4}\left[\exp(-2s)\cos^2\left(\chi-\frac{1}{2}\theta\right)+\exp(2s)\sin^2\left(\chi-\frac{1}{2}\theta\right)\right. \tag{20.133}$$

压缩条件为

$$\cos(2\chi-\theta)>\tanh s \tag{20.134}$$

将(20.133)式代入(20.130)式，可求出 $\langle(\Delta m_1)^2\rangle$，显然，(20.133)式的极小和极大分别为

$$\left.\begin{aligned}\left\langle\left[\Delta\hat{E}\left(\frac{1}{2}\theta\right)\right]^2\right\rangle&=\frac{1}{4}\exp(-2s)\\\left\langle\left[\Delta\hat{E}\left(\frac{1}{2}\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right]^2\right\rangle&=\frac{1}{4}\exp(2s)\end{aligned}\right\} \tag{20.135}$$

20.10.2 压缩态的光的应用

压缩态的光的应用前景引人瞩目：

(1) 减少光通信中的噪声，大大提高信噪比. 然而，光纤中的损耗会破坏压缩态. 因此，比较理想的方案可能是利用孤立子压缩态.

(2) 引力波的检测. 用金属棒检测引力波时，微弱的引力波只能使棒产生 10^{-19} cm 的变化. 若把棒看成谐振子，这 10^{-19} cm 就是棒的位置的测不准量. 这样，真空起伏就会干扰和湮没引力波信号. 如果使该棒处在压缩态，其噪声低于真空起伏，这就有可能测出 10^{-19} cm 的位置变化. 但是，怎样使金属棒处在压缩态，仍悬而未决.

(3) 激光光谱. 通常，真空中的原子，其谱线有一定宽度(自然宽度). 理论证明，若原子不是处于真空，而是处于压缩真空态的光束中，则原子弛豫时间可以任意长，线宽远小于自然宽度.

(4) 有些动物，可以接收到接近或低于真空起伏的信号. 这可能暗示动物的大脑可能有压缩态. 也有人认为这可能与“非平衡态放大机制”有关.

习题与思考

(1) 什么叫光场的非经典性质?

(2) 光学压缩态有哪些性质?

(3) 计算四波混频的压缩态，即(20.106)式.

(4) 推导光学参量振荡的压缩态公式(20.119).

参 考 文 献

[1] Yuen H P. Two-photon coherent states of the radiation field. Phys. Rev. , 1976, A(13): 2226 - 2230.

[2] Walls D F. A rapid millimetre wave outburst in the nucleus of NGC1275. Nature, 1983, 306: 41 - 47.

[3] Caves C M. Quantum-mechanical noise in an interferometer. Phys. Rev. , 1981, 23D: 1693 - 1700.

[4] 郭光灿，范洪义. 光场的非经典效应及其相互关系. 量子电子学，1987，4：122.

[5] 张卫平，谭维翰. 非相干光泵浦下压缩光的产生. 中国激光，1989，16：91.

[6] 黎永清，王育竹. 简并四波混频中混沌光场的压缩. 中国激光，1989，16：377.

第 21 章　自由电子激光器

本章首先介绍自由电子激光器的构造和特性，自由电子激光器的小信号增益，然后分别介绍它的半经典理论与全量子理论.

21.1　自由电子激光器的构造和特点

21.1.1　自由电子激光器

自由电子激光器是最重要的新颖激光器. 它具有高功率、高效率、可调谐、可向 X 射线激光波段发展等特点. 1976 年和 1977 年，斯坦福大学先后实现了自由电子激光放大器和自由电子激光振荡器，即自由电子激光器，简称为 FEL，其中一类的激光波长在可见光附近，另一类在毫米波范围. 我国上海光机所也制成了毫米波的自由电子激光器.

图 21.1 是斯坦福大学的自由电子激光器构造示意图. 它的主要部分是电子束、磁摆动器、光学谐振腔.

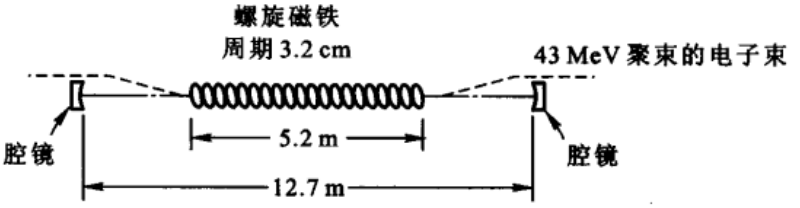


图 21.1　自由电子激光器示意图

从加速器引出的电子束相当于激光工作物质、磁摆动器(undulator)是空间周期性的磁场(磁场为螺旋式或平面式)，电子束在磁摆动器中一边前进一边有横向摆动. 例如，周期性磁场在水平面内，电子则周期性地上、下摆动. 这样由于电荷上下振荡，便会发出光，这种光相当于自发辐射. 如果有特定波长的一束激光与电子束一起穿过磁摆动器，则会对该激光束放大，这就是自由电子激光放大器. 如果没有入射的激光束，而采用合适的光学谐振腔，当电子束增益高到一定程度，则会发生振荡. 这就是自由电子激光振荡器.

工作在可见光波段的自由电子激光器，其电子束的速度很高(可与光速比较)而电子密度较低，电子束电流密度也较低，电子之间的作用可忽

略不计. 这就是康普顿型的自由电子激光器. 工作在毫米波段的自由电子激光器，电子束速度较低、电子密度高、电子束的电流密度很高，电子之间的作用不能忽略. 这就是拉曼型的自由电子激光器. 前者把激光波段推向短波甚至到 X 射线；后者填补可见光、红外光到微波之间的波段. 本书只涉及康普顿型的自由电子激光器.

自由电子激光器的波长决定于电子束的速度或电子能量以及磁摆动器的周期，这样，调节电子能量(或磁场)则可实现大范围的调谐.

由于电子束的总功率很高，即使把电子束的一小部分功率转换成激光功率，也会产生高功率的激光. 此外，电子束是在真空中运行，因此不存在普通的高功率激光的击穿、自聚焦等问题，即不存在工作物质的破坏问题，可允许极高的功率.

理论计算表明，自由电子激光器可有很高的效率，能量转换效率早已达到 5%. 在这里，电子束的质量(发散角小、能散度小)至为重要，磁摆动器的设计也有较大影响.

21.1.2 自由电子激光器的自发辐射机理

图 21.2 表示的是电子在周期性磁场中的摆动. 假想读者“骑”在这个电子上，便会一边前进又一边周期性地上下振荡，电子完全像一个电荷的周期性振荡(即电偶极子的振荡). 电荷的振荡，则会发出光波(或电磁波). 不难想到，磁摆动器的周期(λ_u)越短，电子振荡频率及其辐射频率越高. 电子运动速度对辐射频率的影响更大，一方面，电子速度(v_z)越大，单位时间通过磁周期数目越大，即电子振荡及辐射频率越高；另一方面，读者“骑”在电子上(是在电子静止坐标系)看到的振荡频率，不同于在实验室测到的频率(波长)，因为电子以很高的速度运动(接近光速)，由于熟知的多普勒效应，在实验室测到的波长很短.

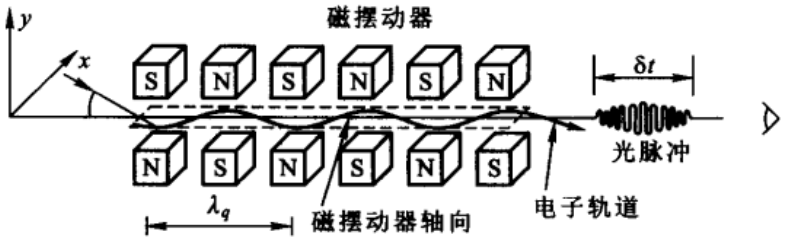


图 21.2 电子在磁摆动器中的振荡

另外，我们多次强调，电子有加速度就会辐射. 电子的横向摆动及运动的方向的改变，就表明电子有加速度，必然会发生辐射. 下节的理论处理，将以此为出发点.

21.1.3 自由电子激光器自发辐射的波长

从图 21.3 所示的曲线出发，容易计算出 FEL 的自发辐射波长.

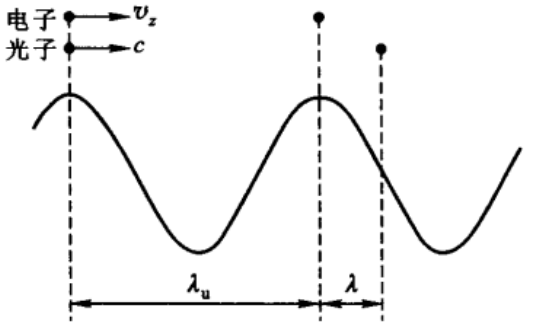


图 21.3 通过一个磁周期后，电子比光子落后距离 Δl

电子沿 z 方向通过磁摆动器. 设电子在 z_0 处辐射. 由于光的速度 c 大于电子速度 v_z，所以当电子通过磁摆动器一个周期 λ_u 之后，它比光子落后 Δl，

$$\Delta l = c\frac{\lambda_u}{v_z} - \lambda_u = \lambda_u(1-\beta_z)/\beta_z \tag{21.1}$$

其中 $\beta_z = v_z/c$. 当 $\beta_z \approx 1$ 时

$$\Delta l \approx \lambda_u(1-\beta_z) \tag{21.2}$$

一般说，电子在 z 和 z_0 处发的光的位相不同，叠加后减弱或抵消. 然而，若 Δl 为光波长整数倍

$$\Delta l = n\lambda \tag{21.3}$$

则电子在 z 和 z_0 处的发光位相一样，叠加后加强. 这种波长将占主导地位. 整数 n 取不同的值，对应光波的不同波长（n 次谐波）. 当 $n=1$ 时（基波），由(21.3)和(21.2)式得到

$$\lambda = \lambda_u(1-\beta_z) \tag{21.4}$$

另一方面，定义一个因子（即洛伦兹因子）

$$\gamma_z = 1/\sqrt{1-\beta_z^2} \tag{21.5}$$

$$1/\gamma_z^2 = (1-\beta_z^2) = (1+\beta_z)(1-\beta_z) \approx 2(1-\beta_z) \tag{21.6}$$

代入(21.4)式，则得到电子辐射的波长

$$\lambda = \lambda_u(2\gamma_z^2)$$

此式表明，调节电子速度（改变 γ_z）或磁周期（λ_u），便可连续改变电子辐射的波长（即调谐）.

21.1.4 电子束对光的吸收或放大

当普通激光器产生的激光束与加速器产生的电子束一起通过磁摆动

器时，电子束与光的作用，取决于它们的位相关系. 从加速器引出的电子束，电子刚进入磁摆动器时，初始位相是混乱的，有些电子振荡的位相比光波超前，有些则落后，这样平均起来，电子束（刚进入磁摆动器时）对激光束既不吸收，也不放大. 由此可知，自由电子激光放大器的原理，必然在于使电子束中的全部或大部分电子能够同位相振荡，而且与入射的激光有合适的位相关系. 当读者“骑”在电子上与入射光束一起通过磁摆动器时，由于磁摆动器与入射激光束的共同作用，电子便自然达到了上述的要求.

21.1.5 电子的聚束与相干辐射

假定电子束的所有电子都有相同的速度，即能量相同，能散度为零. 它与一束激光一起进入磁摆动器，有的从光波吸收能量，有的损失能量，这样造成两种效果：第一，电子有的加速，有的减速. 原来在空间（例如一条线上）均匀排列的电子，便成为一团一团的. 相邻两团的距离正巧等于光波波长. 这种效应称为“聚束”. 第二，原来速度相同的电子，有的加速，有的减速，这样就不再是单能的了，即电子束与激光束一起通过磁摆动器，使电子束的能散度增大了. 图 21.4 是电子束的聚束示意图，图中 ξ 代表电子与光场的相对位相.

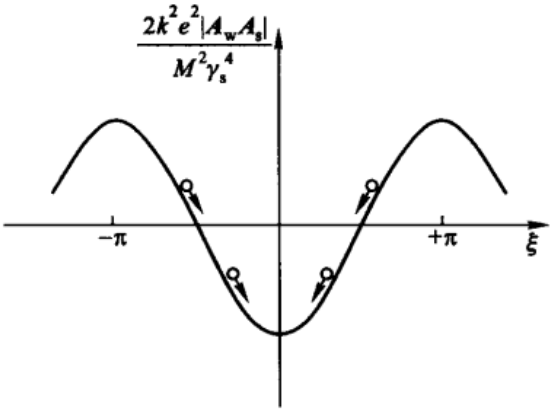


图 21.4 电子束的聚束

当光场（矢量势 A_s）和磁摆动器（矢量势 A_w）共同作用于电子时，电子则处于它们的有质动力势中. 由电动力学可知该势函数正比于 $|A_wA_s|$，见图 21.4. 把电子看成在这个势函数中的“质点”，它们趋向势函数的底部. 从图中可以看出，在 $-\pi\leqslant\xi<0$ 的范围，电子被加速了，而在 $0<\xi<\pi$ 的范围，电子被减速了，前者使电子吸收光场能量，后者使电子发射能量.

也可以从光场 E 对电子所做的功来理解电子的聚束. 若电子速度是 v，当 $v \cdot E>0$ 时，光场对电子做功，使电子能量增加，光场能量减少；反之，$v \cdot E<0$，则光场对电子做负功，电子能量减少，使光场的能量增加. 这里 $v \cdot E$ 是正或负，也取决于电子与光场的相对位相.

21.2 自由电子激光器的自发辐射——同步辐射

本节先介绍一下不用磁摆动器的同步辐射，然后介绍有磁摆动器的同步辐射，后者即相当于自由电子激光器的自发辐射.

21.2.1 同步辐射

带电粒子沿弯曲轨道运动而辐射的电磁波，称为同步辐射(synchrotron radiation). 在自然界中，电子绕超新星磁场的运动便发出同步辐射. 这是中国宋代沈括最早记录的现象. 在实验室中，它随着加速器的发展而受到重视. 加速器中的带电粒子的同步辐射，显然不利于加速，最初人们把它作为加速器的不利因素而加以研究，并建立了相应的理论(1944年). 1975年，人们才第一次在实验室中直接测量到同步辐射，后来发展成十分重要的研究手段.

设电子静止质量为 m_0，电荷为 e，动量为 p，则电子辐射的总功率 P 为

$$P=\frac{2}{3}\frac{e^2}{m_0^2c^2}\left|\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\right|^2 \tag{21.7}$$

它主要决定于电子的加速度.

若相对论电子在磁场 B 中运动(轨道是弯曲的)，它辐射的总功率为

$$P_0=\frac{2}{3}\frac{e^4c}{(m_0c^2)^4}E^2B^2 \tag{21.8}$$

其中 E 是电子的能量.

同步辐射的谱相当宽，见图21.5，其中 ω_c 称为临界频率，

$$\omega_c=\frac{3}{2}\frac{c}{\rho}\left(\frac{E}{m_0c^2}\right)^3 \tag{21.9}$$

其中 ρ 是电子轨道的弯曲半经，

$$\rho=E/(eB) \tag{21.10}$$

同步辐射谱的解析表达式是

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\omega}=\frac{P_0}{\omega_c}\frac{9\sqrt{3}}{8\pi}\frac{\omega}{\omega_c}\int_{\omega/\omega_c}^{\infty}K_{5/3}(u)\mathrm{d}u \tag{21.11}$$

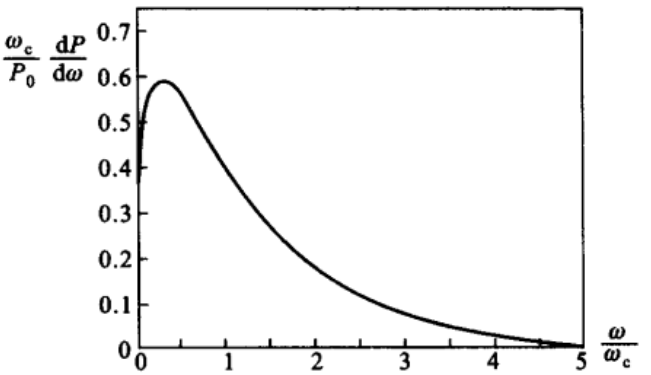


图 21.5 同步辐射谱

这里 $K_{5/3}(u)$ 是 5/3 级的贝塞尔函数.

图 21.5 表明同步辐射谱的宽度为 ω_c 的量级，即 $\Delta\omega\approx\omega_c$，脉宽 $\Delta t\propto\pi/\Delta\omega\propto 1/\omega_c$. 同步辐射的发散角为

$$\theta\approx 1/\gamma=m_0c^2/E \tag{21.12}$$

这是相对论中熟知的前灯效应. 这里 $\gamma=1/\sqrt{1-\beta^2}$，$\beta=v/c$. 对相对论电子，$\theta$ 角很少.

21.2.2 有磁摆动器的同步辐射

早在 1951 年，英国的 Motz 就建议使电子束通过空间周期性磁场，以减小电子辐射谱的宽度. 如图 21.2 的磁场的形式及相应的电子运动方程为

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{B}=\left(0,B_0,\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_u}z\right),0\right)\\&\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=\frac{e}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\end{aligned}\right\} \tag{21.13}$$

λ_u 是磁场的空间周期. 沿 x 方向的运动方程为

$$\dot{p}_x=-\frac{e}{c}\dot{z}B_0\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_u}z\right) \tag{21.14}$$

假定 x 方向的动量的初值为零，由(21.14)式积分，有

$$p_x=-\frac{eB_0\lambda_u}{2\pi c}\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_u}z\right) \tag{21.15}$$

电子轨道的偏角 $\bar{\theta}$ 定义为

$$\bar{\theta}=\frac{\langle p_x^2\rangle^{1/2}}{p}=\frac{eB_0\lambda_u/\sqrt{2}}{2\pi E} \tag{21.16}$$

其中用到(21.15)式，且电子能量 $E\approx pc$.

磁摆动器同步辐射的基本条件是

电子轨道偏角≤同步辐射发散角.

利用(21.16)和(21.12)式,$\bar{\theta}\leqslant\theta$ 即得到

$$\left.\begin{aligned} K&=\frac{e\langle B^2\rangle^{1/2}\lambda_u}{2\pi m_0c^2}\leqslant 1\\ \langle B^2\rangle^{1/2}&\equiv\frac{1}{2}B_0^2\end{aligned}\right\} \tag{21.17}$$

这样定义的 K 称为磁摆动器参数,它与电子轨道偏离磁摆动器轴向的角度直接有关.

下面计算磁摆动同步辐射谱的宽度,它由光脉冲宽度决定. 令 v_0 代表电子沿轴向的平均速度,L 是磁摆动器长度,则光脉冲宽度为

$$\Delta t=L/v_0-L/c \tag{21.18}$$

利用(21.15)和(21.17)式,并考虑到电子速度

$$v=c\sqrt{1-(m_0c^2/E)^2} \tag{21.19}$$

则有

$$v_z^2=v^2-v_x^2=c^2\{1-(m_0c^2/E)^2[1+2K^2\sin^2(2\pi z/\lambda_u)]\} \tag{21.20}$$

这里 v 是电子速度. 电子在一个磁周期内的平均速度为

$$v_0^2=\langle v_z^2\rangle=c^2[1-(m_0c^2/E)^2(1+K^2)] \tag{21.21}$$

这样,当 $v\approx c$ 时,(21.18)式变为

$$\delta t\propto\frac{L}{2c}\left(\frac{m_0c^2}{E}\right)^2(1+K^2) \tag{21.22}$$

同步辐射带宽为

$$\Delta\omega\propto\frac{\pi}{\delta t}\propto\frac{2\pi c}{L}\left(\frac{E}{m_0c^2}\right)^2\frac{1}{1+K^2} \tag{21.23}$$

用相对论公式,很容易计算辐射频率. 由于磁场的空间频率为

$$\omega_u=\frac{2\pi}{\lambda_u}v_z\approx\frac{2\pi}{\lambda_u}c \tag{21.24}$$

在电子静止系(电子平均纵向速度为零)内,频率变为

$$\omega'=\omega_u/\sqrt{1-(v_0/c)^2} \tag{21.25}$$

v_0 即电子平均速度. 再回到实验室坐标系,由于相对论多普勒效应,有

$$\omega_0=\sqrt{\frac{1+v_0/c}{1-v_0/c}}\omega'\propto\frac{2\omega_u}{1-(v_0/c)^2}=\frac{4\pi c}{\lambda_u}\left(\frac{E}{m_0c^2}\right)^2\frac{1}{1+K^2} \tag{21.26}$$

由(21.23)和(21.26)式,则有

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0}=\frac{\lambda_u}{2L}=\frac{1}{2N} \tag{21.27}$$

这里 N 是磁摆动器的周期数目. 自发辐射的谱为

$$f(\omega)\propto\left(\frac{\sin(\nu/2)}{\nu/2}\right)^2,\quad \nu=2\pi N\frac{\omega_0-\omega}{\omega_0} \tag{21.28}$$

在下节计算自由电子激光放大器增益时,将看到这个函数 $f(\omega)$ 的重要性.

21.3 自由电子激光放大器的增益

本节介绍自由电子激光放大器的单摆方程和小信号增益,并将理论与实验进行比较.

21.3.1 自由电子激光放大器的单摆方程

电子束与入射激光束的作用,由光场 E_L 和电子横向速度 $v_\perp$ 决定. 运动方程为

$$\left.\begin{aligned}\dot{\gamma}&=\frac{eE_Lv_\perp}{m_0c^2}\\ \dot{\gamma}&=E/m_0c^2\end{aligned}\right\} \tag{21.29}$$

此式显然代表 $\dot{E}=eE_Lv_\perp$,即单位时间内交换的能量(功率等于作用力乘速度). $v_\perp$ 可由 p_x 得到,这样由(21.15)式和(21.17)式,

$$v_\perp=\frac{p_x}{m_0\gamma}=-\frac{c\sqrt{2}K}{\gamma}\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_u}z\right) \tag{21.30}$$

而入射光场为

$$E_L=E_0\cos(\omega t-kz-\phi_L) \tag{21.31}$$

其中 k 是入射激光的波数,ϕ_L 是初位相. 将 E_L 和 $v_\perp$ 代入(21.29)式,则

$$\dot{\gamma}=-\frac{eE_0K}{\sqrt{2}\gamma m_0c}(\sin\psi'_--\sin\psi'_+) \tag{21.32}$$

$$\psi'_\pm=(k\mp2\pi/\lambda_u)z-\omega t-\phi_L \tag{21.33}$$

假定电子的运动受光场的扰动很小,则 $z\approx\beta ct$. 这时 $\sin\psi'_-$ 比 $\sin\psi'_+$ 的变化慢得多,若在一个周期内取平均,$\sin\psi'_+$ 的贡献可忽略,这相当于激光理论中的慢变振幅近似. 下面只考虑 $\sin\psi'_-$ 的贡献,并且令 $\psi\equiv\psi'_-$,则(21.32)式和(21.33)式变为

$$\left.\begin{aligned}\dot{\gamma}&=-\frac{eE_0K}{\sqrt{2}\gamma m_0c}\sin\psi\\ \dot{\psi}&=-\omega+(k+2\pi/\lambda_u)\dot{z}\end{aligned}\right\} \tag{21.34}$$

注意

$$\dot{z}^2+\langle v_\perp^2\rangle=V^2=c^2\beta^2 \tag{21.35}$$

利用 $1-1/\gamma^2=\beta^2$，则

$$\dot{z}^2+\langle v_\perp^2\rangle=c^2\ (1-1/\gamma^2) \tag{21.36}$$

将(21.30)式代入，则

$$\dot{z}\approx c\left(1-\frac{1}{2\gamma^2}(1+K^2)\right) \tag{21.37}$$

对时间取导数，

$$\ddot{z}=c\frac{\dot{\gamma}}{\gamma^3}(1+K^2) \tag{21.38}$$

将(21.34)式中的 $\dot{\gamma}$ 代入上式，

$$\ddot{z}=-\frac{e^2E_0B_0\lambda_u}{4\pi\gamma^4\ (m_0c^2)^2}(1+K^2)\sin\psi \tag{21.39}$$

对(21.34)式的 $\dot{\psi}$ 再取导数，得到 $\ddot{\psi}\propto\ddot{z}$，将(21.39)式代入，则得到著名的单摆方程

$$\ddot{\psi}=-\Omega^2\sin\psi \tag{21.40}$$

其中

$$\Omega^2=\frac{e^2E_0B_0}{(\gamma m_0c)^2} \tag{21.41}$$

这说明自由电子激光放大器的基本动力学类似单摆. 本节最后将用电动力学中的有质动力势说明其物理图像.

21.3.2 自由电子激光放大器的小信号增益

考虑电子与光的能量交换时，在小信号近似下，电子能量的减少(正比于 $\Delta\gamma$)，即代表光的能量的增量 ΔW_L，即

$$\Delta W_L=-m_0c^2\Delta\gamma \tag{21.42}$$

增益为

$$G=\frac{\Delta W_L}{W_L^0}=-m_0c^2\frac{\Delta\gamma}{W_L^0} \tag{21.43}$$

这里 W_L^0 是入射激光束的初始能量，对线偏振的光的(21.31)式，

$$W_L^0=\frac{1}{8\pi}E_0^2V \tag{21.44}$$

V 是模体积，为了计算 $\Delta\gamma$，将方程(21.40)代入(21.34)式则有 $\dot{\gamma}\propto\ddot{\psi}$. 当 $\Delta\gamma\ll\gamma$ 时，得到

$$\Delta\gamma=\frac{\lambda_u\gamma}{4\pi c}\Delta\dot{\psi} \tag{21.45}$$

代入增益公式(21.43)，并利用(21.44)，(21.41)式，有

$$G=-\frac{(4\pi)^2\gamma_0 c^3 K^2}{\lambda_u \gamma^3 V}\frac{\Delta\dot{\psi}}{\Omega^4} \tag{21.46}$$

此式只代表一个电子的增益. 若有 N 个电子,则

$$G=-\frac{(4\pi)^2\gamma_0 c^3 K^2}{\lambda_u \gamma^3}\frac{N}{V}\frac{\langle\Delta\dot{\psi}\rangle}{\Omega^4} \tag{21.47}$$

此式的基本前提是单电子近似(没有电子之间的作用),其中 $\gamma_0=e^2/(m_0c^2)$是电子经典半径,$\langle\Delta\dot{\psi}\rangle$定义为 N 个电子的平均值

$$\langle\Delta\dot{\psi}\rangle=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\Delta\dot{\psi})_i \tag{21.48}$$

为了求出$\langle\Delta\dot{\psi}\rangle$,我们还要利用单摆方程(21.40),积分后得到

$$\dot{\psi}^2-\dot{\psi}^2(0)=2\Omega^2[\cos\psi-\cos\psi(0)] \tag{21.49}$$

这里 $\dot{\psi}^2\equiv\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\psi^2)$. 由(21.33)式可知,在 t_0 时刻有

$$\psi(0)\equiv\psi_-(0)=-(\omega t_0+\phi_L) \tag{21.50}$$

由(21.34)式的第二式及(21.37)式,

$$\dot{\psi}=-\omega+\left(k+\frac{2\pi}{\lambda_u}\right)c\left[1-\frac{1}{2\gamma(0)^2}(1+K)^2\right] \tag{21.51}$$

由(21.26)式,令 $\omega_0=(1+K)^2/(2\gamma(0)^2)$,并用到光波长 $\lambda_0\gg\lambda_u$,$2\pi c/(\lambda_u\omega_0)\approx0$,则

$$\dot{\psi}(0)=-\frac{\omega-\omega_0}{\omega_0}\frac{2\pi c}{\lambda_u} \tag{21.52}$$

注意 t_0 是电子与光场开始作用的时刻(即刚进入磁摆动器,$t=t_0$,$z=0$),ω_0 是同步辐射的中心频率,$\gamma(0)$是 t_0 时刻的 γ,$\psi(0)$与电子在 t_0 时的位置有关,而(21.52)式表明 $\dot{\psi}(0)$与激光(ω)和自发辐射(ω_0)的失谐量有关,再利用(21.28)式定义的失谐量 ν,则

$$\dot{\psi}(0)=\nu c/L \tag{21.53}$$

这里用到磁摆动器长度 $L=N\lambda_u$.

在小信号近似下

$$\Omega(L/c)\ll0 \tag{21.54}$$

用微扰法求解单摆方程. 单摆方程(21.40)的一级微扰近似到$(\Omega L/c)^2$,得到

$$\Delta\dot{\psi}=-(\Omega L/c)^2\frac{c}{L}\frac{\sin(\nu/2)}{\nu/2}\sin[\nu/2+\psi(0)] \tag{21.55}$$

由于电子的初始位相是无规的(电子位相在$-\pi\sim\pi$之间均匀分布),将上式对初位相 $\psi(0)$求平均,

$$\langle \Delta\dot{\psi} \rangle = -(\Omega L/c)^2 \frac{c}{L} \frac{\sin(\nu/2)}{\nu/2} \langle \sin[\nu/2+\psi(0)] \rangle = 0 \tag{21.56}$$

这说明在这种近似下，增益 $G \propto \langle \Delta\dot{\psi} \rangle = 0$，即只有电子能量的调制（加速或减速），而没有净增益.

若单摆方程(21.40)的微扰近似到$(\Omega L/c)^4$，并且对电子初始位相求平均，则得到

$$\langle \Delta\dot{\psi} \rangle = (\Omega L/c)^4 \frac{c}{4L} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu} \left(\frac{\sin(\nu/2)}{\nu/2} \right)^2 \tag{21.57}$$

代入增益公式(21.47)，则

$$G = -\frac{4\pi^2 r_0 K^2 L^3 N_e}{\lambda_u \gamma^3 V} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu} \left(\frac{\sin(\nu/2)}{\nu/2} \right)^2 \tag{21.58}$$

即增益正比于自发辐射谱方程(21.28)的导数.

令电子数的密度为 N_e/V，

$$N_e/V = \frac{I_e}{ec\Sigma_E} F \tag{21.59}$$

这里 N_e 是电子数，I_e 是电子束的电流，Σ_E 是电子束截面，F 是填充因子，F 的物理意义是只有在激光截面 Σ_L 之内的电子才可能对增益有贡献. 这样可把 F 写成

$$F = \begin{cases} 1, \text{若} \Sigma_E \geqslant \Sigma_L \\ \Sigma_E/\Sigma_L, \text{若} \Sigma_E < \Sigma_L \end{cases} \tag{21.60}$$

将(21.59)式代入方程(21.58)，并利用 ω_0，$(\Delta\omega/\omega)_0$ 的公式(21.26)和(21.27)，把增益写成简明的形式

$$G = -g\pi \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu} \left(\frac{\sin(\nu/2)}{\nu/2} \right)^2 \tag{21.61}$$

其中

$$\begin{aligned} g &= \frac{4\pi\lambda_0 L}{\gamma} \frac{I}{\Sigma_E I_0} F\xi \left(\frac{\Delta\omega}{\omega} \right)_0^{-2} \\ \xi &= \frac{1}{2} \frac{K^2}{1+K^2} \end{aligned} \tag{21.62}$$

(21.61)式中 G 与 ν 的关系对平面磁摆动器和螺旋形磁摆动器都适用.

图 21.6(a)是按(21.58)式计算的增益曲线，(c)是按(21.28)式计算的自发辐射的谱，(b)和(d)分别是斯坦福大学的自由电子激光放大器的增益曲线与自发辐射谱的实验结果. 该实验中，电子束的能量 $E_e \approx$ 24 MeV，峰值电流 70 mA，被放大的激光束(CO_2 激光)$\lambda = 10.6\ \mu$m，功

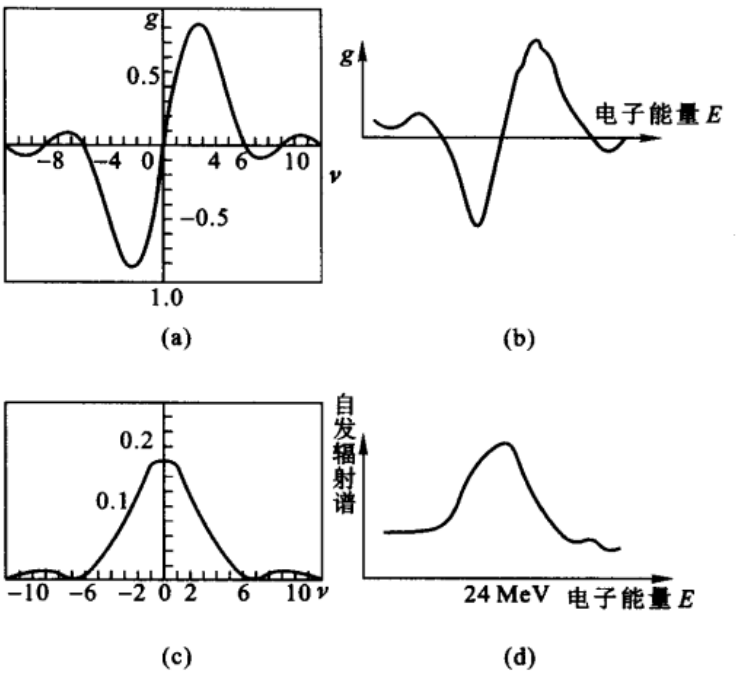


图 21.6 自由电子激光放大器增益曲线
(a)增益(理论) (b)增益(实验) (c)自发辐射谱(理论)
(d)自发辐射谱(实验)

率密度 $1.4\times10^5\ \mathrm{W/cm^2}$. 增益曲线形状与理论一致,增益约为 7%. 自发辐射谱的相对线宽的实验值为 $\Delta\omega/\omega\approx0.4\%$,理论值为 $(\Delta\omega/\omega)_0=\lambda_u/(2L)\approx0.3\%$,见(21.27)式. 自发辐射(在接收立体角 2×10^{-6} 内)瞬时功率为 5×10^{-6} W,也与理论一致. 随后,自由电子激光振荡器也实验成功.

21.3.3 自由电子束的色散与吸收

在计算增益时,只考虑了激光强度的变化,没考虑激光的位相变化. 回想在普通激光理论中,介质极化强度的虚部影响光的放大或吸收,实部(色散)影响光的位相. 在光与电子束的作用中,也有类似情况. Dattoli 等 1981 年证明了光强与位相的变化分别为

$$\left.\begin{aligned}\Delta I&=-g\pi IC(\nu)\\ \Delta\phi&=\omega\Delta t-\frac{1}{2}g\pi S(\nu)\end{aligned}\right\}\tag{21.63}$$

$$\left.\begin{aligned}C(\nu)&=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\left(\frac{\sin(\nu/2)}{\nu/2}\right)^2\\ S(\nu)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\left(\frac{\sin(\nu/2)}{\nu^2}\right)\end{aligned}\right\}\tag{21.64}$$

可以验证 $C(\nu)$ 和 $S(\nu)$ 满足 Krames - Kronig 关系

$$S(\nu)=\frac{1}{\pi}\int\frac{C(\nu_0)}{\nu_0-\nu}\mathrm{d}\nu_0 \tag{21.65}$$

这说明在激光物理中用极化强度处理的参量放大等非线性过程也可能出现在光与自由电子束的作用中.

这里强调平面磁摆动器的情况与螺旋形磁摆动器的明显区别,前者允许各级奇次谐波的自发辐射.这说明也可以在高级谐波条件下实现放大或振荡.n 次谐波的增益为

$$G_n=-g_n\left(\frac{\pi}{n}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\left(\frac{\sin(n\nu_n/2)}{n\nu_n/2}\right)^2_{(n=1,3,\cdots)} \tag{21.66}$$

$$\left.\begin{aligned}\nu_n&=\pi\left(\frac{n\omega_0-\omega}{n\omega_0}\right)/\left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)_0\\ g_n&=\frac{4\pi\lambda_n L}{\gamma}\frac{I}{\sum_{\mathrm{E}}I_0}F_nF'(\xi)\\ F'(\xi)&=\xi\{n[\mathrm{J}_{(n+1)/2}(n\xi)-\mathrm{J}_{(n-1)/2}(n\xi)]\}^2\end{aligned}\right\} \tag{21.67}$$

F_n 是 n 次谐波的填充因子(21.60)式.

21.3.4 电子能量的变化

前已指出,光束的增益来自电子能量的减少.现在讨论电子束与激光束作用之后,电子能量分布的变化.

电子的能量和位相的初值分别为 $\gamma(0)$,$\phi(0)$.令电子与光束作用之后的能量为 $\bar{\gamma}$,由(21.45)和(21.55)式给出的 $\Delta\gamma\propto\Delta\dot{\phi}$ 及 $\Delta\dot{\phi}$ 公式,可证

$$\bar{\gamma}=\gamma(0)\left\{1-\left(\frac{\Omega L}{c}\right)^2\frac{\lambda_u}{4\pi L}\frac{\sin(\nu/2)}{\nu/2}\sin\left[\frac{1}{2}\nu+\psi(0)\right]\right\} \tag{21.68}$$

电子能量分布函数 $\rho(\gamma)$ 为

$$\rho(\gamma)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\delta[\gamma-\bar{\gamma}(\gamma(0),\psi(0))]\mathrm{d}\psi(0) \tag{21.69}$$

其中 δ 是狄拉克函数,$\bar{\gamma}$ 即(21.68)式.积分得到

$$\rho(\gamma)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{\Delta\gamma_{\mathrm{M}}^2-(\gamma-\gamma(0))^2}} \tag{21.70}$$

$$\Delta\gamma_{\mathrm{M}}=\left(\frac{\Omega L}{c}\right)^2\frac{\lambda_u}{4\pi L}\gamma(0)\left|\frac{\sin(\nu/2)}{\nu/2}\right| \tag{21.71}$$

$\Delta\gamma_{\mathrm{M}}$ 是最大的能量移动,由(21.68)取极大值得到.

由分布函数可求出平均值:

$$\left\langle\left(\frac{\Delta\gamma}{\gamma}\right)^2\right\rangle=\int\left(\frac{\gamma-\gamma(0)}{\gamma(0)}\right)^2\rho(\nu)\mathrm{d}\gamma=\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta\gamma_{\mathrm{M}}}{\gamma_0}\right)^2 \tag{21.72}$$

$$\left\langle\frac{\Delta\gamma}{\gamma}\right\rangle=\left(\frac{\Omega L}{c}\right)^4\frac{\lambda_u}{16\pi L}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\left(\frac{\sin(\nu/2)}{\nu/2}\right)^2 \tag{21.73}$$

比较(21.73)式 和(21.72)式,得到

$$\left\langle\frac{\Delta\gamma}{\gamma}\right\rangle=\frac{2\pi L}{\lambda_u}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\left\langle\left(\frac{\Delta\gamma}{\gamma}\right)^2\right\rangle=\frac{\gamma}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\gamma}\left\langle\left(\frac{\Delta\gamma}{\gamma}\right)^2\right\rangle \tag{21.74}$$

(21.74)式即 Madey 定理,它对研究存贮环自由电子激光器极为重要,因为电子束在存贮环中,多次通过磁摆动器,每次通过都使能散度变大,由(21.74)式可知能散度对自由电子激光性能影响很大.(21.73)式还表明$\langle\Delta\gamma/\gamma\rangle$与增益曲线一致.这正说明增益是由 $\Delta\gamma$ 的减小(电子能量减小)造成的.

不难想到,$\Delta\gamma$ 的增大,则意味着电子加速.因此适当选择自由电子激光放大器的参数,即利用增益曲线图 21.6 的吸收部分,从理论上讲,即成为激光加速器.

21.4 自由电子激光动力学的单电子理论

上节计算小信号增益时,基本出发点是认为光束能量的增加等于电子能量的减小,并没有考虑光场的演化.这种近似处理方法与普通激光器的速率方程有相似之处.本节给出电子演化方程、光场演化方程,它们是耦合在一起的,它是研究自由电子激光器动力学问题的基础.

21.4.1 自由电子激光器的经典理论

我们仍限于康普顿型激光器,即忽略电子之间的作用,这样只用单电子理论即可.自由电子激光器的单电子经典理论有两种等效的方法,它们都用麦克斯韦方程描述光场,但一种方法用电子的洛伦兹方程描述电子,另一种方法用玻耳兹曼方程描述电子.本节主要介绍前一种方法,第二种方法只作简单介绍.

Colson 在博士论文中建立了自由电子激光器的经典理论.他从洛伦兹方程得到上节所述的单摆方程.为了系统地介绍他的理论,将单个电子的洛伦兹方程写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma\boldsymbol{\beta})=\frac{e}{m_0c}[\boldsymbol{E}_r+\boldsymbol{\beta}\times(\boldsymbol{B}_u+\boldsymbol{B}_r)] \tag{21.75}$$

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}=\frac{e}{m_0c}\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{E}_r \tag{21.76}$$

$$\gamma^2=1/\sqrt{1-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta}} \tag{21.77}$$

其中电子电荷 $e=-|e|$,c 是光速,$\boldsymbol{\beta}c$ 是电子速度,γm_0c^2 是电子能量,$\boldsymbol{E}_r$ 和 $\boldsymbol{B}_r$ 分别是光波的电场和光波的磁场,$\boldsymbol{B}_u$ 是磁摆动器的磁场,磁摆动器

的轴向为 z 方向. 方程(21.76)描述光与电子的能量交换.

对于典型的螺旋型磁摆动器,例如磁极排列为两排的→↓←↑→↓←…,这两排磁铁的中间部分的磁场为

$$\boldsymbol{B}_u=[B\cos(k_u z),B\sin(k_u z),0] \tag{21.78}$$

这时,电子通过磁摆动器时,轨道也是螺旋形,

$$\beta=[(-K/\gamma)\cos(k_u z),(-K/\gamma)\sin(k_u z),\beta_z] \tag{21.79}$$

这里 K 是磁摆动器参数,即(21.17)式,$k_u=2\pi/\lambda_u$,λ_u 是磁周期,B 是磁场峰值,γ 是洛伦兹因子,

$$\beta_z\approx 1-(1+K^2)/(2\gamma^2) \tag{21.80}$$

典型情况的 $K\approx 1$,所以横向振荡的振幅很小.

与上述螺旋形磁场耦合得最好的光场也是圆偏振的,其矢量势为

$$\boldsymbol{A}(z,t)=\frac{E(t)}{k}[\sin(kz-\omega t+\phi(t)),\cos(kz-\omega t+\phi(t)),0] \tag{21.81}$$

其中 $E(t)/k$ 是矢量势振幅. $\boldsymbol{A}(z,t)$ 与 x 和 y 无关,即只考虑一维理论,$\phi(t)$ 是光的位相. 光的电场为

$$\boldsymbol{E}_r=-\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{21.82}$$

注意,对自由电子激光放大器,这里的光波即为被放大的入射激光束. 对于自由电子激光振荡器,光场从自发辐射开始建立,发展成激光(类似普通激光的自组织或自洽条件).

利用(21.81)式,把(21.82)式的 $\boldsymbol{E}_r$ 和(21.79)式的 $\boldsymbol{\beta}$ 代入方程(21.76),则得到

$$\frac{d\gamma}{dt}=\left(\frac{eEK}{\gamma m_0 c}\right)\cos[(k_u+k)z-\omega t+\phi] \tag{21.83}$$

用 21.3.1 节同样的方法,可得到单摆方程. 令

$$\zeta(t)=(k_u+k)z-\omega t \tag{21.84}$$

$$\frac{d^2\zeta}{d\tau^2}=\frac{dv_p}{dt}=a\cos(\zeta+\phi) \tag{21.85}$$

其中 $a=4\pi NeKLE/(\gamma^2 m_0 c^2)$ 是量纲为 1 的光场强度,$\tau=ct/L$ 是量纲为 1 的时间,N 是磁周期数,$L=N\lambda_u$ 是磁摆动器长度,$0\leqslant\tau\leqslant 1$. 特别注意 v_p 是电子的相速度. 电子的初始条件为

$$\left.\begin{aligned}\zeta(0)&=\zeta_0\\ v_p(0)&=v_0=L[(k_u+k)\beta_z(0)-k]\end{aligned}\right\} \tag{21.86}$$

(21.85)式与(21.40)式本质上完全一样,只是 ζ 与 Ψ 的定义稍有不同. 另外磁场(21.78)式与(21.13)式不同,使得电子速度 $\beta_z\propto\cos(k_u z)$,而

$v_\perp \propto \sin(k_u z)$. 因此(21.85)式的右边为余弦函数,而(21.40)式右边为正弦函数. (21.85)式右边的正、负号与 e 的定义有关. 实际上 a 在这里是负的.

若 $|a| \ll \pi$,则在 $\tau \leqslant 1$ 的时间内位相变化很小. 这是小信号情况. 反之,若 $|a| \gg \pi$ 则为强信号.

光场由麦克斯韦方程描述(Colson 用 CGS 单位制),

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial a^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{A}(z,t)=-\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J}_\perp(z,t) \tag{21.87}$$

$$\boldsymbol{J}_\perp = ec\sum_m \boldsymbol{\beta}_\perp \delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}_m(t)) \tag{21.88}$$

$\boldsymbol{J}_\perp$ 是横向电流,$\boldsymbol{\beta}_\perp=(\beta_x,\beta_y,0)$,$\boldsymbol{r}_m$ 是第 m 个电子的轨道 $\delta^{(3)}$ 是三维 δ 函数. $\sum_m$ 即多个电子对电流的总贡献.

将 $E(t)$ 和 $\phi(t)$ 写成慢变振幅形式,这样在方程中对 $E(t)$,$\phi(t)$ 的二次导数忽略不计,(21.87)式变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(E\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi})=\frac{L}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi})=\pi eKL\sum_m \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta}}{\gamma}\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}_m(t)) \tag{21.89}$$

在求(21.89)式,先分别从方程(21.87)求 A_x,A_y 的方程,再考虑到圆偏振光的公式,

$$\boldsymbol{A}=(A_x+\mathrm{i}A_y)/\sqrt{2} \tag{21.90}$$

另外,(21.89)式右端指数上的 ζ 含有 k_u,这里因为将 $E(t)$,$\phi(t)$ 写成正比于 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_u t}$($\omega_u=2\pi c/\lambda_u$).

光场的方程(21.89)可写为更简单的形式

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\tau}=-j\langle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\zeta}\rangle \tag{21.91}$$

其中 $a=|a|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$,$j=8N(\pi eKL)Ne/(V\gamma^3 m_0 c^2)$.

最后强调,(21.84)式定义的 ζ 即电子相对于入射的光波的位相. 前已指出,若电子比光波的位相超前 $\frac{\pi}{2}\left(\zeta=\frac{\pi}{2}\right)$,光被放大,见图 21.4.

方程(21.85)和(21.91)广泛用于研究光场与电子演化的动力学.

21.4.2 玻耳兹曼方程

自由电子激光器的另一种半经典理论则用玻耳兹曼方程描述电子,即

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\dot{z}\frac{\partial f}{\partial z}+\dot{v}_z\frac{\partial f}{\partial v_z}=0 \tag{21.92}$$

其中 f 是电子分布函数. 横向电流为

$$\boldsymbol{J}_{\perp}=e\int v_{\perp}\, f\mathrm{d}^3v \tag{21.93}$$

光场仍由(21.87)式的麦克斯韦方程描述，但其中的电流由(21.93)式给出. 这样(21.92)式和(21.87)式耦合在一起. 将 f 展开为

$$f=g_0+\sum_{m=1}^{\infty} g_m \mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\zeta+\phi)}+c.c. \tag{21.94}$$

若在 $m=1$ 截断，则 $f=g_0+g_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\zeta+\phi)}$，令

$$\left.\begin{aligned} R_1+iR_2&=g_1\\ R_3&=g_0 \end{aligned}\right\} \tag{21.95}$$

可以证明(21.92)式将等价于布洛赫方程：

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial R_1}{\partial z}+\mathrm{i}\mu R_1=-\sqrt{EB_{\mathrm{u}}}\frac{\partial R_3}{\partial \mu}\\ &\frac{\partial R_2}{\partial z}-\mathrm{i}\mu R_2=0\\ &\frac{\partial R_3}{\partial z}=-\sqrt{EB_{\mathrm{u}}}\frac{\partial R_1}{\partial \mu} \end{aligned}\right\} \tag{21.96}$$

$$\mu\equiv k(1/\beta_z-1/\beta_{z,\text{静}}) \tag{21.97}$$

本节介绍的这两种理论是等价的. 在小信号下都可得到增益公式. 同时，都被用于研究光脉冲演化、横向效应等.

21.5 有锥形磁摆动器的自由电子激光器

当自由电子激光放大器工作时，电子损失能量，这样将使 ω_0 减小，v 减小，见(21.6)式. 从增益曲线可知，将可能从最大增益处下降，即减小增益. 为克服这个问题，Kroll 等建议用锥形磁摆动器，使磁周期 λ_{u} 逐渐减小(当然也可使 λ_{u} 固定，改变磁场).

假定磁摆动器的 $k_{\mathrm{u}}(z)=2\pi/\lambda_{\mathrm{u}}(z)$，对线偏振情况，磁摆动器和光场的矢量势 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{u}}$，$\boldsymbol{A}_{\mathrm{L}}$ 分别为

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{u}}=(m_0c^2/e)a_{\mathrm{u}}(z)\left\{\sin\left[\int_0^z k_{\mathrm{u}}(z')\mathrm{d}z'\right],0,0\right\} \tag{21.98}$$

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{L}}=2(m_0c^2/e)a_{\mathrm{L}}(z)\left\{\sin\left[\int_0^z k_{\mathrm{L}}(z')\mathrm{d}z'-\omega t-\phi_{\mathrm{L}}\right],0,0\right\} \tag{21.99}$$

其中 a_{u}，a_{L} 是磁摆动器磁场及光波的量纲为 1 的矢量势，k_{u}，k_{L} 是相应的波数. 假定在一个磁周期 λ_{u} 之内，a_{u} 和 a_{L} 变化很小，即可用慢变近似，

$$\left.\begin{aligned}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}a_{\mathrm{u}}(z)\right| &\ll k_{\mathrm{u}}(z)a_{\mathrm{u}}(z)\\ \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}a_{\mathrm{L}}(z)\right| &\ll k_{\mathrm{u}}(z)a_{\mathrm{L}}(z)\end{aligned}\right\} \tag{21.100}$$

这时可以证明，光场波数的变化可以略去，故有

$$A_{\mathrm{L}}=2(m_0c^2/e)a_{\mathrm{L}}(z)(\sin(kz-\omega t-\phi_{\mathrm{L}}),0,0)$$
$$k\equiv k_{\mathrm{L}}(z)=\omega/c=\text{常数} \tag{21.101}$$

采用 21.3 节的方法，则

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}=eE_{\mathrm{L}}v_{\perp}/(m_0c^2) \tag{21.102}$$

其中光场为

$$\left.\begin{aligned}E_{\mathrm{L}}&=-\frac{1}{c}\frac{\partial(\boldsymbol{A})_x}{\partial t}=2\frac{\omega m_0c}{e}a_{\mathrm{L}}(z)\cos(\omega t-kz+\phi_{\mathrm{L}})\\ v_{\perp}&=\frac{p_x}{\gamma m_0}=-\frac{c}{\gamma}a_{\mathrm{u}}(z)\sin\left(\int_0^z k_{\mathrm{u}}(z')\mathrm{d}z'\right)\end{aligned}\right\} \tag{21.103}$$

由于广义动量守恒，在电子束平行入射的情况，

$$p_x+\frac{e}{c}A_x=\text{常数}=0 \tag{21.104}$$

这里忽略光场对动量的影响. 将 E_{L}，$v_{\perp}$ 代入(21.102)式，有

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}=-\frac{\omega}{\gamma}a_{\mathrm{L}}(z)a_{\mathrm{u}}(z)(\sin\psi_{-}-\sin\psi_{+}) \tag{21.105}$$

其中 $\psi_{\pm}=\int_0^z[k\mp k_{\mathrm{u}}(z')]\mathrm{d}z'-\omega t'-\phi_{\mathrm{L}}$. ψ_{+} 是快变量，ψ_{-} 是慢变量，略去 ψ_{+} 的影响，并令 $\psi\equiv\psi_{-}$ 则

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}=-\frac{\omega}{\gamma}a_{\mathrm{L}}(z)a_{\mathrm{u}}(z)\sin\psi \tag{21.106}$$

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}=[k+k_{\mathrm{u}}(z)]\dot{z}-\omega \tag{21.107}$$

由(21.103)式，可求出

$$\langle v_{\perp}^2\rangle=\frac{c^2}{2\gamma^2}a_{\mathrm{u}}^2(z) \tag{21.108}$$

这样可得到

$$\dot{z}\approx c\left\{1-\frac{1}{2\gamma^2}\left[1+\frac{1}{2}a_{\mathrm{u}}^2(z)\right]\right\} \tag{21.109}$$

将 $\dot{z}$ 代入(21.107)式，则

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\approx c\left\{k_{\mathrm{u}}(z)-\frac{k}{2\gamma^2}\left[1+\frac{1}{2}a_{\mathrm{u}}^2(z)\right]\right\} \tag{21.110}$$

方程(21.106)和(21.110)式可写成

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}z}&=-\frac{k}{\gamma}a_{\mathrm{L}}(z)a_{\mathrm{u}}(z)\sin\psi\\ \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}&=k_{\mathrm{u}}(z)-\frac{k}{2\gamma^2}\left[1+\frac{1}{2}a_{\mathrm{u}}^2(z)\right]\end{aligned}\right\}\tag{21.111}$$

由能量守恒定律，可知光场的方程

$$a_{\mathrm{L}}^2(z)=a_{\mathrm{L}}^2(0)-\frac{8\pi}{k^2}\frac{F}{\sum_{\mathrm{E}}}\frac{I}{I_0}[\bar{\gamma}(z)-\gamma(0)]\tag{21.112}$$

其中 F 是填充因子，$I_0=ec/\gamma_0$ 是阿尔芬电流，I 是电子束的电流，$\bar{\gamma}$ (z) 是平均值.

方程(21.111)和(21.112)便是用锥形磁摆动器的自由电子激光器的方程，k_{u} (z)，a_{u} (z)是已知的.解方程可得到 $\gamma,\psi,a_{\mathrm{L}}^2$ (z)的变化规律.用计算机求解表明，这样确实可提高自由电子激光功率.

1983 年美国洛斯·阿拉莫斯实验室用 10.6 μm 的 CO_2 激光作为被放大信号，磁摆动器长 10 m，$B=0.3$ T，磁周期 λ_{u} 从 2.7 cm 渐变到 2.4 cm.电子束能量 20 MeV，峰值电流 $I=20$ A.当被放大的 CO_2 激光功率为 1 GW 时，电子束的 4%的能量转换为激光能量.此后，该装置又实现了振荡，自由电子激光波长 $\lambda=9\sim11$ μm，平均输出功率约 1 kW，脉宽 70 μs.

21.6 自由电子激光器的全量子理论

本节首先给出电子静止系的哈密顿量，然后求出布洛赫方程，最后求出小信号增益.

21.6.1 电子静止系的哈密顿量

在电子静止系中(例如该坐标系以电子平均速度运动)，电子的运动则是非相对论性的.在该坐标系中，看到磁摆动器的场与被放大的激光束方向相反、频率相等(这样才可能放大).量子化的矢量势为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_{\mathrm{L}}+\boldsymbol{A}_{\mathrm{u}}\tag{21.113}$$

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{A}_{\mathrm{L}}&=\mathrm{i}\left(\frac{2\pi c\hbar}{\omega V}\right)^{1/2}\{\hat{a}_{\mathrm{L}}\exp(\mathrm{i}kz)\boldsymbol{e}+\hat{a}_{\mathrm{L}}^{+}\exp(-\mathrm{i}kz)\boldsymbol{e}^{*}\}\\ \boldsymbol{A}_{\mathrm{u}}&=\mathrm{i}\left(\frac{2\pi c\hbar}{\omega V}\right)^{1/2}\{\hat{a}_{\mathrm{u}}\exp(-\mathrm{i}kz)\boldsymbol{e}+\hat{a}_{\mathrm{u}}^{+}\exp(\mathrm{i}kz)\boldsymbol{e}^{*}\}\end{aligned}\right\}\tag{21.114}$$

其中 $\hat{a},\hat{a}^{+}$ 分别是消灭算符和产生算符，V 是光束与电子束作用的体积.

$$[a_e, a_m^+]=\delta_{e,m}, \quad e,m=L,u \tag{21.115}$$

光场和磁摆动器的场都假定为圆偏振的，即

$$e=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+\mathrm{i}y) \tag{21.116}$$

这时，哈密顿量为

$$H=\frac{1}{2m_0}\left(p-\frac{e}{c}A\right)^2+\hbar\omega\left(\hat{a}_L^+\ \hat{a}_L+\frac{1}{2}\right)+\hbar\omega\left(\hat{a}_u^+\ \hat{a}_u+\frac{1}{2}\right) \tag{21.117}$$

p 是电子的动量. 上式后两项是自由场的能量，而第一项是电子与光的相互作用能. 由于矢量势 A 是横向的，所以 $p\cdot A=0$，这样只剩下 A^2 的贡献. 量子化的哈密顿量变为

$$\begin{aligned}H=&p^2/(2m_0)+\hbar g\left[\hat{a}_L^+\ \hat{a}_u\exp(-2\mathrm{i}kz)+\hat{a}_u^+\ \hat{a}_L\exp(2\mathrm{i}kz)\right]\\&+\hbar(\omega+g)(\hat{a}_L^+\ \hat{a}_L+\frac{1}{2})+\hbar(\omega+g)(\hat{a}_u^+\ \hat{a}_u+\frac{1}{2})\end{aligned} \tag{21.118}$$

这里 p 是纵向动量；g 是常数(相当于耦合常数)，且有

$$g=\frac{2\pi c^2 r_0}{\omega V}(\ll\omega), \quad r_0=\frac{e^2}{m_0c^2} \tag{21.119}$$

(21.118)式的物理意义是清晰的. 式中的第二项表明，每产生一个激光光子，磁摆动器场则消灭一个光子，电子动量损失为 $2\hbar k$. 相反，激光光子消灭一个，则磁摆动器的场产生一个光子，电子得到 $2\hbar k$ 的动量.

21.6.2 布洛赫方程

定义

$$\left.\begin{aligned}&\hat{J}_+=\hat{a}_L^+\hat{a}_u, \quad \hat{J}_1=\frac{1}{2}(\hat{J}_++\hat{J}_-)\\&\hat{J}_-=\hat{a}_u^+\hat{a}_L, \quad \hat{J}_2=\frac{1}{2\mathrm{i}}(\hat{J}_+-\hat{J}_-)\\&\hat{J}=\frac{1}{2}(\hat{a}_L^+\ \hat{a}_L+\hat{a}_u^+\ \hat{a}_u), \quad \hat{J}_3=\frac{1}{2}(\hat{a}_L^+\ \hat{a}_L-\hat{a}_u^+\ \hat{a}_u)\end{aligned}\right\} \tag{21.120}$$

它们的对易关系为

$$[\hat{J}_l,\hat{J}_m]=\mathrm{i}\varepsilon_{l,m,k}\hat{J}_k, \quad (l\neq m\neq k=1,2,3) \tag{21.121}$$

其中 $e_{l,m,k}$ 是 Ricci 张量，且有 $[\hat{J},\hat{J}_l]=0$. 再定义算符

$$\left.\begin{aligned}&\hat{S}_+=\exp(2\mathrm{i}kz)\\&\hat{S}_-=\exp(-2\mathrm{i}kz)\\&\hat{S}_3=p/(2\hbar k)\end{aligned}\right\} \tag{21.122}$$

$$\left.\begin{aligned}&[\hat{S}_+,\hat{S}_-]=0\\&[\hat{S}_3,\hat{S}_\pm]=\pm 1\\&[\hat{S},\hat{J}]=0\end{aligned}\right\}\tag{21.123}$$

这样哈密顿量可写成

$$H=\hbar\tilde{\omega}\hat{S}_3^2+\hbar g(\hat{J}_+\hat{S}_-+\hat{S}_+\hat{J}_-)+2\hbar\omega\left(\hat{J}+\frac{1}{2}\right)\tag{21.124}$$

其中 $\tilde{\omega}\equiv 2\hbar k^2/m_0$.

由对易关系可证

$$\mathrm{i}\hbar\dot{\hat{J}}=[H,\hat{J}]=0\tag{21.125}$$

$J=\frac{1}{2}(n_L+n_u)=$常数. 即激光与磁摆动器的总光子数守恒. 再定义

$$\left.\begin{aligned}&\hat{R}_1=\frac{1}{2}(\hat{J}_+\hat{S}_-+\hat{S}_+\hat{J}_-)\\&\hat{R}_2=\frac{1}{2\mathrm{i}}(\hat{J}_+\hat{S}_--\hat{S}_+\hat{J}_-)\\&\hat{R}_3=\hat{J}_3\end{aligned}\right\}\tag{21.126}$$

可证明

$$\left.\begin{aligned}&[\hat{R}_l,\hat{R}_m]=\mathrm{i}\varepsilon_{l,m,k}\hat{R}_k\\&[\hat{S}_3,\hat{R}_l]=(-1)^l\mathrm{i}\hat{R}_m\\&[\hat{S}_3,\hat{R}_3]=0\end{aligned}\right\}\tag{21.127}$$

这时,哈密顿量为

$$H=\hbar\tilde{\omega}\hat{S}_3+2\hbar g\hat{R}_1\tag{21.128}$$

其中略去了守恒的项$\left(J+\frac{1}{2}\right)$,它对运动方程无影响. 可证

$$\hat{S}_3+\hat{R}_3=\text{常数}\tag{21.129}$$

即$(\hat{S}_3+\hat{R}_3)$是守恒量,表明电子与场的总动量守恒.

用上述符号,可得到海森堡表象中的方程

$$\dot{\hat{R}}=\hat{R}\times\hat{\Omega}-\mathrm{i}\tilde{\omega}\hat{D}\hat{R}\tag{21.130}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&\hat{\Omega}\equiv(-2g,0,2\tilde{\omega}\hat{S}_3)\\&\hat{R}\equiv(\hat{R}_1,\hat{R}_2,\hat{R}_3)\\&\hat{D}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\end{aligned}\right\}\tag{21.131}$$

这就是自由电子激光器的全量子化的布洛赫方程. 方程(21.130)最后一项类似"解相"过程(dephasing),若此项为零则电子的行为变为经典的而非量子化的.

21.6.3 小信号增量

在 21.6.2 节中给出的海森堡表象中的方程,物理意义清楚,但不便于计算. 下面用薛定谔表象计算增益.

希尔伯特空间定义为电子与光子的福克态的直接积

$$|n_L\rangle\otimes|n_u\rangle|p\rangle \tag{21.132}$$

量子态为

$$|\psi\rangle = \exp(-\mathrm{i}\hat{S}_3^2(0)\tilde{\omega}t)\sum_l C_l \mid n_L^0+l, n_u^0-l, \hat{S}_3^2(0)-l\rangle \tag{21.133}$$

其中 $\hat{S}_3(0)$ 与电子初始动量有关,n_L^0 和 n_u^0 分别是激光与磁摆动器场的初始光子数,l 是交换的光子数.

实际上磁摆动器的光子数 $n_u^0 \gg |l|$,这样可把 n_u 看成常数. 这可大大简化运算过程. 由薛定谔方程得到

$$\mathrm{i}\dot{C}_l = -(\nu-\varepsilon l)lC_l + \rho\left(\sqrt{n_L^0+l+1}C_{l+1} + \sqrt{n_L^0+l}C_{l-1}\right) \tag{21.134}$$

其中 $\dot{C}_l$ 是对 τ 求导数,$\tau \equiv t/\Delta t$,Δt 是作用时间,且有

$$\left.\begin{aligned} \nu &\equiv 2\omega\Delta t\,\frac{p}{m_0 c} \\ \varepsilon &= \tilde{\omega}\Delta t \\ \rho &= g\sqrt{n_u^0}\Delta t \end{aligned}\right\} \tag{21.135}$$

$$C_l(0) = \delta_{l,0} \tag{21.136}$$

$C_l(0)$ 是初条件.

方程(21.134)中的 ν 是多普勒移动. Bambini 已证明这里的 ν 与前面定义的 ν 一样. ε 是电子的反冲. $\rho\sqrt{n_L^0}$ 是量纲为 1 的拉比频率,它与前面的 $(\Omega L/c)^2$ 有关. 在小信号近似下,

$$\rho\sqrt{n_L^0} \ll 1 \tag{21.137}$$

用微扰展开到 ρ 的一次方,

$$C_l \approx C_l^0 + \rho C_l^1 \tag{21.138}$$

初始条件

$$\left.\begin{aligned} C_l^0(0)&=\delta_{l,0}\\ C_l^1(0)&=0 \end{aligned}\right\} \tag{21.139}$$

将(21.138)式代入方程(21.134),并利用(21.139)式,则有

$$\left.\begin{aligned} C_0^0(\tau)&=1\\ C_1^1(\tau)&=\rho\sqrt{n_L^0+1}\{1-\exp[\mathrm{i}(\nu-\varepsilon)\tau]\}/(\nu-\varepsilon)\\ C_{-1}^1(\tau)&=-\rho\sqrt{n_L^0}\{1-\exp[\mathrm{i}(\nu+\varepsilon)\tau]\}/(\nu+\varepsilon) \end{aligned}\right\} \tag{21.140}$$

这里$|C_1^1(\tau)|^2$代表发射,$|C_{-1}^1(\tau)|^2$代表吸收.

光子数的变化Δn_L为

$$\begin{aligned}\Delta n_L&=|C_1^1(\tau)|^2-|C_{-1}^1(\tau)|^2\\&=\rho^2\left\{(n_L^0+1)\left[\frac{\sin\left(\frac{\nu-\varepsilon}{2}\right)}{(\nu-\varepsilon)/2}\right]^2-n_L^0\left[\frac{\sin\left(\frac{\nu+\varepsilon}{2}\right)}{(\nu+\varepsilon)/2}\right]^2\right\}\end{aligned} \tag{21.141}$$

这里ε是个小量(斯坦福的自由电子激光器的$\varepsilon\approx10^{-7}$),所以

$$\begin{aligned}\left[\frac{\sin\left(\frac{\nu\pm\varepsilon}{2}\right)}{(\nu\pm\varepsilon)/2}\right]^2&=\exp\left(\pm\varepsilon\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left(\frac{\sin(\nu/2)}{\nu/2}\right)^2\\&\approx\left(1\pm\varepsilon\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left(\frac{\sin(\nu/2)}{\nu/2}\right)^2\end{aligned} \tag{21.142}$$

代入(21.141)式,则

$$\Delta n_L\approx\rho^2\left[-(2n_L^0+1)\varepsilon\frac{\partial}{\partial\nu}+1\right]\left(\frac{\sin(\nu/2)}{\nu/2}\right)^2 \tag{21.143}$$

其中包括受激辐射(正比于$2n_L^0$),"经典的"自发辐射项(正比于$\sin^2(\nu/2)/(\nu/2)^2$),"真空起伏引起的受激辐射"(正比于$\varepsilon\frac{\partial}{\partial\nu}(\cdots)$).

这里增益为

$$G=\Delta n_L/n_L^0\approx-2\rho^2\varepsilon\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{\sin(\nu/2)}{\nu/2}\right)^2 \tag{21.144}$$

显然与经典理论的增益公式相似.

21.7 自由电子激光的压缩态

由自由电子激光器的全量子理论,也可以用来研究压缩态等问题.

假定初始光子数$n_L^0=0$,方程(21.134)变为,

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{i}\dot{C}_l&=-(\nu-\varepsilon)lC_l+\rho(\sqrt{l+1}C_{l+1}+\sqrt{l}C_{l-1})\\ C_l(0)&=\delta_{l,0} \end{aligned}\right\} \tag{21.145}$$

此方程可求微扰解，零级近似的解为

$$C_l^0(\tau)=\exp\left(-\frac{1}{2}\mathrm{i}\nu\int_0^\tau|\alpha(\tau')|^2\mathrm{d}\tau'\frac{\alpha(\tau)^l}{\sqrt{l!}}\exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha(\tau)|^2\right)\right) \tag{21.146}$$

其中

$$\alpha(\tau)=-\mathrm{i}\exp(\mathrm{i}\nu\tau/2)\rho\left(\frac{\sin(\nu\tau/2)}{\nu/2}\right) \tag{21.147}$$

计算 $|C_l^0(\tau)|^2$ 表明光子分布不是泊松分布.

定义算符 $\hat{A}$

$$\hat{A}|l\rangle=\sqrt{l}|l-1\rangle \tag{21.148}$$

将 C_l^0 代入 $|\Psi\rangle$ 的公式(21.133)，可以证明

$$\hat{A}|\psi\rangle_{\varepsilon=0}=\alpha(\tau)|\psi(\tau)\rangle_{\varepsilon=0} \tag{21.149}$$

式中 $\varepsilon=0$ 指电子无反冲的情况. 这时 $|\Psi\rangle$ 是相干态.

1984 年，有人计算了方程(21.145)的一级解，其形式为

$$C_l^1=C_l^0[R_l(\tau)+\mathrm{i}I_l(\tau)] \tag{21.150}$$

$R_l(\tau)$ 和 $I_l(\tau)$ 的形式十分复杂，这里略去，(21.150)式的物理含义就是在考虑电子反冲时，$|\Psi\rangle$ 不再是相干态. $|C_l^1|^2$ 也不是泊松分布.

为了研究自由电子激光束的聚束与反聚束效应，只需计算

$$\langle(\Delta l)^2\rangle-\langle l\rangle=-\varepsilon\frac{\partial}{\partial\nu}|\alpha(\tau)|^4 \tag{21.151}$$

这说明无反冲时($\varepsilon=0$)，$\langle(\Delta l)^2\rangle=\langle l\rangle$. 而有反冲时，即有增益或损耗时，会有聚束或反聚束.

为了研究自由电子激光的压缩态，令

$$\left.\begin{aligned}\hat{A}_1&=\frac{1}{2}(\hat{A}^+ +\hat{A})\\ \hat{A}_2&=\frac{1}{2\mathrm{i}}(\hat{A}^+ -\hat{A})\end{aligned}\right\} \tag{21.152}$$

可以计算出

$$\left.\begin{aligned}\langle(\Delta A_1)^2\rangle&=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial\nu}|\alpha(\tau)|^2\right)\cos(\nu\tau)\\ \langle(\Delta A_2)^2\rangle&=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial\nu}|\alpha(\tau)|^2\right)\cos(\nu\tau)\end{aligned}\right\} \tag{21.153}$$

此式再次说明，$\varepsilon=0$(增益也为零)时，$|\Psi\rangle$ 是相干态. 然而，有增益时，会出现压缩态.

至此我们看到，经典理论可以说明自由电子激光器的许多问题. 但为了说明光子统计、压缩态等特性，必须用量子理论.

此外，还有一类拉曼型自由电子激光器也已实现.

自由电子激光器的进一步发展，一方面要提高功率和效率，另一方面是向 X 射线波段. 将反铁磁晶体或单晶光纤作为摆动器，使粒子偏转和辐射是很有趣的问题.

参 考 文 献

[1] Madey J M J. Stimulated emission of bremsstrahlung in a periodic magnetic field. J. Appl. phys. ,1971,42:1906 - 1910.

[2] Madey J M J. Stimulated emission of radiation in periodically deflected electron beam. U. S. Patent,1974,3:410 - 416.

[3] Elias L R,Fairbank W M,Madey J M J,et al. Observation of stimulated emission of radiation by relativistic electrons in a spatially periodic transverse magnetic field. phys. Rev. Lett. ,1976,36:717 - 720.

[4] Deacon D A G et al. First operation of a free-electron laser. Phys. Rev. Lett. ,38, 1977,892 - 900.

[5] Bambini A, Renieri A. The free electron laser: a single-particle classical model. Lett. Nuovo Cimento,1978,31:99 - 103.

[6] Bambini A,Stenholm S. Quantum description of free electrons in the laser. Optics Communication. 1979,30:391 - 397.

[7] Dattoli G. A boch-like model of the free electron laser. Lett. Nuovo Cimento, 1980,27:247 - 250.

[8] Elgin J N. Analytic solution of the quasi-Bloch equations. phys. Lett. ,1980,78A: 65 - 70.

[9] Elgin J N,Li F L. The evolution equation for low gain free-electron laser system. J. Quantum Electronics,1981,QE - 17:1411 - 1415.

[10] 褚成，陆载通，施瑞根等. 喇曼自由电子激光器中辐射的输出及测试. 中国激光，1986,8:36 - 38.

[11] 雷仕湛，周忠益. 自由电子激光器的工作条件. 中国激光，1982,12:18 - 21.

[12] 雷仕湛，江惠. 周期磁场中的相对论电子与光辐射的能量交换. 中国激光，1982, 10:21 - 24.

第 22 章　量子信息科学

量子信息科学是量子力学与信息科学交叉的科学. 量子信息科学的研究内容包括量子计算、量子通信、量子测量、量子密码等. 人们越来越相信,量子信息科学为信息科学提供了新的原理和方法,必将在 21 世纪大放异彩. 本章介绍量子信息与量子计算的概念,重点讲解量子传态.

22.1　量 子 信 息

22.1.1　量子比特(qubit)

经典信息的基本单元是比特(bit). 在电子计算机中,用双稳态代表和存储信息. 例如,有电压代表"1",无电压代表"0". 量子信息是用量子态代表信息. 量子世界异彩纷呈的特性都起源于量子态. 例如,常用的量子态有原子在上能级或下能级,电子自旋向上或自旋向下,光子是水平偏振或垂直偏振.

量子信息的基本单元是量子比特即 qubit. 1 位 qubit 可以用$|0\rangle$和$|1\rangle$分别代表两个量子态. 这个"二态系统"的状态为

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \\ |\alpha|^2 + |\beta|^2 &= 1 \end{aligned} \tag{22.1}$$

$|0\rangle$和$|1\rangle$称为计算基态. 该系统可以处在$|0\rangle$态、$|1\rangle$态,还可以在叠加态$|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$.

量子比特的载体可以是光子、电子、原子、原子核、声子等.

量子信息涉及的物理过程服从量子力学原理.

量子信息的处理即量子态的幺正变换.

量子信息的提取即量子测量.

量子信息的传输及量子态的传送.

量子世界的奇妙特性——叠加态、相干性、纠缠性、不可克隆定理等使量子信息系统的功能远远超过经典信息系统. 量子密码能提供绝对安全保密通信. 量子计算机可能比现有计算机快几百万倍以上.

量子传态可把量子态在瞬间传到很远的地方不必真正传输光子、电子等粒子.

Bennet 等指出，从经典信息到量子信息的推广，就像从实数推广到复数一样，而从现有的计算机到量子计算机的飞跃就像从算盘到计算机的飞跃.

22.1.2 多量子比特

两个经典比特有 4 种状态 00,01,10,11.

二量子比特有 4 种计算基态：$|00\rangle,|01\rangle,|10\rangle,|11\rangle$.

二量子比特可表示为

$$|\Psi\rangle=\alpha_{00}|00\rangle+\alpha_{01}|01\rangle+\alpha_{10}|10\rangle+\alpha_{11}|11\rangle \tag{22.2}$$

它有 2^2 个振幅系数，

$$|\alpha_{00}|^2+|\alpha_{01}|^2+|\alpha_{10}|^2+|\alpha_{11}|^2=1 \tag{22.3}$$

若测量第一个量子比特，测得是 0 的几率是 $|\alpha_{00}|^2+|\alpha_{01}|^2$，而测量后的归一化量子态是

$$|\Psi'\rangle=\frac{\alpha_{00}|00\rangle+\alpha_{01}|01\rangle}{\sqrt{|\alpha_{00}|^2+|\alpha_{01}|^2}} \tag{22.4}$$

而量子比特的重要量子态是 Bell 态或 EPR 对.

推广到 n 个量子比特系统，计算基态是 $|x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle$，量子态 $|\Psi'\rangle=\sum\alpha_x|x'\rangle$，有 2^n 个振幅系数.

22.2 纠 缠 态

纠缠态(entanglement state 或 entangled state)是量子信息科学的基础，可用于量子计算、量子通信、量子态远程传输等.

22.2.1 纠缠态的概念

可以用一个生动的形象来说明纠缠态. 设想从一个“原子蛋”里飞出两只小鸟. 这两只小鸟组成一个量子系统. 假设这两只小鸟只有两种颜色——蓝色或黄色. 假定从一个原子蛋里飞出的这两只小鸟朝相反方向飞行. 由于这两只小鸟是处于叠加状态，因此在测量它们的颜色之前，它们是混合色——绿色的. 假定我们对其中一只小鸟进行测量，这时就发生“波函数坍缩”，这只小鸟的颜色就确定了，例如坍缩到黄色. 这时，向另一方向飞去的那只小鸟就自动地“坍缩”为蓝色. 反之亦然.

纠缠态是量子力学创始人之一薛定谔最先提出的. 他曾经提出一个“思想实验”，被称为薛定谔猫，图 22.1 是一种改进的“薛定谔猫”. 假如灯泡只发射“一个光子”，该光子到分束器时，它可能通过分束器，射到手枪

扳机，开枪打死猫. 这个光子还有一定的几率被分束器反射，在这种情况下，猫可幸免，仍是活的. 怎样描述光子与猫的状态呢？光子与猫组成的系统的态矢量是

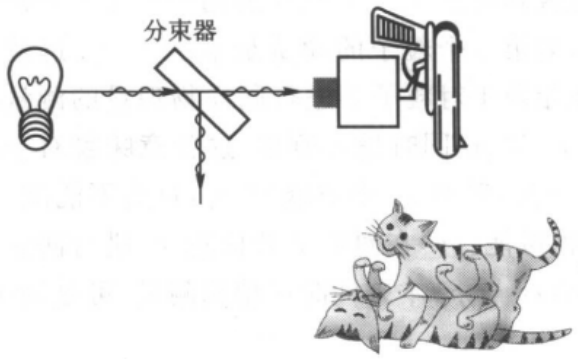


图 22.1 薛定谔猫

$$|\Psi\rangle=\alpha|\quad\rangle|\quad\rangle+\beta|\quad\rangle|\quad\rangle \tag{22.5}$$

其中光子对准手枪时，猫被击毙. 反之，猫则幸存. 该状态是光子状态与猫的状态(死、活)的叠加态. 这种态就是纠缠态——光子态与猫态纠缠在一起. 如果把枪与猫都放到一个暗箱里，我们并不知道这个猫是死是活. 猫有一定几率是活的，也有一定几率是死的，即猫处于亦生亦死的叠加态. 但是，一旦光子对状态(透射还是反射)进行了测量，猫的状态也就确定了(或活或死). 如果不对光子进行测量，猫就是亦死亦活的状态.

纠缠态的基本特性是处于纠缠态的系统就是一个整体，对其一个子系统进行测量，便会自动影响到其余子系统的状态，好像是“胳肢这个，那个就笑”. EPR 是典型的纠缠态.

22.2.2 EPR

1935 年，Einstein，Podosky 与 Rosen 对量子力学的完备性提出了质疑. 这就是以他们三人名字命名的 EPR. EPR 涉及到的核心概念恰恰是纠缠态.

EPR 的基本思想如下：假如有两个粒子组成的一个系统，这两个粒子的 x_1 与 p_1 不对易，x_2 与 p_2 不对易. 根据 Heisenberg 测不准原理，x_1 与 p_1 不能同时精确测量，x_2 与 p_2 也不能精确测量. 但是，容易验证，(x_1-x_2)与(p_1-p_2)是对易的，因此，它们有共同的本征态. 它们可以同时精确测量. 这样，我们可制备这样的量子态，使得 $x_1-x_2=a$，$p_1+p_2=0$. 假

想 x_1 与 x_2 之间的距离 a 非常之大，例如一个在月球，一个在地球. 按照人们“习惯的想法”对第 1 个粒子的测量也许不会对第 2 个粒子产生干扰. 这样“推想”下去：若测量出第一个粒子的位置 x_1，由 $x_1-x_2=a$ 可知第 2 个粒子的位置就应是 x_1-a. 同样若测量出第 1 个粒子的动量是 p_1，由 $p_1+p_2=0$ 可知第 2 个粒子的动量是 $p_2=-p_1$. 这就相当可信，对粒子 1 进行测量就相当于对粒子 2 进行同样物理量的测量. 但量子力学认为，人们不能对 x_1 与 p_1 同时进行测量. 这就意味着对 p_2 也不能精确测量了(前面 $p_2=-p_1$，若测 x_1 则不能测 p_1，自然不能测 $-p_1$ 即 p_2)EPR 认为，这只有两种可能：(a)在对粒子的位置 x_1 进行测量时，立刻干扰了对 p_2 的测量. (b)x_1 与 p_2 本来同时可精确测量，可是量子力学的描述还不够完备.

近年的实验确定证明了，对粒子 1 进行测量，也就等于同时测量了粒子 2 的物理量. 以后，把这样互相关联的一对粒子叫“EPR 对”.

玻姆(D. Bohm)给出了另一种形式的 EPR“思想实验”. 如果两个粒子构成一个系统，总自旋为 0，粒子 1 与粒子 2 的自旋方向相反. 当这两个粒子分开时，如果发现粒子 1 的自旋是 $+1/2$，那么粒子 2 的自旋应是 $-1/2$. 反之，如果测量出粒子 1 的自旋是 $-1/2$，那么粒子 2 的自旋定是 $+1/2$. 甚至当其中一个粒子在月球上时，另一个粒子在地球上时，假如有人在月球上测出那个粒子的自旋量 $+1/2$，那么我们就一定会看到地球上的这个粒子的自旋必是 $-1/2$. 反之，如果有人在月球上测出那个粒子的自旋量 $-1/2$，我们就一定会看到地球上这个粒子的自旋定是 $+1/2$.

这个二粒子系统的态矢量是

$$|\Psi\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2-|\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2) \tag{22.6}$$

上述的二粒子系统，如果两个粒子相距一定距离时仍有关联，这种特性叫非局域性，如果没有关联，则是局域性. 实践证明，非局域性是量子系统的基本属性.

22.2.3 Bell 不等式及 EPR 实验检验

1965 年，J. Bell 提出了一个不等式，用来检验局域性与非局域性. 从此，就可能把 EPR 问题从“思想实验”、科学争论变成可以用实验检验的问题.

假如有一对光子处于以下的纠缠态：

$$|\Psi\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_1|V\rangle_2-|V\rangle_1|H\rangle_2) \tag{22.7}$$

其中 H 表示水平偏振，V 代表垂直偏振. 当测得光子 1 处于水平偏振时，光子 2 一定是垂直偏振动. 反之亦然. 1969 年 Iauser 等给出了一种形式的 Bell 不等式，

$$S=|E(\alpha,\beta)-E(\alpha',\beta)+E(\alpha,\beta')+E(\alpha',\beta')|\leqslant 2 \quad (22.8)$$

其中 $E(\alpha,\beta)=\frac{1}{N}[C_{++}(\alpha,\beta)+C_{--}(\alpha,\beta)-C_{+-}(\alpha,\beta)-C_{-+}(\alpha,\beta)]$

我们对每个光子的偏振进行测量，有两种输出＋，－，$C_{++}(\alpha,\beta)$的意思是记光子 1 用 α 角测量得到＋与光子 2 用 β 角测量得到＋同时发生的几率，即相关.

然而，用量子力学计算的结果是，当 $\alpha=0°$，$\beta=22.5°$，$\alpha'=45°$，$\beta'=67.5°$时，上述不等式左边应该是 $2\sqrt{2}$.

1982 年，阿兰·艾斯派克等在巴黎用“光子对”进行了 EPR 实验，如图 22.2 所示. 他们用双通道探测器测量光子的偏振态.

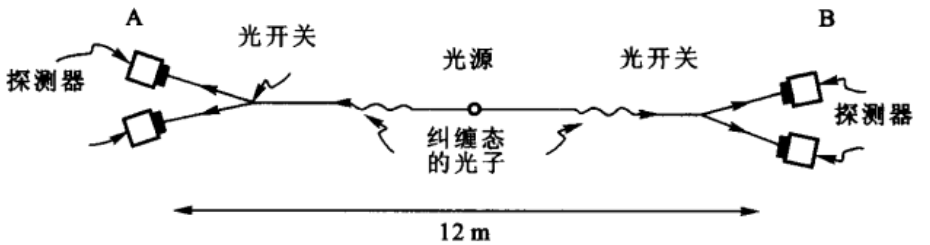


图 22.2 阿兰·艾斯派克的光子对实验

实验表明，在 A、B 两点探测到的光子的偏振状态的联合概率与量子力学的计算一致，从而支持了量子力学的非局域性概念. 在他们的实验中，A 与 B 距离达 12 m. 实验测得 Bell 不等式的 $S=2.697\pm0.015$.

此后，日内瓦的研究人员重新进行以上实验，改用两个光子沿着 10 km长的光纤跑. 两个光子分离后直到相距 10 km 时，二者仍像一个整体. 又一次确凿证明了非局域性(即量子关联).

22.2.4 纠缠态的制备

纠缠态是量子信息的基础. 纠缠态的应用包括：1)利用量子纠缠态和量子测量可以制备一系列非经典态，如薛定谔猫、纠缠相干态、在量子计算中作为量子比特的量子态、进行量子编码等. 2)量子纠缠态作为量子密码的传输载体，可以实现不可破译、不可窃听的保密通信. 3)应用纠缠态可实现量子态的远程传送(详见本章最后几节). 4)量子纠缠态能产生“鬼”干涉(衍射)，并在检验量子力学、量子计算机、量子信息处理方面有重要应用.

目前已由若干种实验技术可产生量子纠缠态，例如参变量下转换(见 22.6 节).

1996 年美国的 Monroe 等人在介观尺度上实现了薛定谔猫态，即纠缠态. $^9Be^+$ 的基态分为两条超精细能级 $^2s_{\frac{1}{2}}(F=2, m_F=-2)$ 和 $^2s_{\frac{1}{2}}(F=1, m_F=-1)$ 分别记为 $|\downarrow\rangle$ 和 $|\uparrow\rangle$. 首先用激光冷却技术使 $^9Be^+$ 质心运动处于谐振子离子势阱中的基态，内部态为 $|\downarrow\rangle$，然后使用 $\frac{\pi}{2}$ 激光脉冲，通过控制激光脉冲的时间可以使 $^9Be^+$ 的内部态在 $|\downarrow\rangle$ 和 $|\uparrow\rangle$ 之间发生拉比振荡. 同时交替使用微波场，可以控制 $^9Be^+$ 的质心运动，最后可以使 $^9Be^+$ 处于态：

$$|\Psi\rangle = |\downarrow\rangle|\alpha e^{-i\frac{\phi}{2}}\rangle + ie|\uparrow\rangle|\alpha e^{i\frac{\phi}{2}}\rangle \tag{22.9}$$

其中 $|\alpha e^{-i\frac{\phi}{2}}\rangle$ 和 $|\alpha e^{i\frac{\phi}{2}}\rangle$ 是 $^9Be^+$ 质心运动的相干态，是两个平均宽度为 7 nm 在空间相距为 80 nm 的波包. $^9Be^+$ 可以在两个相距为介观尺度的地方同时出现，这就对应于薛定谔猫佯谬中猫的死态和活态.

美国纽约州立大学石溪分校的 Friedman 等人在 2000 年又在超导环中观察到了薛定谔猫态，超导环同时处于由不同电流流过的状态，两个态电流的差值为 2～3 μA.

22.3 量子计算

以量子信息为基础的量子计算机目前还是一个美妙的梦想，但是已经取得了引人瞩目的进展，至少已演示了 5 qubit 或 7 qubit 的模型，完成了把 15 分解成 3×5 的艰巨任务. 量子计算机有非同寻常的优越性. 未来的量子计算机与现在的电子计算机相比，就像从算盘到计算机的飞跃. 本章介绍量子计算机的特点、优势、逻辑门的实现、量子算法等.

22.3.1 量子计算的物理基础

从现有计算机的发展趋势来看，也必须把量子力学引入计算机. 这是因为，Intel 公司的创始人莫尔(Gordon Moore)在 1965 年作过预言：计算机芯片中的晶体管的数量，每过 18 个月就会增加一倍. 这就是“莫尔定律”. 可是现有的芯片中，内部元件大约只有几个原子厚，不久就会到物理极限. 当元件大小只有一二个原子时，就必须考虑量子效应.

量子计算机涉及量子力学的若干最基本原理与特性.

(1) 量子态的叠加

量子力学的基本原理是线性叠加. 在量子计算机中将用量子位

(quantum bit 或 qubit)$|0\rangle$,$|1\rangle$来代替经典的二进位,这里的$|0\rangle$,$|1\rangle$可以是电子的上下两个自旋态、光子的两个偏振态或原子的两个超精细分裂能级. 与经典二进位不同的是,量子二进位除了纯粹的$|0\rangle$,$|1\rangle$外,还可以有它们的任意线性叠加态

$$|\Psi\rangle=\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle \tag{22.10}$$

其中$|\alpha|^2+|\beta|^2=1$.

量子计算的很多特性都与量子态的线性叠加有关.

量子力学中的薛定谔方程 $i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=H\Psi$ 是一个线性方程. 如果 Ψ_1,Ψ_2,L,Ψ_n 分别是方程的解,则它们的线性组合 $\Psi=c_1\Psi_1+c_2\Psi_2+L+c_n\Psi_n=\sum_n c_n\Psi_n$ 也是方程的解(c_1,c_2,L,c_n 是任意常数). 它的物理意义是:如果 Ψ_1,Ψ_2,L,Ψ_n 所描写的是体系可能的量子态,那么它们的线性叠加 Ψ 所描写的也是体系的一个可能的量子态. 对应于量子计算,这表示量子计算机可以同时代表经典计算机中的许多个态,使得大规模量子并行存储和计算成为可能.

(2) 相干性

对于量子态之间的干涉性,我们以双狭缝衍射实验为例进行简要分析:设 Ψ_1 和 Ψ_2 分别表示微观粒子从上、下狭缝到达屏幕的量子态,则 $\Psi=c_1\Psi_1+c_2\Psi_2$ 表示粒子穿过两个狭缝到达屏幕的量子态. 按照态叠加原理,在屏幕上某一点 P 出现的几率密度是

$$|\Psi|^2=|c_1\Psi_1|^2+|c_2\Psi_2|^2+c_1^*c_2\Psi_1^*\Psi_2+c_1c_2^*\Psi_1\Psi_2^* \tag{22.11}$$

上式说明:微观粒子穿过狭缝到达 P 点的几率密度一般不等于粒子穿过上狭缝到达 P 点的几率密度 $|c_1\Psi_1|^2$ 与粒子穿过下狭缝到达 P 点的几率密度 $|c_2\Psi_2|^2$ 之和,而是等于 $|c_1\Psi_1|^2+|c_2\Psi_2|^2+$干涉项. 衍射图案的产生证实了干涉项的存在. 由于量子态叠加时各态之间的相对位相差,在并行计算过程中出现干涉相长或相消,这是经典计算机的 Bell 态不具备的特性.

量子计算机的许多优越性都与相干性有关. 量子过程是概率性的,经典计算机也可以用概率性计算代替确定性计算. 与经典概率性计算不同,在量子计算中不是概率叠加,而是概率振幅叠加,振幅叠加是相干性的本质特性. 换句话说,这里存在着量子态之间的干涉效应.

然而由于与环境的作用等,量子态的相干性是衰减的. 如何解决这个"消相干"问题,是量子计算机最大的难题.

(3) 量子态演化

量子态按照幺正变换法则由体系的哈密顿量决定演化过程. 体系各

个态按照幺正变换同时演化，这相当于对$|\Psi\rangle$做幺正变换时，$|\Psi\rangle$的各个展开系数都变化，所以一次量子计算可作用在多个数据上.

(4) 纠缠态

量子纠缠态与量子计算的逻辑门设计、信息传输、量子算法有密切关系.

用量子二进位来表示整数，譬如10和5，则为

$$|10\rangle\rangle \equiv |1010\rangle = |1\rangle|0\rangle|1\rangle|0\rangle \tag{22.12}$$

$$|5\rangle\rangle \equiv |0101\rangle = |0\rangle|1\rangle|0\rangle|1\rangle \tag{22.13}$$

如果想用量子算法同时处理10和5，我们也可以取他们的叠加态

$$|10\rangle\rangle + |5\rangle\rangle \equiv |1010\rangle + |0101\rangle = |1\rangle|0\rangle|1\rangle|0\rangle + |0\rangle|1\rangle|0\rangle|1\rangle \tag{22.14}$$

这对于各量子二进位来说，就是纠缠态. 为了同时计算一个函数$f(x)$在$x=x_1,x_2,\cdots,x_n$等一系列位置的取值，我们也可以取更复杂的纠缠态. 设置x和$y=f(x)$为两个存储器，它们的量子态分别为$|x\rangle\rangle$和$|f(x)\rangle\rangle$，则下列纠缠态包括了该函数整体上的信息：

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n} |x_i\rangle\rangle \otimes |f(x_i)\rangle\rangle \\ &= |x_1\rangle|f(x_1)\rangle\rangle + |x_2\rangle|f(x_2)\rangle\rangle + \cdots + |x_n\rangle|f(x_n)\rangle\rangle\end{aligned} \tag{22.15}$$

(5) 量子态的不可完全测量和不可克隆

不属于被测力学量本征态的量子态，在测量时按几率幅的模方随机地坍缩到某个本征态上. 一次测量之后，该量子体系便坍缩到一个本征态上，不能再重复测量. 所以一般来说，一次测量不可能得到该量子态的全部信息，也不可能重复再测，因为它已经被破坏掉坍缩了. 所以，量子态是不可克隆的. 这就是量子态的不可克隆原理. 它使我们无法像在经典计算机里那样拷贝信息. 所以，在量子计算机里“读”和“写”的问题都得采用特殊的办法来解决.

22.3.2 量子计算的特色与优点

(1) 存储能力大

大家知道，在经典计算机中，信息是用二进制位存储的. 每位只能存一个数据，非0即1. n位的经典寄存器只能存n个数.

在量子计算机中，用量子态来代表信息，若用1 qubit(1位量子比特)，可以存储0，也可以存储1，也可以既存储0又存储1. 这就是说，它存储的是0与1的叠加. 即1 qubit可存2^1个一位的二进制数.

若用2 qubit，有四个独立的态矢$|00\rangle$，$|01\rangle$，$|10\rangle$，$|11\rangle$，各有不同的

取值几率. 即一个 2 位的量子寄存器可同时存储 2^2 个二位的二进制数.

一个 3 qubit，有八个独立的态矢，$|000\rangle$，$|001\rangle$，$|010\rangle$，$|011\rangle$，$|100\rangle$，$|101\rangle$，$|110\rangle$，$|111\rangle$. 三位寄存器可同时储存 2^3 个三位的二进制数.

以此类推，一个 n 位量子寄存器可同时存放 2^n 个 n 位的二进制数，相当于 2^n 个经典寄存器！

例如 $n=500$，一个 n 位量子寄存器可存 2^{500} 个数. 2^{500} 比宇宙中的原子总数还要多. 相比之下，500 位的经典寄存器只能存 500 个数. 这是天壤之别.

(2) 运算速度快

在经典计算机中，一个态只能代表一个数(二进制)，每次运算只能改变一个数值. 而对于量子计算机，n 位量子寄存器的态可存放 2^n 个数. 它的量子态为

$$|\Psi\rangle=c_1|\cdots\rangle+c_2|\cdots\rangle+\cdots+c_N|\cdots\rangle \tag{22.16}$$

注意 $|\Psi\rangle$ 共有 2^n 个系数！

量子计算对应幺正变换($\boldsymbol{U}$)，所以

$$|\Psi'\rangle=\boldsymbol{U}|\Psi\rangle=c_1'|\cdots\rangle+c_2'|\cdots\rangle+\cdots+c_N'|\cdots\rangle \tag{22.17}$$

其中 $N=2^n$.

这就是说，一次计算(一次幺正变换)，就改变了 N 个数. 这就是并行计算. 这样一次量子计算就相当于 2^n 次经典计算.

举个简单例子，若有一个 2 位的号码锁，每位用 0 和 1 来代表，共有 00，01，10，11 四种可能. 若用经典计算机的方案，平均需 4 次才能打开. 若用量子计算机，一次就能打开.

若有一个 500 位的号码锁，用经典计算机，需要 2^{500} 次才能打开. 但是，若用量子计算机，一次就可能打开！

有人估计，若对 400 位长的数进行因式分解，即使是用目前世界上最快的计算机也要 10 亿年，而人类历史才 300～400 万年. 若用量子计算机，只需很少时间.

(3) 可模拟量子力学体系

除了存储量大，运行速度超快，量子计算机另一方面的重要用途是用来模拟量子系统. 早在 1982 年，费曼就猜测，量子计算机可以用来模拟一切局域量子系统. 这一猜想，在 1996 年由 Lloyd 证明为正确的. 首先应指出，模拟量子系统是经典计算机无法胜任的工作. 作为一个简单的例子，考虑由 40 个自旋为 1/2 的粒子构成的一个量子系统，利用经典计算机来模拟，至少需要内存为 2^{40} MB，而计算其时间演化，就需要一个 $2^{40}\times 2^{40}$ 维

矩阵的指数，这一般来讲，是无法完成的. 而利用量子计算机，上述问题就变得轻而易举，只需要 40 个 qubit，就足以用来模拟. Lloyd 进一步指出，大约需要几百至几千个 qubit 即可精确地模拟一些具有连续变量的量子系统，例如格点规范理论和一些量子引力模拟. 这些结果表明，模拟量子系统的演化，很可能成为量子计算机的一个主要用途.

22.3.3 量子逻辑门

经典计算机是用电子电路作计算. 电子电路是由线性元件和非线性元件构成，线性元件独立地改变输入信号，而非线性元件则使经过它的输入信息发生相互作用. 电路通过极高的速度反复完成若干简单的线性和非线性任务来进行计算. 使信息位发生反转，是“非”(NOT)的逻辑操作：即 1 变为 0 或 0 变为 1. 另一种操作是“复制”(COPY)，也就是使第二个数据位的值与第一个相同，这两个操作被称为线性操作. 对两个数据位作“与”(AND)运算，则是非线性的逻辑操作：如果两个输入位均为 1，则使第三位也等于 1，其他任何一种情况均使第三位等于 0. 在这种情况下，输出取决于输入之间的某种相互作用. 执行这些操作的器件称为逻辑门. 如果一台数字计算机有线性逻辑门，如 NOT 门和 COPY 门，也有非线性逻辑门，如 AND 门，则它可以完成任何一种逻辑或算术任务. 对于量子计算机，同样的要求也是成立的.

量子逻辑门是量子计算机的最基本的构造单元之一. 它有两种相互作用的量子位：控制位和目标位，控制位保持不变，但它的状态决定目标位的演化. 如果控制位是$|0\rangle$，则目标位不发生任何改变；如果控制位是$|1\rangle$，则目标位将经历一个确定的变换(详见 22.4 节). 量子逻辑门与经典逻辑门具有本质上的不同：经典逻辑门输入态和输出态中的每一位都是经典信息(0 或 1)，不能输入叠加态. 一般情况下经过经典逻辑门的操作是不可逆过程. 而量子逻辑门的输入态和输出态是量子信息(量子位$|0\rangle$或$|1\rangle$)，并且输入态和输出态可以是量子位的叠加态，如$(|0\rangle-|1\rangle)/\sqrt{2}$. 如果控制位是$|0\rangle$和$|1\rangle$的叠加态，量子门的输出则是纠缠的态，也就是说，在一个非分离的态中，两个量子位的相关性很强. 输入态的叠加和输出态的纠缠是量子逻辑门区别经典逻辑门的基本特征. 这一基本特征说明量子计算为计算提供了更广阔的前景. 量子逻辑门作用于输入量用一个幺正算符 $\boldsymbol{U}$ 来描述，即输入量的态矢由$|\Psi\rangle$变成$|\Psi'\rangle=\boldsymbol{U}|\Psi\rangle$. 由于 $\boldsymbol{U}$ 存在逆矩阵，所以量子逻辑门能进行可逆运算.

下面以一位的 NOT 门为例来说明量子逻辑门的工作原理. 一位的

NOT 门能够利用光谱技术来实现. 自旋为 1/2 的粒子态能够被依赖于时间的磁场精确地操纵. 位的反转,即从自旋向上变成自旋向下,反之亦然. 它可用一个翻转脉冲(tipping pulse)来实现. 设一个孤立的自旋处于静磁场及含时的磁场的合磁场中,场的哈密顿量为

$$H=\frac{1}{2}g\mu\left[H_0\sigma_x+H_1\sigma_y P(t)\sin(\omega t)\right] \tag{22.18}$$

其中 $g\mu$ 是粒子的磁偶极矩. 静磁场 H_0 沿 z 轴方向,交流磁场脉冲的振幅 H_1 沿 y 轴方向,σ_x 和 σ_y 是 Pauli 自旋矩阵,$P(t)$是脉冲包络函数. 加上脉冲时,使交流场与两自旋之间产生谐振作用,$\hbar\omega=g\mu H_0$. 脉冲从初始 $t=0$ 到终止 $t=T$ 时,描述自旋向上⇔自旋向下的 2×2 矩阵有下列简单形式(不考虑位相因子):

$$U=\begin{pmatrix}\exp(\mathrm{i}\omega/2) & 0\\ 0 & \exp(-\mathrm{i}\omega/2)\end{pmatrix}g\begin{pmatrix}\cos(\Omega T/2) & -\sin(\Omega T/2)\\ \sin(\Omega T/2) & \cos(\Omega T/2)\end{pmatrix} \tag{22.19}$$

式中 $\Omega=g\mu H_1/4\hbar$. 由于 Ω 和 T 可以控制,一次 ΩT 可以为任一角度. 对于 180°的翻转脉冲,即 $\Omega T=\pi$,这个时间演化将完成一个 NOT 操作,初始时系统处于$|0\rangle$态,则翻转到$|1\rangle$态,反之亦然. 这时 $\boldsymbol{U}$ 可写成

$$\boldsymbol{U}_\pi=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \tag{22.20}$$

当 $\Omega T=\pi/2$,相当于自旋的方向转 90°,此时 $\boldsymbol{U}_{\pi/2}$ 为

$$\boldsymbol{U}_{\pi/2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \tag{22.21}$$

$$\boldsymbol{U}_{\pi/2}|0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle+|1\rangle) \tag{22.22}$$

$$\boldsymbol{U}_{\pi/2}|1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle-|0\rangle) \tag{22.23}$$

设初始时刻量子存储器处于状态$|00L\ 0\rangle$,现对存储器上各个位实施 $\boldsymbol{U}_{\pi/2}$的操作,则终态为

$$\begin{aligned}|\Psi'\rangle&=\boldsymbol{U}_{\pi/2}\otimes\boldsymbol{U}_{\pi/2}\otimes L\otimes\boldsymbol{U}_{\pi/2}|00L\ 0\rangle\\ &=\frac{1}{2^{n/2}}(|00L\ 0\rangle+|00L\ 1\rangle+|11L\ 1\rangle)=\frac{1}{2^{n/2}}\sum_{x=0}^{2^n-1}|x\rangle\end{aligned} \tag{22.24}$$

这里共做了 n 次操作,但产生了 2^n 个不同的态,这是非常可观的并行运算. 在经典计算机中,n 次基本操作只能改变一个存储器所代表的一个数字.

更复杂量子信息的传输可以采用与经典计算机逻辑门类比的方法,分解为一系列基本的过程. 这些基本的过程由简单的逻辑门单元构成,并

通过导线，使信息从一端运送到另一端. 经典计算过程中，导线运送位，而逻辑门对位实施明确的布尔运算. 在量子信息传输过程中，量子导线携带量子位而量子逻辑门实施幺正变换. 研究表明：所有的量子逻辑门能够由可任意操作的单个量子位逻辑门和两位逻辑门组合起来实现其功能. 对单个量子位的任意操作主要包括旋转操作、相移操作和翻转操作，其对应的幺正变换矩阵分别为：

$$R_x(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2} & \mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}\\ \mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix},R_y(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2}\\ -\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix},R_z(\alpha)=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\alpha}{2}} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\alpha}{2}}\end{pmatrix}$$

$$\Phi(\delta)=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}\end{pmatrix},\sigma_x=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \tag{22.25}$$

20世纪80年代，Toffoli提出了三位条件非门(three-bit conditional NOT gate)，也称Toffoli门. 它的功能是：a，b为控制位，只有$a=b=|1\rangle$时，c表示的位才发生翻转. 在此以后，Fredkin和Toffoli又提出一个可逆计算的逻辑门(简称Fredkin gate). 这是一个有三根输入线和三根输出线的设备. 其中有一根(设为a)设计为控制线，它的逻辑状态在通过该门时不改变，如果控制线的位是$|0\rangle$，则其余两根线(b，c线)的位也不发生改变，如果控制线的位是$|1\rangle$，则其余两根线的位相互交换. Fredkin门提出以后引起了人们的极大关注. 这是因为Fredkin门在逻辑运算中具有普遍意义，能够由NOT门和XOR门的组合来完成其功能，并且可以实现可逆运算. 1989年，G. J. Milburn提出一个实现Fredkin门的光学模型. H. F. Chau等人也使用两个一位量子门和7个2位量子门实现了Fredkin门.

下面的表格给出了Toffoli门和Fredkin门的真值表：

Toffoli门						Fredkin门					
INPUT			OUTPUT			INPUT			OUTPUT		
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1

22.3.4 量子算法

量子计算最重要的优点体现在量子并行运算上，特别突出的是经典计算机只能进行指数算法的问题，量子计算机有可能用多项式算法来完成.

举例来说，我们进行 4 位数乘 4 位数的乘法计算，最多只需二三十步(即步数是 4 的多项式)就行了，小学生也能在不长的时间里算完. 但是倒过来，4 位数与 4 位数的乘积是 8 位数，即几亿的数量级，给你一个上亿的数字 N 让你做因子分解，可就难了. 一般除了逐个用小于$\sqrt{N}$的素数试着去除它，别无其他什么妙法. 这样的素数有10^4，即上万个(4 在指数上)，一个一个去试，得花相当一段时间. 这个问题用现代计算机去算当然不成问题，那么给你一个 60 位的大数做因子分解，怎么样？ 在世界上最快的计算机每秒作10^{11}次运算，每天 86 400 s，每年约 3×10^7 s，不停地计算，可作 3×10^{18}次运算. 要作 $\sqrt{10^{60}}=10^{30}$次运算，约需 3×10^{11}年，宇宙年龄的 20 倍！然而量子计算机可望在一段很短的时间，譬如10^{-8} s 里解决问题.

人们普遍相信，大数的因子分解不存在经典的多项式算法(或者说，有效算法). 这一点在密码学中有着重要的应用. 1977 年 Rivest，Shamir 和 Adelman 三人发明的 RSA 公钥系统，就是利用两个大素数的乘积难以分解来加密的.

1994 年 Shor 等人提出了一种大数因子分解的量子多项式算法，引起了轰动. Shor 算法的核心是利用数论中的一些定理，将大数因子分解转化为求某个函数的周期. 现将 Shor 算法的梗概作一介绍. 设待因数分解的大数为 N，它的平方用二进制来表示有 L 位，即 $N^2<2^L<2N^2$. 选用的周期性函数为余函数：

$$f(x)=a^x \bmod N \tag{22.26}$$

这里 $a<N$，是任选的一个与 N 互素的整数，x 取从 0 到 2^L 的整数值，mod N 表示取前面的数 a^x 被 N 除的余数. 显然 $f(x)$所取的值是小于 N 的正整数，它是一个周期性的函数. 举例来说，令 $N=14$，取 $a=3$，则

$f(0)=1$	$f(6)=1$	$f(12)=1$
$f(1)=3$	$f(7)=3$	$f(13)=3$
$f(2)=9$	$f(7)=9$	……
$f(3)=13$	$f(6)=1$	
$f(4)=11$	$f(8)=11$	
$f(5)=5$	$f(11)=5$	

它的周期 $T=6$. 一般来说，对于大数 N，选定一个 a，若能求得 $f(x)=a^x \bmod N$ 中余函数的周期 T，设 T 为偶数(求得周期 T 为奇数，另选一个 a 重来)，则令 $A=a^{T/2}+1$，$B=a^{T/2}-1$，求 (A,N) 和 (B,N) 的最大公约数 C 和 D，他们就是 N 的素因子：$N=C\times D$. 例如当 $N=14$ 并选 $a=3$ 时，求得 $T=6$，于是 $A=28$，$B=26$，$C=7$，$D=2$，$N=7\times 2$.

虽然用量子计算机计算时，对于一个函数 $f(x)$ 我们可以取有如 $\sum_{i=1}^{n}|x_i\rangle\rangle\otimes|f(x_i)\rangle\rangle=|x_1\rangle|f(x_1)\rangle+|x_2\rangle|f(x_2)\rangle+\cdots+|x_n\rangle|f(x_n)\rangle\rangle$ 式所描述的那样的纠缠态，但在一次测量中我们只能得到非常有限的信息，此后该量子态就坍缩了. 但在 Shor 算法中我们只需有关 $f(x)$ 周期的信息，这可通过如下的傅里叶变换来提取.

取两组各有 L 量子比特的存储器，通过幺正变换实现纠缠态 $\sum_{i=1}^{n}|x_i\rangle\rangle\otimes|f(x_i)\rangle\rangle=|x_1\rangle|f(x_1)\rangle+|x_2\rangle|f(x_2)\rangle+\cdots+|x_n\rangle|f(x_n)\rangle\rangle$，式中 $f(x)$ 是由 $f(x)=a^x \bmod N$ 定义的余函数，$n=2^L$. 对存储器 x 作离散傅里叶变换：

$$|x\rangle\rangle=\frac{1}{\sqrt{2^L}}\sum_{k=0}^{2^L-1}e^{2\pi ikx/2^L}|k\rangle\rangle \tag{22.27}$$

于是两存储器里的纠缠态化为

$$|\Psi\rangle=\frac{1}{2^L}\sum_{x=0}^{2^L-1}\sum_{k=0}^{2^L-1}e^{2\pi ikx/2^L}|k\rangle\rangle\otimes|f(x)\rangle\rangle \tag{22.28}$$

这时第一个存储器(x 存储器)变为 k 存储器. 由于 $f(x)$ 的周期性，上式中许多项可以合并，而且大部分项相消或近似相消. 只有 k 取下列各值时系数(概率幅)明显不为 0：

$$k=\left[m\frac{2^L}{T}\right],\quad (m=0,1,\cdots,T-1) \tag{22.29}$$

式中 T 是 $f(x)$ 的周期，方括号表示取向上靠拢的整数. 因此除 $k=0$ 外

$$\frac{2^L}{k}\approx\frac{T}{m},\quad (m=1,\cdots,T-1) \tag{22.30}$$

以 $N=14$、$T=6$ 的例子来说，$N^2=196$，需要取 $L=8$，$2^L=256$，$2^L/T=42.667$，系数(概率幅)明显不为 0 的 k 值有

$k=0,[42.667]=43,[85.333]=86,128,[170.667]=171,[213.333]=214$

这些是对 k 存储器进行测量时，实际上可能测到的 k 的本征值. 要想求周期 T，就反过来计算 $\frac{2^L}{k}$，除 $k=0$ 外

$\frac{2^L}{k}=\frac{256}{43}=5.953\approx 6$，$\frac{256}{86}=2.977\approx\frac{6}{2}$，$\frac{256}{128}=2=3$，$\frac{256}{171}=1.494\approx\frac{6}{4}$，$\frac{256}{214}=1.196\approx\frac{6}{5}$

从若干个这样的数值不难推算出 $T=6$ 来.

在量子计算机中 Shor 算法的每一步骤都是可以通过多项式算法来完成的. 所以，在量子计算机中 Shor 算法是有效的算法. 如果量子计算机能够实现，世界上许多保密系统将受到严重的威胁.

22.3.5 量子纠错

不管是经典信息还是量子信息，在存储、传送和运算过程中都有可能发生错误. 在经典计算中，有纠错码以及恢复消散的符号的操作，它们可以有效的防止和纠正错误. 而在量子计算机中，由于波函数可认为是连续的，没有有效的方法来检测或纠正错误，并且量子及三级的错误极易发生，如初始时细微初始条件错误及幺正变换细微错误等. 用冷却的线性囚禁粒子进行量子计算时，激光脉冲也会导致消相干. 在量子计算中，各种纠错技术必须能使量子态叠加及纠缠态免遭破坏.

量子计算和量子计算机中最严重最明显的问题是消相干或解相干(dephasing). 解相干是量子系统与它的环境发生纠缠时量子态所产生的一种随机行为. 由于量子系统不是完全隔离于它的环境，周围器件的量子动力学规律则与量子计算机的运作有关，其结果将使得量子计算机的演化不是幺正变换. 量子计算的路径在计算开始是分离的，最后再组合在一起. 在这些路径上，位相相干性的损毁将破坏量子计算中的干涉相长和干涉相消. 为了有效的进行量子计算，解相干的时间(即量子系统保持相干性的时间)必须远大于进行量子计算的时间.

一个理想的想法是生产一种机器，它能完全隔离于外部环境. 但在事实上，量子干涉是相当灵敏的，它不可避免的与环境相耦合. 值得庆幸的是，随着实验手段和技术的改进，可以减少解相干，如利用精密量子物理实验改善量子系统与它的环境的隔离程度，以达到有较长的解相干时间，从而增大实现有用量子计算的可能性.

值得一提的是，宏观的量子系统如超导金属或玻色-爱因斯坦凝聚，并不会被消相干所毁坏，这是一个值得注意的研究方向.

围绕消相干问题，已经有人提出了一个精细的方案，即利用监视器(watchdog)策略. 由于自发发射是产生解相干的主要原因，我们时刻监视它并纠正它引起的消相干，使量子位被破坏时立即恢复原量子相干性.

所有这些方案依赖于多余信息(量子位)的作用.我们给单个量子位进行编码时,实际上是利用三个或更多的量子位态(|0⟩或|1⟩)进行编码.当一个量子位偶然被翻转(|0⟩变成|1⟩或|1⟩变成|0⟩)时,将由灵敏的监视器检测出来并纠正它.对于多粒子的纠缠态,监视器检测的微小偏差也将导致附加的解相干,因此纠错码的实现将变得越来越重要.

P. W. Shor 提出了一个在量子计算机存储器中减少解相干的纠错方案.该方案存放 k 个量子位的任意态时,使用 $9k$ 个量子位进行编码,即存储一个量子信息(量子位)时,使用 9 个量子位的纠缠进行编码,这 9 个量子位分为 3 组.它能纠正 9 个量子位其中一位所发生的错误.Laflamme 等提出使用 5 个量子位纠错方案,该方案的特点是使用一个线路来说明纠错过程,并通过检查一般性的一位错误,来恢复量子信息.

22.3.6 展望

自从提出量子计算的概念,一些物理学家和计算机专家就开始考虑用什么物理系统作量子逻辑门,如光学 Fredkin 门、极化光子等.近几年在实验上实现了逻辑门的结果有:利用量子点中的电子、离子阱中的粒子、Ramsey 原子干涉术、高精细光学共振与原子耦合系统以及核磁共振 NMR.实际应用于量子计算的一些系统,如中性原子与高精细微波或光学腔作用受激的电子态、原子核自旋和被囚禁的离子的研究已取得了阶段性的成果.

近来,激光冷却及绝热隔离技术取得了长足的进步,气体的玻色-爱因斯坦凝聚方面取得的成就就是一个成功的例子.这促使我们想到保持量子系统与环境足够好的隔离较长时间,以便操纵几个量子位进行至少几个步程的运算是切实可行的.

实现量子计算机目前尚处于初始阶段.像 Shor 提出的质因子分解,或许需要数千个量子位进行上百次操作,现在来说还是很遥远的事.然而,人们对量子计算还是表现出了浓厚的兴趣,因为即使是几位的量子计算,在进行 Bell 测量中也是非常有用的,能用来完成量子远距传递,将一个未知的量子态传递到遥远的地方.如果量子计算机能达到 10 个量子位的水平,量子计算机有能力实现 Schumacher 量子编码,有利于高效率量子密码的实现.量子密码术和量子信息处理密切相关,在密码技术和保密通讯等方面将获得应用.如果达到 100 个量子位的水平,量子计算机将为噪声量子密码链(noisy quantum cryptographic link)起着转发器(repeater)的作用.还可能在相当遥远的两个局域产生“EPR 对”,提供对量子理

论的新的严格的检测.

量子计算和量子计算机涉及量子态的制备、控制、相干演化以及纯量子态测量四个过程. 这四个过程中还有大量的理论和实验难题没有解决，有待进一步研究. IBM 已演示了 5 个量子比特量子计算模型. 还有人用 7 个量子比特实现了把 15 分解成 3×5. 中国科学家也演示了量子计算模型.

22.4 量子网络及其应用

对于经典信息，1 bit 对应于具有贝尔态 0 和 1 的经典系统. 而量子比特——qubit 对应于二态量子系统，以 $|0\rangle$，$|1\rangle$ 作为计算基(computational basis). 例如前已指出的光子偏振、自旋为 1/2 的粒子等.

量子逻辑门(quantum logic gate)是基本的器件. 其作用是进行幺正变换. 它在量子计算、量子传态实验中都有重要的作用. 最重要的量子逻辑门是 Hadamard 门(H 门)和 C-Not 门(quantum controlled-Not gate).

22.4.1 H 门与 C-Not 门

H 门与 C-Not 门的作用如图 22.3 所示

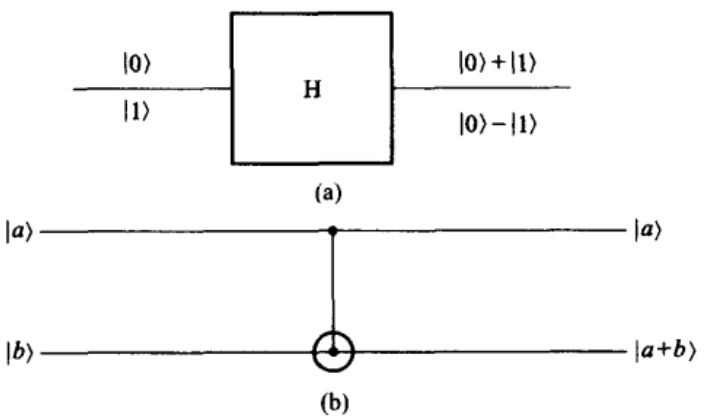


图 22.3 H 门与 C-Not 门的作用

(a)H 门 (b)C-Not 门

这个图的含义就是 H 等价于如下的幺正变换，

$$|0\rangle\rightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle+|1\rangle)$$
$$|1\rangle\rightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle-|1\rangle) \tag{22.31}$$

C-Not 门的作用是对$|a\rangle|b\rangle$进行如下的变换

$$\begin{aligned}&|0\rangle|0\rangle\rightarrow|0\rangle|0\rangle\\&|0\rangle|1\rangle\rightarrow|0\rangle|1\rangle\\&|1\rangle|0\rangle\rightarrow|1\rangle|1\rangle\\&|1\rangle|1\rangle\rightarrow|1\rangle|0\rangle\end{aligned}\tag{22.32}$$

注意，C-Not 作用于$|a\rangle|b\rangle$时，只有 $a=1$ 时，它才把$|b\rangle$变为 $\bar{b}$，$\bar{b}$ 即 $b=0$ 时 $\bar{b}=1$，$b=1$ 时 $\bar{b}=0$. 若$|a\rangle|b\rangle$中，$a=0$，C-Not 对$|a\rangle|b\rangle$没有作用.

22.4.2 量子网络

考虑如图 22.4 所示的量子网络，即先用 H 门作用，然后再用 C-Not 门作用.

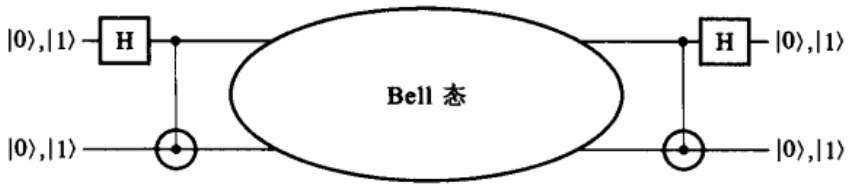


图 22.4 量子网络

(1) 若输入是$|0\rangle|0\rangle$

$$\mathrm{H}:|0\rangle|0\rangle\rightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle+|1\rangle)|0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|0\rangle+|1\rangle|0\rangle)\tag{22.33}$$

$$\text{C-Not}:\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|0\rangle+|1\rangle|0\rangle)\rightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|0\rangle+|1\rangle|1\rangle)\equiv|\Phi^{+}\rangle\tag{22.34}$$

(2) 若输入是$|1\rangle|0\rangle$

$$\mathrm{H}:|1\rangle|0\rangle\rightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle-|1\rangle)|0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|0\rangle-|1\rangle|0\rangle)\tag{22.35}$$

$$\text{C-Not}:\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|0\rangle-|1\rangle|0\rangle)\rightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|0\rangle-|1\rangle|1\rangle)\equiv|\Phi^{-}\rangle\tag{22.36}$$

(3) 若输入是$|0\rangle|1\rangle$

$$\mathrm{H}:|0\rangle|1\rangle\rightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle+|1\rangle)|1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|1\rangle+|1\rangle|1\rangle)\tag{22.37}$$

$$\text{C-Not}:\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|1\rangle+|1\rangle|1\rangle)=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|1\rangle+|1\rangle|0\rangle)\equiv|\Psi^{+}\rangle\tag{22.38}$$

(4) 若输入是$|1\rangle|1\rangle$

$$\mathrm{H}:|1\rangle|1\rangle\rightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle-|1\rangle)|1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|1\rangle-|1\rangle|1\rangle) \tag{22.39}$$

$$\text{C-Not}:\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|1\rangle-|1\rangle|1\rangle)\rightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|1\rangle-|1\rangle|0\rangle)\equiv|\Psi^{-}\rangle \tag{22.40}$$

这样,将 H、C-Not 作用于$|a\rangle|b\rangle$,我们就得到了四个最大纠缠的 Bell 态:

$$|\Psi^{\pm}\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|1\rangle\pm|1\rangle|0\rangle) \tag{22.41}$$

$$|\Phi^{\pm}\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|0\rangle\pm|1\rangle|1\rangle) \tag{22.42}$$

22.4.3 Bell 态的测量

用 H 门和 C-Not 门还可以进行 Bell 态的测量,这相当于 H 和C-Not 的示意图 22.4 的右半边的操作,即先把 C-Not 作用到 Bell 态,再用 H 作用. 例如

$$|\Psi^{+}\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|1\rangle+|1\rangle|0\rangle) \tag{22.43}$$

$$\text{C-Not}:|\Psi^{+}\rangle\rightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|1\rangle+|1\rangle|1\rangle) \tag{22.44}$$

$$\mathrm{H}:\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|1\rangle+|1\rangle|1\rangle)\rightarrow\frac{1}{2}((|0\rangle+|1\rangle)|1\rangle+(|0\rangle-|1\rangle)|1\rangle)=|0\rangle|1\rangle \tag{22.45}$$

同样,先后经过 C-Not 和 H 作用之后,

$$\begin{aligned}|\Psi^{-}\rangle&\rightarrow|1\rangle|1\rangle\\|\Phi^{+}\rangle&\rightarrow|0\rangle|0\rangle\\|\Phi^{-}\rangle&\rightarrow|1\rangle|0\rangle\end{aligned} \tag{22.46}$$

这就是对 Bell 态进行测量的基本思路. Bell 态的测量的实质就是把纠缠态分解,即把 Bell 态投影到 4 个 Bell 基上. 这 4 个 Bell 基是

$$|0\rangle|1\rangle,|1\rangle|1\rangle,|0\rangle|0\rangle,|1\rangle|0\rangle \tag{22.47}$$

这样,Bell 测量就约化为两个单粒子测量.

以上方面容易推广到 3 qubit 的情况. 3 qubit 的情况,有 8 个极大纠缠的 3 粒子态,即 GHz 态. 同样,也可反过来,把 GHz 测量约化为 3 个单粒子测量.

一般来说,任何高于 2 qubit 的情况,都可用单 qubit 算符和 C-Not 门进行 Bell 测量. 这是因为,C-Not 门与单 qubit 算符一起,可以组成完

备的量子门，由此可以建立任何幺正算符.

单 qubit 门有：

量子非门 $\boldsymbol{X}$，以$|0\rangle$、$|1\rangle$为基的矩阵表示是

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \tag{22.48}$$

其作用是 $\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta\\ \alpha\end{pmatrix}$，即 $\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle\xrightarrow{\boldsymbol{X}}\beta|0\rangle+\alpha|1\rangle$.

Z 门：

$$\boldsymbol{Z}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \tag{22.49}$$

其作用是$|0\rangle$不变，将$|1\rangle$变为$-|1\rangle$.

还可通过$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\end{pmatrix}$完成“相移”操作，即

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\end{pmatrix}. \tag{22.50}$$

22.5 纠缠态分析的实际方法

虽然用量子网络可对纠缠态进行处理，若想在实验上实现却非易事. 下面介绍一种具体的实验方法.

Weinfurter 等提出了利用分束器的双光子干涉法. 进行 Bell 态的分析或测量. 如图 22.5 所示从量子力学来看，分束器对输入光的作用如下：

$$\begin{aligned}|a\rangle&\rightarrow\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}|c\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}|d\rangle\\ |b\rangle&\rightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}|c\rangle+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}|d\rangle\end{aligned} \tag{22.51}$$

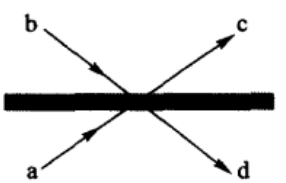


图 22.5 分束器的反射和透射率都是 50%，a 与 b 代表两个输入光，c 和 d 代表输出光

其中$|a\rangle$代表输入光束 a 的量子态，其余类推. 上式中的因子 $1/\sqrt{2}$代表分束器的透射率与反射率各为 50%，激光子以相等的几率(50%)出现在输入的 c 端与 d 端. 式中的因子 i 代表在半透镜上反射时发生位相的跳跃，这与幺正性是对应的. 特别注意，标准的分束器不改变光子的偏振态.

以下考虑光子 1 在 a 处入射，光子 2 在 b 处入射. 假设光子 1 的偏振态是

$$\alpha|H\rangle_1+\beta|V\rangle_1$$

光子 2 的偏振态是

$$\gamma|H\rangle_2+\delta|V\rangle_2$$

其中 H 和 V 分别代表水平偏振与垂直偏振，并且 $|\alpha|^2+|\beta|^2=1$，$|\gamma|^2+|\delta|^2=1$. 光子 1 与光子 2 都有 $P=0.5$ 的几率被分束器反射或透射.

这样共有以下 4 种情况(如图 22.6 所示).

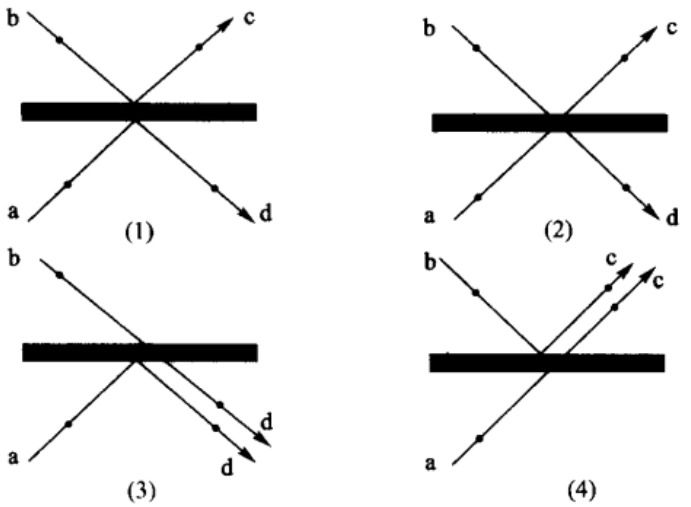


图 22.6 两个光子入射到分束器共有 4 种可能的情况

(1) 两个光子各从一边反射，c 和 d 路径都有位相的跳跃. 这种情况的几率是 $P=1/4$.

(2) 两个光子都透射.

(3) 从 a 入射的光子反射，从 b 入射的光子透射.

(4) 从 a 入射的光子透射，从 b 入射的光子反射.

以上每种情况发生的几率各为 $P=1/4$. 总结起来，两个光子入射到分束器以后，两个光子各在一边的几率是 $P=1/4+1/4=0.5$. 两个光子都在下边的几率是 $P=1/4$. 两个光子都在上边的几率也是 $P=1/4$.

经典情况，粒子是可再分的，不发生干涉，而是有四种情况：

(1) 入射之后，二个粒子各在一边的几率是 $P=1/4+1/4=0.5$，即第一、二种情况.

(2) 两个粒子都在下边，$P=1/4=0.25$.

(3) 两个粒子都在上边，$P=1/4=0.25$.

现在考虑量子力学情况，光子是不可区分的. 假设光子有相同的频率，在相同时间到达. 在这种情况下，不能决定哪个入射光子出现在分束器的哪边. 必须考虑这些不同可能性的振幅的相干叠加. 为了说明 Bell

态分析器是怎样工作的，让我们考虑如下的输入态

$$|\Psi_i\rangle=(\alpha|H\rangle_1+\beta|V\rangle_1)|a\rangle_1\cdot(\gamma|H\rangle_2+\delta|V\rangle_2)|b\rangle_2 \tag{22.52}$$

其中第一个因子代表第 1 个光子的偏振态是$(\alpha|H\rangle_1+\beta|V\rangle_1)$，而且是从 a 输入.

将(22.52)式代入(22.53)的态变为

$$|\Psi_f\rangle_{12}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|H\rangle_1+\beta|V\rangle_1)(\mathrm{i}|c\rangle_1+|d\rangle_1)\cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma|H\rangle_2+\delta|V\rangle_2)(|c\rangle_2+\mathrm{i}|d\rangle_2) \tag{22.53}$$

应该指出，通过分束器之后，光子 1 与光子 2 是不可能区分的了. 双光子态既包括空间部分又包括自旋部分，双光子态必须满足玻色统计. 这意味着在交换光子 1 和光子 2 时，输出的物理态必须是对称的. 因此，必须把$|\Psi_f\rangle_{12}$对称化，也就是应该把“交换波函数”$|\Psi_f\rangle_{21}$也包括进去，

$$|\Psi_f\rangle_{21}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|H\rangle_2+\beta|V\rangle_2)(\mathrm{i}|c\rangle_2+|d\rangle_2)\cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma|H\rangle_1+\delta|V\rangle_1)(|c\rangle_1+\mathrm{i}|d\rangle_1) \tag{22.54}$$

因而最后输出态应该是

$$|\Psi\rangle_f=\frac{1}{\sqrt{2}}(|\Psi_f\rangle_{12}+|\Psi_f\rangle_{21}) \tag{22.55}$$

将$|\Psi_f\rangle_{12}$与$|\Psi_f\rangle_{21}$的表达式代入，得

$$\begin{aligned}|\Psi\rangle_f=\frac{1}{2\sqrt{2}}[&(\alpha\gamma+\beta\delta)(|H\rangle_1|H\rangle_2+|V\rangle_1|V\rangle_2)\cdot\mathrm{i}(|c\rangle_1|c\rangle_2+|d\rangle_1|d\rangle_2)\\&+(\alpha\gamma-\beta\delta)(|H\rangle_1|H\rangle_2-|V\rangle_1|V\rangle_2)\cdot\mathrm{i}(|c\rangle_1|c\rangle_2+|d\rangle_1|d\rangle_2)\\&+(\alpha\delta+\beta\gamma)(|H\rangle_1|V\rangle_2+|V\rangle_1|H\rangle_2)\cdot(|d\rangle_1|c\rangle_2-|c\rangle_1|d\rangle_2)\\&+(\alpha\delta-\beta\gamma)(|H\rangle_1|V\rangle_2-|V\rangle_1|H\rangle_2)\cdot(|d\rangle_1|c\rangle_2-|c\rangle_1|d\rangle_2)]\end{aligned} \tag{22.56}$$

正像后边所表明的那样，方程(22.57)允许我们把双光子态投影到如下的 4 个偏振纠缠态中的两个态：

$$|\Psi^{\pm}\rangle_{12}=\frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_1|V\rangle_2\pm|V\rangle_1|H\rangle_2)$$
$$|\Phi^{\pm}\rangle_{12}=\frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_1|H\rangle_1\pm|V\rangle_1|V\rangle_2) \tag{22.57}$$

比较(22.57)式与(22.58)式可知，$|\Psi_f\rangle$的第一项对应$|\Phi^+\rangle_{12}$，输出的两个光子的偏振相同(见$|H\rangle_1|H\rangle_2-|V\rangle_1|V\rangle_2$)，并且两个光子可都在分束器的这边 c 或另一边 d(见$\mathrm{i}(|c\rangle_1|c\rangle_2+|d\rangle_1|d\rangle_2)$)，$|\Psi_f\rangle$的第二项

对应$|\Phi^-\rangle_{12}$. $|\Psi_f\rangle$的第三项对应$|\Psi^+\rangle_{12}$，输出的两个光子的偏振不同(见$|H\rangle_1|V\rangle_2+|V\rangle_1|H\rangle_2$)，两个光子可同时出现在 c 边或 d 边(见 i$|c\rangle_1|c\rangle_2+|d\rangle_1|d\rangle_2$). $|\Psi_f\rangle$的算符第 4 项对应$|\Psi^-\rangle_{12}$，输出的两个光子的偏振相互垂直(见$|H\rangle_1|V\rangle_2-|V\rangle_1|H\rangle_2$)，并且两个光子各在分束器的一边(见$|d\rangle_1|c\rangle_2-|c\rangle_1|d\rangle_2$). 以上 4 种情况如图 22.7 所示：

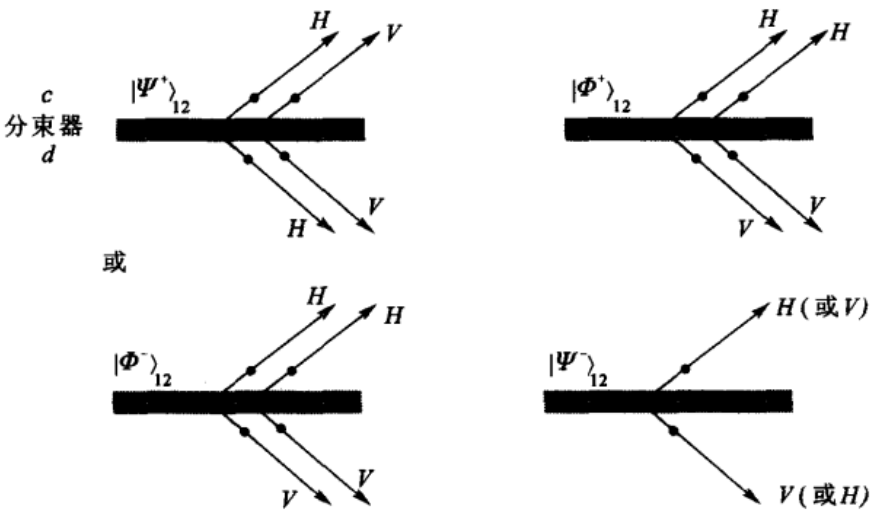


图 22.7 Bell 态测量

比较以上四种情况，可知$|\Psi^-\rangle_{12}$是唯一的情况，只有$|\Psi^-\rangle$对应的情况才有两个输入光子各在分束器一边. 因此，只要在分束器两边各放一个探测器，如果这两个探测器都同时得到了同样的计数，便可从 4 个 Bell 态$|\Psi^\pm\rangle_{12}$和$|\Phi^\pm\rangle_{12}$中识别出$|\Psi^-\rangle_{12}$.

$|\Psi^+\rangle_{12}$也有特点，即输出的两个光子的偏振不同，偏振方向相互垂直. 如果在分束器两边的输出位置各放置一个“双道偏振探测器”，一道测 H 偏振，另一道测 V 偏振，如果两边的探测器能测到“符合计数”(coincidence count)，则可从 4 个 Bell 态$|\Psi^\pm\rangle_{12}$与$|\Phi^\pm\rangle_{12}$中识别出$|\Psi^+\rangle_{12}$.

这就是进行 Bell 态测量的方法. 用此方法，可以从 4 个 Bell 态中识别出两个 Bell 态. 当然，人们还可把 Bell 态测量推广到其他情况.

22.6 用参量下转换产生偏振纠缠态的光子对

本节介绍用 BBO 晶体实现参量下转换以产生偏振纠缠的光子对. 我国青年科学家潘建伟等完成的世界上第一个量子态远程传输实验就是采用了这种技术.

利用参量下转换可以产生纠缠光子对，而且有相当高的强度和相当好的纯度.

在下转换过程中，使用非中心对称的非线性晶体. 在这种晶体内，一个入射的光子变成两个光子. 产生的光子比入射的光子频率低，故称为下转换. 当然，在该晶体内部，能量守恒与动量守恒条件还是满足的.

下面具体介绍用 type-Ⅱ型参量下转换产生偏振纠缠光子对的技术. 在该实验中，使用非线性晶体 BBO(即 beta-barium-borate，偏硼酸钡). 中国科学家生长的 BBO 晶体风行世界多个研究机构.

BBO 是单轴各向异性晶体，e 光(非常光)在晶体内的折射率与方向有关，

$$n(\theta)=\frac{n_{\mathrm{o}}n_{\mathrm{e}}}{\sqrt{n_{\mathrm{e}}^2\cos^2\theta+n_{\mathrm{o}}^2\sin^2\theta}}$$

其中 θ 是波矢 k 与晶体光轴的夹角. BBO 是负晶体，$n_{\mathrm{o}}>n_{\mathrm{e}}$.

参量下转换过程中，波矢必须满足相位匹配条件

$$\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2=\boldsymbol{k}_{\text{泵}}$$

如果两个出射光的偏振相同，相位匹配条件为 type-Ⅰ型匹配. 如果两个出射光的偏振互相垂直(分别为$|H\rangle$和$|V\rangle$)，其相位匹配条件称为 type-Ⅱ型相位匹配. 对于 BBO 这样的负晶体，入射的泵浦光应是 e 光. 所以，type-Ⅱ型相位匹配条件为

$$\boldsymbol{k}_{\mathrm{e}_1}+\boldsymbol{k}_{\mathrm{o}_2}=\boldsymbol{k}_{\mathrm{e}_{\text{泵}}}$$

其中 $k=\omega n/c$.

在一个入射光子在 BBO 晶体中产生的参量下转换过程中，产生的两个光子的偏振方向相互垂直，见图 22.8. 通过相位匹配条件计算光子的发射方向，可知每种偏振的光子各发射到一个光锥内，使得不同偏振的两个光子的动量之和等于一个泵浦光子的动量，即动量守恒.

这样，在光锥内部，每个单个光子的发射方向是不确定的，但是一旦其中一个光子的发射方向确定下来，在另一个光锥内的对应光子的发射方向也就严格确定了. 总的量子态是一对“发射模”的叠加态.

在实验中，实验上所用的 BBO 晶体是按特定方向切割的，保证两个光锥能有一部分相交. 这样，在两个光锥相交的范围内，沿同一方向的光子的偏振态是不确定的，只知道光子对中的两个光子必须有相互垂直的偏振. 在图 22.8 中所示的盒状的壳层内部，可以满足纠缠态的所有必要条件. 分别测量每个光子的偏振，测量结果是无规的，即有相等的几率处于水平偏振与垂直偏振. 然而，一旦光子 A 的偏振被测量，另一个光子 B

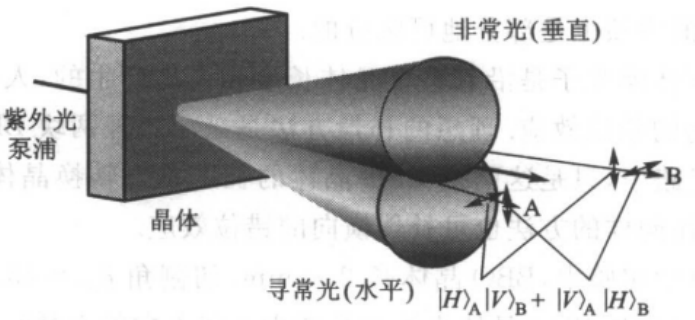


图 22.8 Type-Ⅱ型参量下转换

在 BBO 晶体内，一个入射的泵浦光自发地衰变成两个光子. 下转换产生的这两个光子的偏振方向互相垂直. 其中两种偏振的光子各发射到一个光锥内. 上边光锥内的光子是垂直偏振的(用 V 表示)，下边光锥内的配对光子是水平偏振的(用 H 表示). 在这两个光锥相交的方向上，这两个光子的偏振是不确定的. 我们所知道的只是这一对光子的偏振态不同，从而导致光束 A 与光束 B 中的光子对处于偏振纠缠态.

的偏振也就确定是与光子 A 的偏振是正交的. 选择适当的基矢，例如 $|H\rangle$ 与 $|V\rangle$，从两束光 A 和 B 出来的光子对的态就应是 $|H\rangle|V\rangle$ 与 $|V\rangle|H\rangle$ 的叠加态，即纠缠态

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_A|V\rangle_B+e^{i\alpha}|V\rangle_A|H\rangle_B) \tag{22.58}$$

其中相对相位 α 来自晶体的双折射，而总的相位移动已略去了.

应用另外一个附加的双折射“相移器”(或者稍稍转动下转换晶体 BBO)，相位 α 可达到任何希望的数值，例如 0 或 π. 多少有些吃惊的是，把一个光路中的 1/4 波片旋转 90°就可使净的位相移(net phase shift)为 π. 与此相似，在一个光路中的半波片可用于把水平偏振变为垂直偏振或者相反. 这样就可以很容易地产生 4 个 EPR－Bell 态中的任何一个态.

由于晶体 BBO 有双折射性，这使得产生纠缠态更复杂一些. 这是因为在晶体内，寻常光与非常光的速度不同，并且沿不同的方向传播(即便它们从晶体出射后是同轴的). 对于在入射端面处的光子对，上式中的两项的纵向及横向偏移最大，这样就需要一个相对的时间延迟 $\delta T=L\left(\frac{1}{v_o}-\frac{1}{v_e}\right)$，其中 L 是 BBO 晶体的长度，v_o 和 v_e 分别是 o 光和 e 光的群速，而相对的距离移动是 $d=L\ (tg\rho)$，其中 ρ 是在晶体内 o 光与 e 光的夹角. 如果 $\delta T\geqslant\tau_c$，τ_c 是下转换光的相干时间(coherence time)，上式中的两

项将是在原则上可区分的，从而观察不到干涉. 类似地，如果 d 大于相干宽度，式中的两项也是部分地可区分的.

由于下转换光子是沿着整个晶体长度相干地产生的，人们就可以完全补偿纵向的错位效应. 理想的补偿方法是采用另外两块 BBO 晶体，各放在一个光路中，只是这两块 BBO 晶体的长度是下转换晶体 BBO 的长度的一半. 用同样的方法也可补偿横向的错位效应.

在具体的实验中，BBO 晶体长 2.0 mm，切割角 $\theta_{pm}=43.5°$（θ_{pm} 是位相匹配角，也就是 BBO 晶体光轴与泵浦光入射方向的夹角），这样才能保证下转换的两个光锥有足够好的交叉. 两个光锥的轴的夹角是 5°. 横向错位 $d=0.2$ mm 小于相干泵浦光束的宽度（2 mm）. 然而，必须对纵向错位进行补偿. 由于在实验中用的 BBO 晶体长度是 2.0 mm，产生的 $\delta T=260$ fs，而 τ_c 大约是同样数量级. 为了进行补偿，按上述方法，在每个光路中各放一个长度为 1 mm 的 BBO 晶体，其后放一个半波片以便把水平偏振变为垂直偏振，或者反过来.

22.7 量子态远程传输的原理

远程传输（teleportation）有点像中国古代小说中讲到的神功“土遁”：一个人（“土行孙”）在瞬间遁地消失，却在瞬间又在一个遥远的地方出现.

量子态远程传输的基本问题是：织女和牛郎各在银河的一边. 他们每人身边各有一个光子. 织女身边的光子处在量子态 $|\Psi\rangle$，她想把这个量子态传给牛郎身边的另一个光子，使之也处于量子态 $|\Psi\rangle$. 在这个过程中，织女并没有把光子传送过银河，但却把量子态 $|\Psi\rangle$ 传过银河，即仅仅是传送量子态，所以叫“离物传态”或量子态的远程传送. 由于量子态可代表信息，所以这是量子通信的奇迹.

织女的英文名字叫 Alice，牛郎的英文名字叫 Bob. 大约在 1993 年，Bennet 交给他们一个离物传态的秘诀，关键是让 Alice 与 Bob 各拥有纠缠态的光子对中的一个光子.

Bennet 的方案如下（如图 22.9）：

（1）制备一个初始光子，而光子 1 处在某一未知的偏振叠加态

$$\begin{aligned}&|\Psi\rangle_1=\alpha\,|H\rangle_1+\beta\,|V\rangle_1\\&|\alpha|^2+|\beta|^2=1\end{aligned}\tag{22.59}$$

（2）制备纠缠态的光子对——光子 2 和光子 3（即 EPR 对），把光子 2 发送给 Alice，把光子 3 发送给 Bob. 光子 2 与光子 3 处于纠缠态

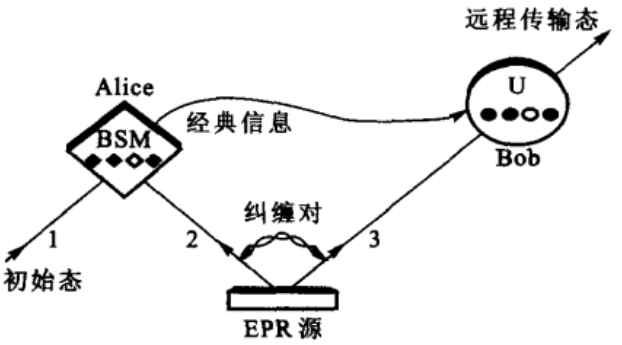


图 22.9 量子态远程传输原理图

Alice 有一个量子系统——粒子 1，该粒子处于初始态 $|\Psi_1\rangle$，她想把量子态 $|\Psi\rangle$ 传给 Bob. Alice 与 Bob 拥有纠缠态的粒子对 2 和 3(又称 EPR 对)，它们是由特殊的纠缠态发生源——EPR 源发射的. Alice 然后对粒子 1 与粒子 2 进行联合 Bell 态测量(BSM)，即把粒子 1 与粒子 2 所组合的态投影到某个 Bell 基(即最大纠缠态). Alice把测量结果通过经典信息通道通知 Bob，然后 Bob 据此指令对粒子 3(粒子对中的一个粒子)进行幺正变换，这样就使 Bob 处的粒子处在 $|\Psi\rangle_3$ 态，即 Alice 拥有的初始量子态 $|\Psi\rangle$

$$|\Psi^-\rangle_{23}=\frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_2\,|V\rangle_3-|V\rangle_2\,|H\rangle_3) \tag{22.60}$$

其中 Ψ^- 右上角的负号代表反对称. 注意这个纠缠态是 $|H\rangle_2\,|V\rangle_3$ 与 $|V\rangle_2\,|H\rangle_3$ 的相等的叠加. $|\Psi^-\rangle_{23}$ 并不包括光子 1 的任何偏振信息. 纠缠态 $|\Psi^-\rangle_{23}$ 只说明光子 2 与光子 3 处在相反的偏振态，就是说对光子对中任一个光子的偏振测量将会自动地决定另一个光子的偏振态，即使这两个光子相距任意远或中间有任何障碍物也是如此(你不妨设想它们被银河隔开). 比方说对 $|\Psi^-\rangle_{23}$ 中的光子 2 的偏振态测量结果是 $|H\rangle$(水平偏振)，光子 3 的偏振态一定是 $|V\rangle$(垂直偏振). 反之亦然. 为什么测量纠缠态中的一个粒子就会在瞬间影响到另一个粒子——如果你胳肢其中一个，另一个就笑，这本来是令爱因斯坦大惑不解而加以反对的，爱因斯坦称之为“远距离上的鬼怪行为”(spooky action at a distance). 现在偏爱的追星族却说“这本来是爱因斯坦早就预言过的性质”. 我们只能说，这是一种量子力学现象，是非经典现象，没有经典对应. 不论最初看起来多么不可思议，然而纠缠态的这种性质至今已被许多实验证实，其中也包括中国科学工作者的贡献.

(3) 实现量子态远程传输的关键是 Alice 对光子 1 和光子 2 进行联合的 Bell 态测量，这就是把光子 1 与光子 2 所组成的偏振态投影到如下的 4 个 Bell 基(最大纠缠的关联态)中：

$$|\Psi^{\pm}\rangle_{12}=\frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_1|V\rangle_2\pm|V\rangle_1|H\rangle_2)$$
$$|\Phi^{\pm}\rangle_{12}=\frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_1|H\rangle_2\pm|V\rangle_1|V\rangle_2) \tag{22.61}$$

注意这 4 个态构成粒子 1 与粒子 2 的完备正交基.

注意在 Alice 测量之前,整个系统包括 Alice 的光子 1 与光子对中的光子 2 和光子 3,这个三粒子系统的完全的态是纯粹的相乘,即

$$|\Psi\rangle_{123}=|\Psi\rangle_1|\Psi^-\rangle_{23} \tag{22.62}$$

把$|\Psi\rangle_1$与$|\Psi^-\rangle_{23}$的形式直接代入上式,则

$$|\Psi\rangle_{123}=\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(|H\rangle_1|H\rangle_2|V\rangle_3-|H\rangle_1|V\rangle_2|H\rangle_3)+$$
$$\frac{\beta}{\sqrt{2}}(|V\rangle_1|H\rangle_2|V\rangle_3-|V\rangle_1|V\rangle_2|H\rangle_3) \tag{22.63}$$

Alice 测量偏振的过程,就是把$|\Psi\rangle_{123}$按 4 个 Bell 基$|\Psi^{\pm}\rangle_{12}$和$|\Phi^{\pm}\rangle_{12}$展开(即投影到 4 个 Bell 基上),上式可以变成如下的形式:

$$\begin{aligned}|\Psi\rangle_{123}=\frac{1}{2}[&|\Psi^-\rangle_{12}(-\alpha|H\rangle_3-\beta|V\rangle_3)+\\&|\Psi^+\rangle_{12}(-\alpha|H\rangle_3+\beta|V\rangle_3)+\\&|\Phi^-\rangle_{12}(\alpha|V\rangle_3+\beta|H\rangle_3)+\\&|\Phi^+\rangle_{12}(\alpha|V\rangle_3-\beta|H\rangle_3)]\end{aligned} \tag{22.64}$$

由此可知,尽管不知道$|\Psi\rangle_1$的信息,4 个 Bell 态都在上式中处于相等的地位,出现每个态的几率都是 1/4. 由量子力学预言,一旦光子 1 和光子 2 投影到 4 个 Bell 态中的一个,光子 3 就一定在瞬时间投影到 4 个纯态之一(见$|\Psi\rangle_{123}$右边). 令$|\Psi\rangle=\alpha|H\rangle+\beta|V\rangle$,$|H\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$,$|V\rangle=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$,由$|\Psi\rangle_{123}$可知:

Alice 测得光子1 与光子 2 的纠缠态	Bob 测得光子 3 的偏振态
$\|\Psi^-\rangle_{12}$	$-\alpha\|H\rangle_3-\beta\|V\rangle_3=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\|\Psi\rangle_3$
	$\equiv U_1\|\Psi\rangle_3$
$\|\Psi^+\rangle_{12}$	$-\alpha\|H\rangle_3+\beta\|V\rangle_3=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\|\Psi\rangle_3$
	$\equiv U_2\|\Psi\rangle_3$
$\|\Phi^-\rangle_{12}$	$\alpha\|V\rangle_3+\beta\|H\rangle_3=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\|\Psi\rangle_3$
	$\equiv U_3\|\Psi\rangle_3$

$$|\Phi^+\rangle_{12} \qquad \alpha|V\rangle_3-\beta|H\rangle_3=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}|\Psi\rangle_3$$

$$\equiv U_4|\Psi\rangle_3 \tag{22.65}$$

(4) Alice 必须通过经典信息通道把自己的测量结果和 Bob. 例如 Alice 测得的 Bell 基是$|\Phi^-\rangle_{12}$，她就把此信息——即 U_3 告诉 Bob. Bob 随即用 U_3^{-1} 相应的操作把他自己测得的光子 3 的偏振态恢复成$|\Psi\rangle_3$，(即用 U_3^{-1} 作用到他自己测到的光子 3 的偏振态)

$$U_3^{-1}U_3|\Psi\rangle_3=|\Psi\rangle_3=\alpha|H\rangle_3+\beta|V\rangle_3 \tag{22.66}$$

这样，Alice 就把量子态$|\Psi\rangle_1$传送给了 Bob，即 Bob 得到了$|\Psi\rangle_3$，即光子 3 与光子 1 的量子态一样了！这就是说，Alice 的光子 1 并没有传过去，但是却把光子 1 的态$|\Psi\rangle$传给了光子 3.

最后需提醒注意，在上述 Bell 态测量中，光子 1 与光子 2 变成纠缠态了，这样光子 1 就不可识别或辨认了. 因此，在量子态的传输中，在 Alice 那边，破坏了量子态$|\Psi\rangle_1$，光子 1 失去了原有的偏振信息. 这样，量子态远程传送与非克隆定理才不发生矛盾.

关于量子态远程传输问题需作进一步讨论：1)从光子 1 到光子 3 的信息传送能在任意远的距离发生，故名 teleportation. 早在 1998 年，量子传态实验就达到 10 kg. 2)在量子态传送中，Alice 并不需要知道 Bob 在何处. 3)Alice 或者任何其他人都不需要知道光子 1 的初态. 4)Alice 的光子 1 的态甚至还可以是不确定的，例如光子 1 可能与别的光子处在纠缠态，因而光子 1 的性质是不确定的. 这就是最终导致纠缠态保密(entanglement swapping). 5)当完成量子传态之后，光子 1 已经不在其原初状态了，因此，量子态是从光子 1 转移到光子 3，所以光子 3 并没有克隆光子 1 的态.

22.8 量子态远程传输实验

本节介绍潘建伟等人在奥地利完成的世界上第一项量子传态实验. 这一实验具有划时代意义. 本书作者曾在《科学时报》发表文章《诺贝尔奖向我们走来》，高度评价了他们做出的巨大贡献.

22.8.1 实验装置

实现量子态远程传送的两个关键是：第一，怎样产生纠缠态；第二，怎样测量纠缠态. 这是两个最有挑战性的任务. 实际上，制备纠缠态的方法并不多，而对任何关联对都不能在实验上完全区分 4 个 Bell 态. 然而，正

如前边所说，我们用参量下转换方法可以产生纠缠光子对，并且能把它们至少投影到 4 个 Bell 态的 2 个 Bell 态上.

本实验中，用 type Ⅱ 型参量下转换产生纠缠态的光子 2 与光子 3. 入射的泵浦光是用钛宝石激光倍频产生的紫外光，脉宽 200 fs. 在 BBO 晶体内，入射的泵浦光以一定的几率衰变为处于偏振纠缠的两个光子.

$$|\Psi^-\rangle_{23}=\frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_2\,|V\rangle_3-|V\rangle_2\,|H\rangle_3) \tag{22.67}$$

在泵浦光经过反射后，再次通过 BBO 晶体时，将产生另一光子对，即光子 1 与光子 4. 选择光子 1 作为远程传态的初始光子，而光子 4 作为已产生初始光子 1 的某种指示器. 为了方便，在实验中只区分反对称态 $|\Psi^-\rangle_{12}$，即把光子 1 与光子 2 投影到 $|\Psi^-\rangle_{12}$ 上.

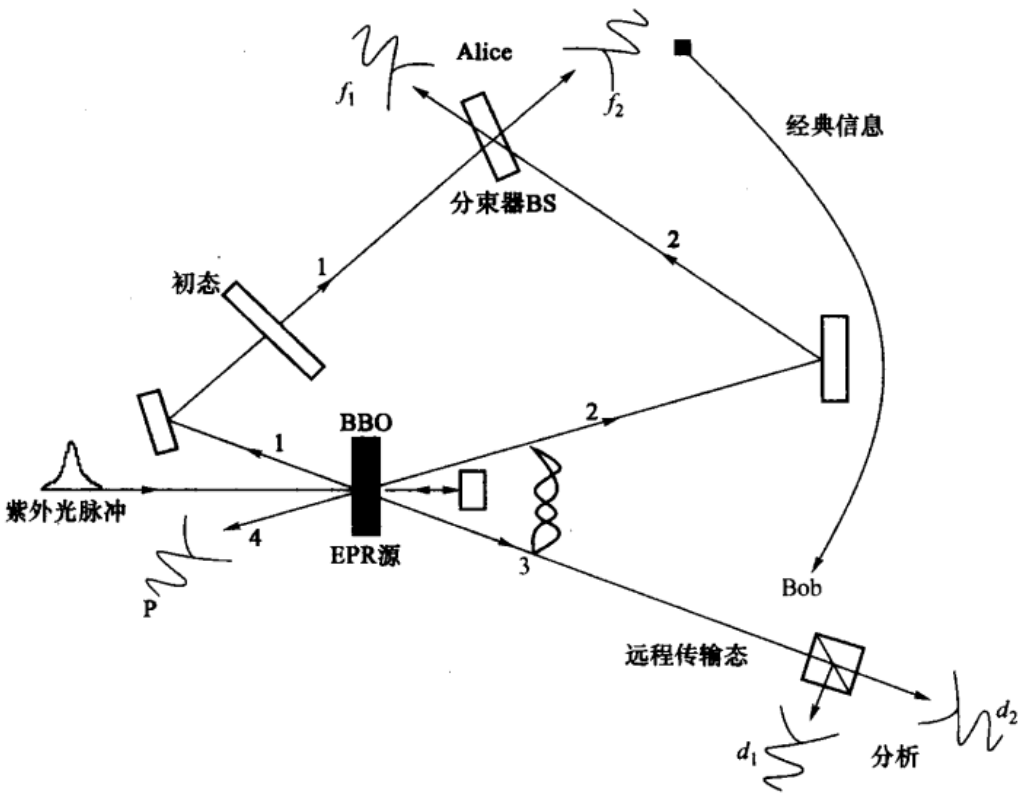


图 22.10 量子态远程传输实验装置

用钛宝石激光经过倍频产生的紫外光脉冲通过非线性晶体 BBO 时产生偏振纠缠的光子对——光子 2 与光子 3. 然后，紫外光脉冲被原路反射，再次通过 BBO 晶体时产生另一对纠缠光子对即光子 1 和光子 4. 光子 1 的初态 $|\Psi\rangle_1$ 将被传送到远处. 而光子 4 则作为一个触发信号射到探测器 P，指示出被传态的光子 1 已经制备好. 然后，Alice 把光子 1 与光子 2 从两侧入射到分束器 BS 上，见图上方. 再用光子探测器 f_1 和 f_2 进行符合计数测量. Alice 从 f_1 和 f_2 的符合计数区分出 Bell 态 $|\Psi^-\rangle_{12}$ 之后，通过经典信息通道将此结果通知 Bob. 这时 Bob 在这个经典信息的基础上进行幺正变换，把光子 3 的状态变换到 $|\Psi\rangle_3$ 偏振态.

在实验中是怎样实现的呢？就是用 22.5 节中的双光子干涉法. 由图 22.10 的上方可以看出，光子 1 与光子 2 从两侧入射到 50%对 50%的分束器 BS 上，而两个探测器 f_1 和 f_2 各在分束器的一侧的输出端(相当于前面 22.5 节中讲到的 c 和 d 之处). 测量到 f_1 和 f_2 的符合计数，就说明是投影到 $|\Psi^-\rangle_{12}$ 了. 因为最初光子 2 的偏振态是完全不确定的，光子 1 与光子 2 的组合态实际上是 4 个 Bell 态均等的叠加. 由于这 4 个 Bell 态都是处在均等的地位，所以各有 1/4 的几率. 分束器 BS 两侧的两个探测器 f_1 和 f_2 有 1/4 的机会记录到符合计数. 由于光子是玻色子，服从玻色统计，所以当两个全同光子在分束器上干涉后，出射的末态整体波函数必须是交换对称的. 如果光子 1 与光子 2 的偏振态是反对称的 $|\Psi^-\rangle_{12}$，则其空间波函数也必须是反对称的，所以光子 1 与光子 2 必须是出现在分束器两侧的输出端. 正如 22.5 节所述，一旦 f_1 和 f_2 记录到符合计数，就自动说明光子 1 和光子 2 投影到反对称的偏振态 $|\Psi^-\rangle_{12}$ 上了. 在实验中，为了方便，只分析光子 1 与光子 2 往 $|\Psi\rangle_{12}$ 上的投影. 显然，一旦光子 1 与光子 2 投影到 $|\Psi^-\rangle_{12}$，光子 1 便与光子 2 处在纠缠态，所以光子 2 与光子 1 的偏振必定互相正交垂直，而光子 2 与光子 3 本来就是纠缠的光子对，所以光子 3 必与光子 2 的偏振垂直. 即光子 3 处于光子 1 的初态 $|\Psi\rangle$，即光子 3 在 $|\Psi\rangle_3$ 态. 这样就实现了量子态的远程传送.

这里需要强调一下，即使人们只能够选择性地区分 4 个 Bell 态中的一个(这里是指 $|\Psi^-\rangle_{12}$)，也已成功地实现了量子态的远程传输. 当然，这也就只有 1/4 的成功率. 正如在 22.5 节中指出的，如果 Alice 进一步在分束器 BS 的两个输出端放置双通道偏振片，则 BS 的两个输出端记录到符合计数就表明将光子 1 与光子 2 投影到 $|\Psi^+\rangle_{12}$ 了. 因此，对本节的实验设置稍做改进，就能以 50% 的成功率(即 Alice 检测到 $|\Psi^-\rangle_{12}$ 和 $|\Psi^+\rangle_{12}$)实现量子态的远程传送.

应该注意，由于上述区分 $|\Psi^-\rangle_{12}$ 的方案有赖于两个独立产生的光子间的干涉效应，人们必须保证光子 1 与光子 2 在分束器上有好的时间与空间重叠，以此抹去光子 1 与光子 2 原有的路径信息. 通常，由于光子 2 与光子 3 在时间和频率上有高度关联，通过测量光子 3，人们便可以揭示光子 2 的路径信息并由此区分光子 1 与光子 2，这就会破坏光子 1 与光子 2 在分束器上的干涉效应. 为了确定光子 1 与光子 2 不可区分，要使对光子 1 与光子 2 的检测时间短于它们的相干时间，这就要增大光子相干时间. 所以在实验中采取了增加干涉光子的相干时间的手段，使得它们的相干时间大大超过它们被产生时的时间间隔. 这样，在光子 1 与光子 2 通

过分束器之后，人们便在原则上也无法区分哪一个光子是与光子 3 协同产生了. 在具体实验中，使用脉宽为 200 fs 的紫外脉冲作为入射泵浦光以便在 BBO 晶体中产生纠缠态光子对. 将干涉滤光片($\Delta\lambda=4.6$ nm)置于探测器 f_1 与 f_2 之前. 这使得光子 1 与光子 2 的相干时间变长，达到 500 fs. 进一步，用单模光纤耦合器作为空间滤波器以便确保被测光子有充分的模式重叠.

最后介绍一下实验装置中一些仪器的参数. 用锁模的商品钛宝石激光器产生波长 788 nm 的激光，用非线性晶体 LBO(LiB_3O_5)倍频得到波长为 394 nm 的紫外线脉冲，作为参量下转换的泵浦光. 钛宝石激光的重复率是 76 MHz，平均功率是 500 mW. 用非线性晶体 BBO 作为 type-Ⅱ型参量下转换晶体，产生处于纠缠态 $|\Psi^-\rangle_{23}$ 的光子对(光子 2 与光子 3). 入射的泵浦光被原路反射，再次通过 BBO 晶体，产生第二对的纠缠光子对(即光子 1 与光子 4). 光子 1 就是作为被传态的初始光子，而光子 4 则作为已产生光子 1 的指示器.

22.8.2 量子传态实验的理论曲线

潘建伟教授与国外合作用以上实验装置完成了世界上第一个量子传态实验(见图 22.10).

在他们的实验中，证明了利用上述装置和方案可以进行任何完备正交基的远程传送，进行了水平(竖直)偏振、45°(−45°)偏振以及左(右)旋等各种正交偏振态的远程传送.

下面具体介绍光子 1 沿45°偏振时的远程传态实验. 被传的态 $|\Psi\rangle_1$，是+45°偏振. 先从理论上预言一下此实验的结果.

(1) 为了实现量子态远程传输，必须设法使光子 1 与光子 2 在分束器 BS 处重合. 为此，需调节光子 1 到达分束器的时间. 只要对反射入射的紫外泵浦光的反射镜的水平位置进行微调，就可以达到扫描光子 1 到达分束器 BS 的时间的目的.

(2) 注意探测器 f_1 和 f_2 是 Alice 处的两个探测器，而 d_1 和 d_2 是 Bob 处的两个探测器. 若光子 3 是45°偏振则到达 d_1，−45°偏振则到达 d_2. 我们在实验室内测量三重符合计数 $f_1f_2d_2$ 与 $f_1f_2d_1$，即三个探测器都同时收到信号才计数 1 次.

(3) 未实现量子态传输时，光子 1 与光子 2 各自独立无关地以 50% 的几率到达 f_1 和 f_2 时，我们将以 50%的几率得到二重符合计数 f_1f_2，而 $f_1f_2=50\%$. 由于这时光子 3 完全没有确定的偏振方向(因为它与光子 2 处于纠缠态)，光子 3 将以 50%的几率分别达到 d_1 和 d_2，即 $d_1=$

50%，$d_2=50\%$. 因此，我们得到的三重符合计数是 $f_1f_2d_1=50\%\times 50\%=25\%$，$f_1f_2d_2=25\%$.

(4) 如前所述，实现量子态传输时，关键是对光子 1 与光子 2 进行 Bell 态测量，即光子与光子 2 以 25% 的几率投影到 $|\Psi^-\rangle_{12}$. 这时必有 $f_1f_2=25\%$. 因为初始光子 1 原来在45°偏振，如果完成量子传态，光子 3 也必然在45°偏振，所以光子 3 经偏振分束镜后只能到达 d_1，故 $d_1=1$，光子 3 不能到达 d_2，故 $d_2=0$. 因此 $f_1f_2d_1=25\%$，$f_1f_2d_2=0$.

比较以上(3)与(4)两种情况可知，(a)看 $f_1f_2d_1$，不管是否完成量子传态，也就是在 Alice 处对光子 1 到达分束器的时间进行扫描过程中，总保持 $f_1f_2d_1=25\%$，即水平直线. (b)看 $f_1f_2d_2$，在未完成量子传态时，$f_1f_2d_2=25\%$；在完成量子传态(即对光子 1 与光子 2 进行 Bell 测量把它们投影到 $|\Psi^-\rangle_{12}$ 时)，$f_1f_2d_2=0$. 以上理论预测结果见图 22.11.

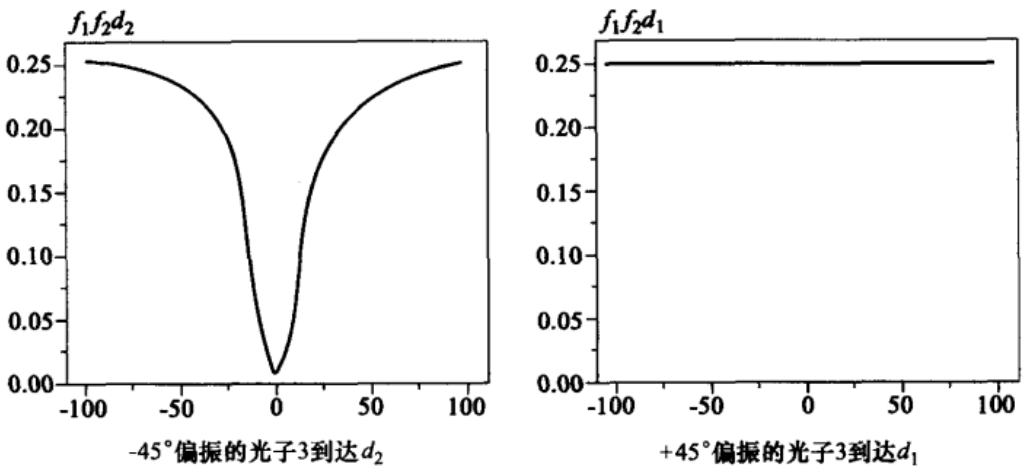


图 22.11 量子传态实验的理论曲线示意图

这里被传的光子态 $|\Psi\rangle_1$ 是+45°偏振. 图中的曲线代表三重符合几率. 三重符合即 Bell 态探测器 f_1 和 f_2 以及分析被传送的态的探测器 d_1 或 d_2. d_1 接收 45°偏振的光子 3，d_2 接收 −45°偏振的光子 3. 由于被传的光子态 $|\Psi\rangle_1$ 是+45°偏振，所以传态成功时，光子 3 的态 $|\Psi\rangle_3$ 也是+45°偏振，这时光子 3 到达 d_1 而不能到达 d_2，$d_2=0$，即 $f_1f_2d_1=0.25$；$f_1f_2d_2=0$. 因此传态成功的标志是 $f_1f_2d_2=0$. 在未能传态时，则 $f_1f_2d_1=0.25$. 相反，不论是否实现传态，都有 $f_1f_2d_1=0.25$，即使 $f_1f_2d_1$ 是一个水平直线.

22.8.3 量子传态实验的结果

图 22.12 是量子态远程传输的实验结果. 图中的纵坐标是三重符合

计数 $f_1f_2d_2$ 与 $f_1f_2d_1$，横坐标是光子 1 与光子 2 到达分束器 BS 的时间延迟. 该时间延迟是对入射泵浦光逆向反射的反射镜的位置决定的. 当光子 1 与光子 2 同时到达分束器时，延时为 0，而此时反射镜的位置对应于横坐标中 0 的位置. 只有在延时等于 0 时，光子 1 与光子 2 同时到达分束器才严格对应实现量子态远程传输的条件.

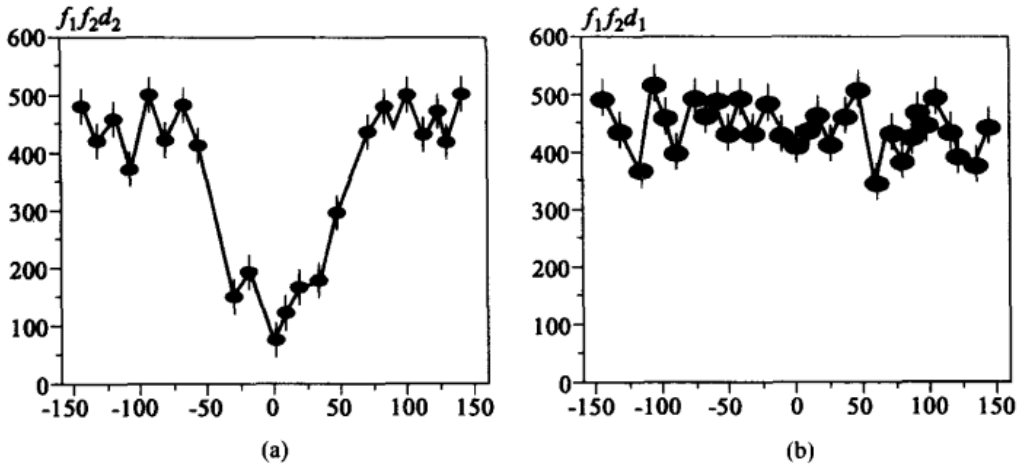


图 22.12 量子态远程传输实验结果

图中光子 1 的初态是 +45°((a)与(b)). 纵坐标是每 2 000 s 内的 3 重符合计数 $f_1f_2d_2$ 与 $f_1f_2d_1$. 三重符合计数率是光子 1 与光子 2 到达 Alice 的分束器 BS 的延迟时间的函数，延迟时间等价于延迟距离或延迟线的长度. 在光子 1 与光子 2 延迟时间为 0 时发生量子态的远距离传输. 其中的三重符合计数率已减去了背景噪声的贡献. 此图的实验曲线与表 22.1 确凿地证明已实现了量子传态.

把实验曲线与理论曲线比较可知，当延时 $=0$ 时，$f_1f_2d_2=0$，而 $f_1f_2d_1$ 接近一条水平横线，这表明本实验成功实现了量子态的远程传输.

22.8.4 量子传态的补充实验

潘建伟等还进行了初态光子 1 是 −45°偏振、0°偏振和90°线偏振、圆偏振时的传态实验. 实验结果见表 22.1，$f_1f_2d_2$ 的凹陷处的值约为 0.6，远小于未传态时的 500，可看成 $f_1f_2d_2\approx0$.

表 22.1 实验测得的“凹陷”的“可见度”

偏　振	+45°	−45°	0°	90°	圆偏振
凹陷的可见度	0.63±0.02	0.64±0.02	0.66±0.02	0.61±0.02	0.57±0.02

表明对于每种情况，在成功进行传态时 $f_1f_2d_2=0$，当然在实验上不可能真正达到 0. 表 22.1 给出了实验测得的“凹陷”的“可见度”(visibility).

22.8.5 讨论

潘建伟等人的第1个实验是把量子态从一个光子传到另一个光子(不是把一个光子转移到另一个地方,也不是对光子1的态进行克隆).当然,从原则上讲也可以用纠缠态的原子、离子等进行传态实验.还可考虑光子、原子、离子、声子间的联合Bell态测量.这样,量子态的远程传送将允许人们把寿命短、消相干快的粒子的量子态传送到某些更稳定的系统.例如可以把一个光子的偏振信息存贮到很好的隔离环境的稳定的束缚离子上,使得量子信息的存贮成为可能.同时,量子态的远程传送也提供了各qubit之间进行状态转换的桥梁.量子态的保存、不同qubit之间的转换在实际的量子计算网络中是十分重要的.

应该注意,由于环境与通常噪声引起的不可避免的消相干效应,在纠缠态的EPR关联对的传送过程中,其关联品质将随之退化.这将在实验中影响到量子态传送的可行性,然而,现在也有纯化关联态的若干方法,可以改进关联对的关联品质,获得高品质的相距遥远的EPR关联对(未必能达到牛郎织女的要求).

当然,人们还可以制备3个或更多粒子的关联态,即GHZ(Greenberg - Horne - Zeilinger态).利用它,在原则上可以不依赖于任何统计预言,而只是通过对一系列事例的单次测量,最终检验量子力学的非定域性.

潘建伟教授多年从事量子信息领域的研究工作,并取得了一系列开创性的研究成果,其主要贡献有:首次实现量子态隐形传输,量子纠缠互换,三光子、四光子、五光子纠缠,量子纠缠纯化.其中五光子纠缠实验完全在国内完成,并于2004年发表在英国《自然》杂志上.从1998年以来,潘建伟的上述主要工作已经被引用约1 700余次.

潘建伟的科研成果,使量子通信距离有可能达到地球的每一个角落.2005年4月20日,美国《物理评论快报》发表了潘建伟领导的中国科学技术大学实验小组关于13 km自由空间纠缠光子分发的研究成果,这一成果为实现全球化的量子保密通信奠定了实验基础.英国《新科学家》以《长城——开启全球化量子通信之密匙》为题,报道了这一工作以及他们未来的研究计划.

习题与思考

(1) 详细讨论纠缠态的性质.

(2) 说明$|\Psi\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|b_1\rangle|a_2\rangle\pm|a_1\rangle|b_2\rangle)$的纠缠态意义. 其中$|a\rangle$,$|b\rangle$代表二能级原子的态.

(3) 自查文献,了解利用纠缠态的"鬼"干涉等奇妙现象.

(4) 对于频率为ω的光与二能级原子的作用,$H=H_0+H_i$,$H_0=\hbar\omega a^+ +\frac{1}{2}\hbar\Omega\sigma_z$,$H_i=\hbar g(\sigma_+ a+a^+\sigma_- +\sigma_+ a^+ +a\sigma_-)$,用$|a\rangle$,$|b\rangle$代表二能级原子的态. 利用相互作用表系,$H_i$意变为$V$,解薛定谔方程$i\hbar\frac{\partial|\Psi\rangle}{\partial t}=V|\Psi\rangle$. 设初态为$|\Psi|0\rangle=|a,0\rangle$,$|\Psi(t)\rangle=\sum_n a_n(t)|a,n\rangle+b_{n+1}(t)|b,n+1\rangle$,在旋转波近似下,求出$|\Psi(t)\rangle$. 说明为什么$|\Psi(t)\rangle$是纠缠态?

(5) 思考量子计算的特点、优点、难点.

(6) 透彻理解量子态远程传输的概念、原理、实验方法和实验曲线含义.

参 考 文 献

[1] Wootters W K, Zurek W H. A single quantum cannot be cloned. Nature, 1982, 299:802 - 803.

[2] Bennett C H, Brassard G, et al. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky- Rosen channels. Phys. Rev. Lett., 1993, 70(13): 1895 - 1898.

[3] Zukowski M, Zeilinger A, Horne M A, et al. Even-ready-detectors bell experiment via entanglement swapping. Phys. Rev. Lett., 1993, 71(26): 4287 - 4290.

[4] Pan J W, Bouwmeester D, Weinfurter H, et al. Experimental entanglement swapping: entangling photons that never interacted. Phys. Rev. Lett., 1998, 80: 3891 -3894.

[5] Bouwmeester D, Pan J W, Mattle K, et al. Experimental quantum teleportation. Nature, 1997(390): 575 - 579.

[6] Bennett C H, Brassard G, Popescu S, et al. Purification of noisy entanglement and faithful teleportation via noisy channels. Phys. Rev. Lett., 1996, 76: 722 - 725.

[7] Greenberger D M, Horne M A, Shimony A, et al. Bell's theorem without inequalities. Am. J. Phys., 1990, 58(12): 1131 - 1143.

[8] Zeilinger A, Horne M A, Weinfurter H, et al. Three-particle entanglements from two entangled pairs. Phys. Rev. Lett., 1997, 78: 3031 - 3034.

[9] Pan J W, Zeilinger A. Greenberger-Horne-Zeilinger-state analyzer. Phys. Rev. A, 1998(57): 2208 - 2211.

[10] Bouwmeester D, Pan J W, Daniel M, et al. Observation of three-photon Greenberger-Horne-Zeilinger entanglement. Phys. Rev. Lett., 1999(82): 1345 - 1348.

[11] 潘建伟,安东·塞林格. 量子态远程传送的实验实现. 物理, 1999(28): 609 -

613.

[12] Shor P W. Algorithms for quantum computation: discrete log and factoring. In: Proceeding of the 35th annual symposium on the foundations of computer science. New Mexico: IEEE Computer Society Press, 1994. 124 - 134.

第 23 章　激光冷却与玻色-爱因斯坦凝聚

本章介绍激光冷却和玻色-爱因斯坦凝聚(BEC).这两项研究成果分别获得 1997 年和 2001 年诺贝尔物理学奖.下面先引入激光冷却的概念,并用光学布洛赫方程计算光对原子的作用力,再介绍 BEC 与原子激光.

23.1　激 光 冷 却

平常讲的冷与热,是和原子与分子的运动相联系的.温度可作为原子或者分子的热运动的度量.例如气体原子,原子运动速度越小,对应的温度越低.所谓激光冷却,就是用激光使原子减速,速度极低的原子运动,就对应极低的温度.激光冷却达到的温度,比液氦温度还低八九个数量级.

由于对激光冷却的研究,美国斯坦福大学朱棣文(Stenven Chu),法兰西学院和巴黎高等师范学院 C. C. 塔诺季(Claude Cohen Tannoudji)和美国国家标准技术研究院的 W. D. 菲利普斯(Willian D. Phillips)荣获 1997 年诺贝尔物理学奖.他们的工作开创了捕陷、操控原子,探索宏观量子现象的新纪元.用激光冷却中性原子,已经达到了 nK 的数量级.采用激光和其他综合技术可将冷却的中性原子捕陷在空间小区域达几十分钟之久.

23.1.1　辐射场对原子的作用力

辐射场对原子的作用力,是由于光子和原子作用而把动量传递给原子的结果.这种作用力可以认为是光的吸收、自发辐射和受激辐射三种过程的综合效果.

先考虑基态原子在空间均匀行波场中的受力情况.在原子吸收一个光子并跃迁到激发态时,原子不仅吸收了光子能量 $\hbar\omega$,而且在光波传播方向上还获得了光子的动量.经过时间 τ(原子在激发态的寿命),原子自发辐射出能量为 $\hbar\omega_0$ 的光子回到基态,同时获得光子的反冲动量 $\hbar k_0$(ω_0 为原子的本征跃迁频率).但是,由于原子自发辐射中光子的方向是随机并且各向同性的,所以原子经历多次吸收和自发辐射后,原子获得的自发辐射光子的反冲动量之和为零,结果是原子只在光的传播方向获得多次

吸收的光子动量. 原子因获得这一动量而受到的力称为光的辐射压力.

以上讨论未涉及受激辐射作用，因为对于空间均匀的行波光场，原子在其作用下受激辐射的光子与光场的方向相同，原子获得的反冲动量恰与其吸收的光子动量抵消，不产生新的作用力.

但是，若光强空间分布不均匀(如驻波场)，受激辐射过程也会产生作用力. 原子在驻波光场作用下，可以从波矢为 k 的光场中吸收光子，而在受激辐射时，受到波矢为 $-k$ 的光场激发，辐射出波矢为 $-k$ 的光子. 这样，原子的动量会改变，从而使原子受力. 这种与原子受激辐射有关的力称为辐射偶极力，如图 23.1 所示.

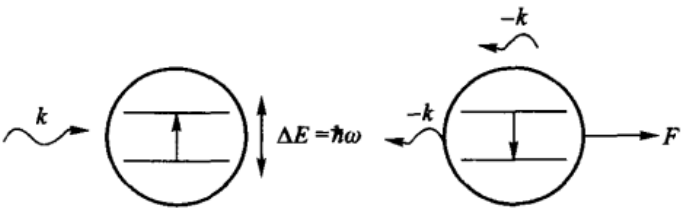


图 23.1 辐射偶极力的产生

下面以辐射场与二能级原子作用为例，讨论上述两种力的性质. 光与原子电偶极矩的作用势和作用力分别是 U 和 $\boldsymbol{F}$：

$$U=-\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{E}(r,t) \tag{23.1}$$

$$\boldsymbol{F}=-\nabla U(r,t) \tag{23.2}$$

这里的 $\boldsymbol{E}$ 是光场，$\boldsymbol{\mu}$ 是原子的电偶极矩.

利用前面第四章的光学布洛赫方程

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{v}\frac{\partial}{\partial r}\right)\rho_{21}=-\mathrm{i}\omega_0\rho_{21}+\frac{\mathrm{i}\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{E}}{\hbar}(\rho_{11}-\rho_{22})-\frac{\rho_{21}}{T} \tag{23.3}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{v}\frac{\partial}{\partial r}\right)\rho_{22}=-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{E}\rho_{11}-\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{E}\rho_{22})-\frac{(\rho_{22}-\rho_{22}^{0})}{T} \tag{23.4}$$

$$\rho_{11}+\rho_{22}=1 \tag{23.5}$$

平面波的电场 $\boldsymbol{E}=E_0\cos(\omega t-kz)$. 令 $\Delta\omega=\omega-\omega_0$，$\rho_{21}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t-kz)}\tilde{\rho}_{21}$，其中 $\tilde{\rho}_{21}$ 是慢变振幅，利用旋转波近似，得到

$$\mathrm{i}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{v}\frac{\partial}{\partial r}\right)\rho_{21}=\frac{\Omega}{2}(\rho_{11}-\rho_{22})-[(\Delta\omega-kv)+\mathrm{i}\Gamma]\tilde{\rho}_{21} \tag{23.6}$$

$$\mathrm{i}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{v}\frac{\partial}{\partial r}\right)\rho_{22}=\frac{\Omega}{2}(\tilde{\rho}_{21}-\tilde{\rho}_{12})-2\mathrm{i}\Gamma\rho_{22} \tag{23.7}$$

$$\rho_{11}+\rho_{22}=1 \tag{23.8}$$

在定态条件下 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\partial}{\partial t}+v\dfrac{\partial}{z}=0$，可以得到

$$\rho_{22}=\frac{(\Omega/2)^2}{(\Delta\omega-kv)^2+(\Omega/2)^2+\Gamma^2} \tag{23.9}$$

$$\rho_{21}=-\frac{(\Omega/2)[(\Delta\omega-kv)-\mathrm{i}\Gamma]}{(\Delta\omega-kv)^2+(\Omega/2)^2+\Gamma^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t-kz)} \tag{23.10}$$

再令 $G=\frac{1}{2}\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right)^2$，$\langle\mu\rangle=\mu_{21}\rho_{12}+\mu_{12}\rho_{21}$，则辐射压力为

$$F=\hbar k\Gamma\frac{G}{1+G+(\Delta\omega-kv)^2/\Gamma^2} \tag{23.11}$$

对于高斯光束，光场 $E=E_0(\rho)\cos(\omega t-kz)$

$$E_0(\rho)=\frac{2}{\rho_0}\left(\frac{2I}{c}\right)^{1/2}\exp(-\rho^2/2\rho_0^2) \tag{23.12}$$

$$\boldsymbol{F}=F_z\boldsymbol{e}_z+F_\rho\boldsymbol{e}_\rho \tag{23.13}$$

$$F_\rho=\hbar\frac{\rho}{\rho_0}(\Delta\omega-kv)\frac{G(\rho)}{1+G(\rho)+(\Delta\omega-kv)^2/\Gamma^2} \tag{23.14}$$

23.1.2　多普勒冷却机制与光学粘胶[1-3]

根据(23.11)，当 $\Delta\omega=kv$ 时，激光与原子发生共振作用，从而使原子降低速度达到冷却．图 23.2 显示这种情况下原子所受的力，力的方向总

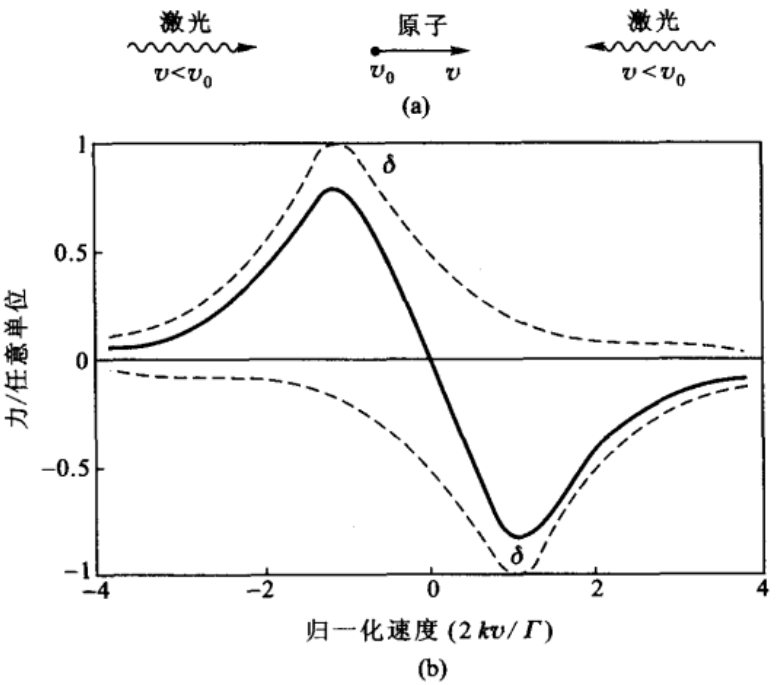


图 23.2　多普勒冷却机制

(a)一个原子在沿两束负失谐为 δ 的对射激光驻波场中运动　(b)低激光强度时，由于激光的负失谐，原子感受到来自反方向的平均作用力，这种静摩擦力可以冷却原子．速度为零时摩擦力曲线斜率等于摩擦系数．

是与速度方向相反，因而是阻尼力，原子速度就会趋于零.

考虑到多普勒效应，激光冷却还必须解决连续补偿频移问题. 这是因为在激光对原子的减速过程中，原子的多普勒频移项 kv 也会不断减小，激光的频率也必须不断变大，才能保持共振条件. 这样，就要求激光频率随原子速度的减小而不断加大，以补偿多普勒频移.

若把一维情况扩展到三维，从上下左右前后用 6 束激光射向原子，会发生什么情况呢？1985 年在贝尔实验室的朱棣文小组做了一个实验（见图 23.3）. 他们用 6 束激光照射到从原子束上减速下来的钠原子团上，测量了 6 束激光交汇处冷却下来的原子团的温度，结果为 240 μK. 显然原子速度并未冷却到零，它们仍在作微弱的但却是可观的运动. 因为原子吸收光子损失动量后还会发射光子而得到一无规的反冲动量. 这发射的光子还可能被邻近原子吸收而使它又得到一无规动量. 在 6 束激光交汇区，原子和光子的不断吸收和发射作用，交换动量，处于互相胶着的状态. 它们分别作类似于布朗运动的无规行走，从一处扩散到别处. 朱棣文把这种原子光子的胶着状态称为光学粘团（optical molasses），因为它犹如一团糖浆，糖分子在其中作扩散运动而无法逃脱. 用统计物理理论可计算出光学粘团中这种吸收冷却和无规发射加热所达到平衡时的最低温度. 当负失谐量 $\Delta\omega=(\omega-\omega_0)$ 等于原子共振谱线的半宽度时，$T_{\min}=\dfrac{\hbar\Gamma}{2k_B}$，$\Gamma$ 为谱

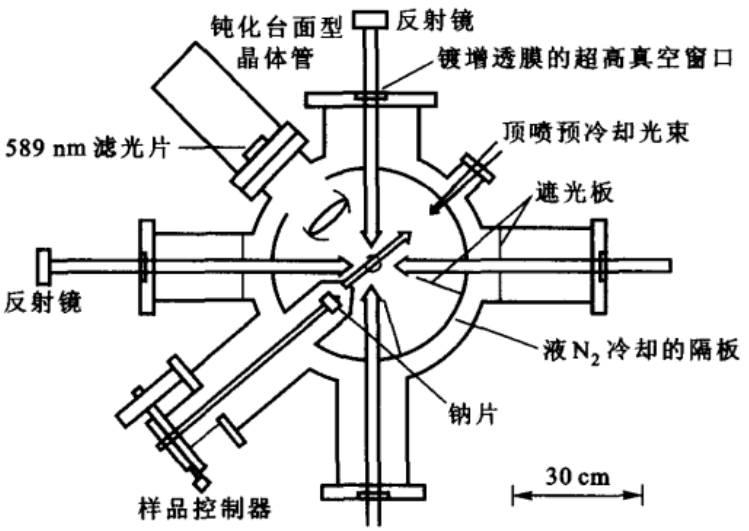


图 23.3 带有正交激光束和脉冲原子束的真空反应室原理图（原子束由一种脉宽 10 ns 的双倍频 YAG 激光蒸发一固态钠薄片产生. 隔板是一有效的低温泵，反应室的真空度～2×10^{-8} Pa）[4]

线的自然宽度，k_B为玻耳兹曼常量. 这个最低冷却温度 T_{min}称为多普勒冷却极限.

下面从理论上推导多普勒冷却极限温度. 对于驻波来说辐射压力为：

$$F=\hbar k\Gamma G\left[\frac{1}{1+G+(\Delta\omega-kv)^2/\Gamma^2}-\frac{G}{1+G+(\Delta\omega+kv)^2/\Gamma^2}\right] \tag{23.15}$$

对于慢原子来说，$|kv|\ll\Gamma$，$|kv|\ll\Delta\omega$，辐射压力变为

$$F=4\hbar k\Gamma\frac{kv(\Delta\omega/\Gamma)}{[1+(\Delta\omega/\Gamma)^2]} \tag{23.16}$$

当 $\Delta\omega<0$ 时，变成了阻尼力，阻尼系数为

$$\alpha=-4\hbar k^2\Gamma\frac{(\Delta\omega/\Gamma)}{[1+(\Delta\omega/\Gamma)^2]} \tag{23.17}$$

$$F=-\alpha v \tag{23.18}$$

原子的动能衰减率为

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{cooling}=Fv=-\alpha v^2 \tag{23.19}$$

自发辐射导致原子的动量扩散为

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{heat}=\frac{2D_s}{m}=\frac{2\hbar^2k^2\Gamma}{m}\frac{G}{1+(\Delta\omega/\Gamma)^2} \tag{23.20}$$

当$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{cool}=\left(\frac{dE}{dt}\right)_{heat}$时，$v^2=\frac{\hbar\Gamma}{4m}\frac{1+(\Delta\omega/\Gamma)^2}{[\Delta\omega/\Gamma]}$ (23.21)

对应的温度满足下式：

$$\frac{mv^2}{2}=\frac{k_BT}{2} \tag{23.22}$$

其中 $k_BT=\frac{\hbar\Gamma}{4}\frac{1+(\Delta\omega/\Gamma)^2}{[\Delta\omega/\Gamma]}$ (23.23)

当 $\Delta\omega/\Gamma=-1$ 时，最低温度为

$$T=\frac{\hbar\Gamma}{2k_B} \tag{23.24}$$

对于 Na 原子，这个温度约为 240 μK.

人们进一步使激光冷却的原子气体膨胀，把原子冷却到了更低的温度.

23.2 玻色-爱因斯坦凝聚

爱因斯坦预言了玻色-爱因斯坦凝聚即 BEC. 1995 年被实验证实.

23.2.1 玻色-爱因斯坦凝聚的概念

BEC 有两种含义，第一种指的是相变，在这种相变中宏观数量的玻色粒子处于相同的量子态. 第二种指的是通过上述相变处于简并量子态的玻色系统.

设在体积为 V 的容器中有 N 个同种玻色粒子组成的理想气体. 该理想玻色气体处于热平衡状态，服从玻色-爱因斯坦统计. 以 $n(\varepsilon_i)$ 表示热平衡时处于能级 ε_i 的某一量子态的平均粒子数，则

$$n(\varepsilon_i)=\frac{1}{e^{(\varepsilon_i-\mu)/k_B T}-1} \tag{23.25}$$

式中 μ 为粒子的化学势，对于玻色系统它要满足 $\mu\leqslant 0$；k_B 为玻耳兹曼常量. 系统的总粒子数为

$$N=\sum_i n(\varepsilon_i)=\sum_i \frac{1}{e^{(\varepsilon_i-\mu)/k_B T}-1} \tag{23.26}$$

用 N_0 表示处于最低能级($\varepsilon_0=0$)的粒子数，用 N' 表示处于较高能级中的粒子数，则总粒子数为 $N=N_0+N'$，而

$$N_0=\frac{G_0}{e^{-\mu/k_B T}-1} \tag{23.27}$$

其中 G_0 为 $\varepsilon_0=0$ 能级的微观态数，可设 $G_0=1$，

$$N'=\sum_{i\neq 0} \frac{1}{e^{(\varepsilon_i-\mu)/k_B T}-1} \tag{23.28}$$

其中对 $\varepsilon_i\neq 0$ 的所有微观态求和.

利用(23.28)式，近似地用积分代替求和，并考虑到函数的单调性，可知在某一特定的温度，N' 有一个上限 N_{max}，则

$$N'\leqslant SV\left[\frac{2\pi m k_B T}{h^2}\right]^{3/2}\times 2.612=N_{max} \tag{23.29}$$

式中 S 表示粒子的一个空间运动状态对应 S 个不同的自旋态，m 为玻色子的质量，h 为普朗克常量. (23.29)式中的这个特定的温度称为临界温度，用 T_c 表示. 当 $T<T_c$ 时，$N'<N$，其余的 $N-N'$ 个粒子都进入到最低能级($\varepsilon_0=0$). 此时可得

$$N'=N\left(\frac{T}{T_c}\right)^{1/2} \tag{23.30}$$

$$N_0=N\left[1-\left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}\right] \tag{23.31}$$

这个结果表明：当系统的温度低于临界 T_c 时，粒子将迅速在最低能级集结，使 N_0 成为与 N 的大小可比的量. 若 $T=0$，则 $N_0=N$，即全

部粒子都处在最低能级，如图 23.4 所示. 这个现象就是玻色-爱因斯坦凝聚.

23.2.2 产生玻色-爱因斯坦凝聚的条件

当 $S=1$ 时，由(23.29)和(23.30)式得临界温度 T_c

$$T_c=\frac{h^2}{2\pi mk_B}\left(\frac{n}{2.612}\right)^{2/3} \quad (23.32)$$

式中 $n=N/V$ 为粒子数密度. 故玻色-爱因斯坦凝聚形成的条件为

$$T<T_c=\frac{h^2}{2\pi mk_B}\left(\frac{n}{2.612}\right)^{2/3} \quad (23.33)$$

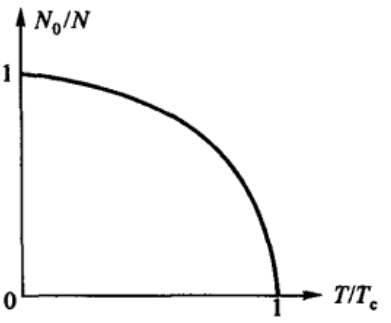


图 23.4 玻色-爱因斯坦凝聚

可见，要实现玻色-爱因斯坦凝聚，对于某种玻色子组成的系统，在粒子数密度一定时，就必须降低系统的温度，使得 $T<T_c$，从而使粒子的德布罗意波长($h/\sqrt{2\pi mk_BT}$)足够长，以至大于原子之间的平均距离. 进一步的研究表明，能否形成玻色-爱因斯坦凝聚还与粒子的 S-波散射长度有关.

23.2.3 玻色-爱因斯坦凝聚态的若干性质

玻色-爱因斯坦凝聚是新的物质状态，它有一些特殊的物理性质. 例如，在 $T<T_c$ 时，理想玻色气体的热容量为：

$$C_V=1.926Nk_B(T/T_c)^{3/2}$$

此式表明，在 $T<T_c$ 时，理想玻色气体的热容量 C_V 与 $T^{3/2}$ 成正比. $T=0$时，$C_V=0$. $T=T_c$ 时，C_V 有最大值 $1.926Nk_B$，它大于经典热容量 $3Nk_B/2$. $T>T_c$ 时，理想玻色气体的性质近似地服从玻耳兹曼分布，热容量 C_V 趋近于经典值 $3Nk_B/2$. C_V 随 T 的变化如图 23.5 所示. 在温度 T_c 时，理想玻色气体发生相变. 研究表明，这种相变属三级相变，且发生在动量空间中.

理论研究还表明，处于外场中的玻色体系，其粒子的基态波函数的特定形式使得粒子数密度形成一定的空间分布，因而波函数的形式也会在坐标空间中宏观地表现出来. 形成凝聚时，大部分粒子处于基态，基态粒子分布最集中的地方就是凝聚显现的区域.

实验得到的两组玻色-爱因斯坦凝聚的照片如图 23.5 所示.

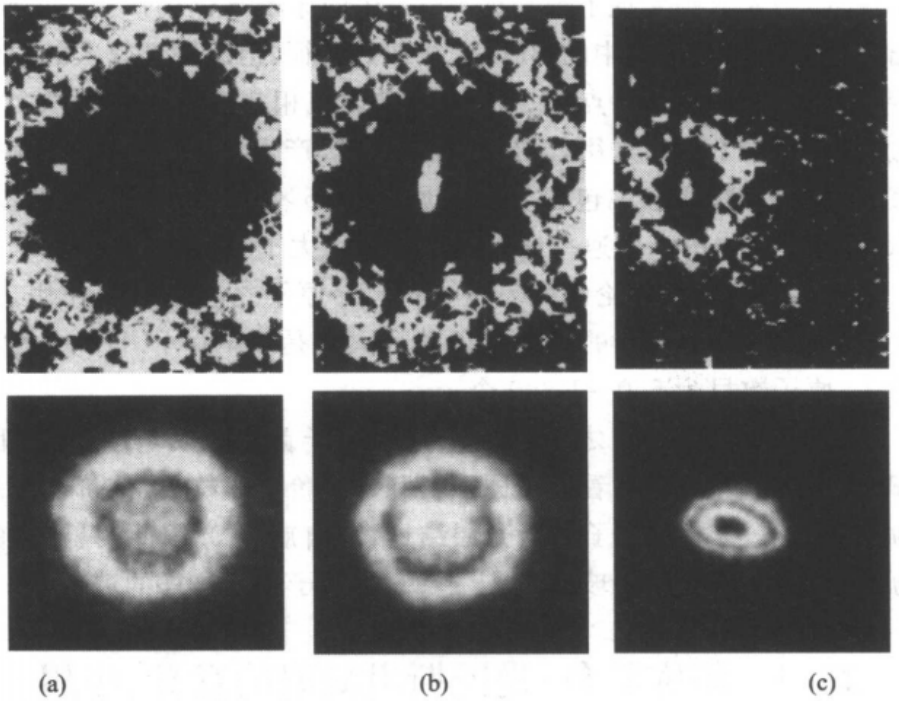


图 23.5 玻色-爱因斯坦凝聚的实验照片[5][6]

上面一组是^{87}Rb 原子玻色-爱因斯坦凝聚的照片，(a)为^{87}Rb 原子形成玻色-爱因斯坦凝聚前的吸收成像图. 形成凝聚前，原子布局于各个能态，速度分布呈各向同性. 图中原子云的对称形状，反映了热平衡状态原子的各向同性的速度分布. (b)为^{87}Rb 原子刚刚形成玻色-爱因斯坦凝聚的临界状态. 形成凝聚时原子处于最低量子态，在不对称势阱中的速度分布呈各向异性. 图中椭圆形的原子云反映了各向异性的速度分布. (c)为^{87}Rb 原子几乎完全形成玻色-爱因斯坦凝聚时的图像，速度分布的各向异性更加明显. 下一组是^{23}Na 原子的玻色-爱因斯坦凝聚的照片，各阶段的图像与^{87}Rb 原子的很类似.

23.3 BEC 的实现

1) 铷原子的 BEC

美国科罗拉多州布特市国家标准和工业技术研究所的科内尔和他在科罗拉多大学的同事怀曼(C. Wieman)从事玻色-爱因斯坦凝聚的研究六年之久才第一次实现了这种凝聚. 在他们的实验中，原子铷首先被激光冷却，然后载入磁陷阱中通过强力蒸发被进一步冷却，这就是蒸发冷却. 他们的实验能获得成功，关键的一步是采用了一种新构形的陷阱. 它是一个大的球四极矩场和一个小的、以 75 kHz 旋转的均匀横向场的叠加. 这样可抵消样品中粒子数损失，提供紧的稳定约束.

2) 锂和钠原子的 BEC

莱斯(Rice)大学的霍里特(Hulet)等人和麻省理工学院的凯特勒

(Ketterle)等人分别实现了锂和钠 BEC. 在钠原子气体中产生的 BEC 表现出与上述铷原子蒸气中的 BEC 有相似的特征,但凯特勒等人的工作另有特色. 快速冷却是其特点之一,能在 7 s 内使相空间密度增大六个数量级. 这主要是由于他们采用苜蓿叶形的磁圈以产生新的陷阱,能更有效地约束原子. 这种凝聚态中包含更多的原子(1.5×10^5 个原子),密度超过 $10^{14}\,cm^{-3}$,凝聚物的产生速率比其他两个小组大了三个数量级.

最新的多体量子理论研究表明,由于 Li 原子之间是吸引作用,它能发生玻色-爱因斯坦凝聚的最大原子数目大约是 1 400 个. Hulet 等人凝聚的 ^7Li 原子数目为 650～1 300 个.

玻色-爱因斯坦凝聚之所以在碱金属原子首获成功,其根本原因在于,碱金属原子的结构可看作由原子实和一个价电子构成. 该价电子的自旋为 1/2. 原子实内的电子为满壳层结构,总自旋为 0. 因此,只要核的自旋为半整数,原子就成为玻色子. 上述铷、钠原子正是这样的玻色子.

23.4 研究玻色-爱因斯坦凝聚的意义、应用

BEC 的重要应用之一是产生原子激光. 下面介绍原子激光的概念、工作原理及其与普通激光器的比较.

23.4.1 原子激光器

原子激光器(atom laser)是类比激光器取名的. 激光器发射的是相干的光波,而原子激光器发射的是相干的物质波. 因而原子激光器也可以说是一个相干原子束发生器(coherent atomic beam generator). 相干性是其基本特征. 正是在这一点上原子激光器较之通常的热原子束有根本的不同,即它发射的原子束是高度相干的,束中所有的原子处于同一量子态(指每个原子质心运动的量子态). 这一区别非常类似激光和普通热光源的区别. 同时,原子激光器发射的原子具有较长的德布罗意波长,表现出鲜明的波动性. 量子性、相干性和波动性是原子激光最主要的性质. 原子激光的另一基本特征是高的"光谱亮度"(brightness),束中原子的能谱处于单模,从能量分布的角度来看具有极好的"单色性". 由于原子激光器发射的相干原子束中的原子都处于同一量子态,因而可以准直行进相当距离而没有明显发散,即"方向性"好. 这说明原子激光的几个基本特征都类似于激光,而使其具有这些基本特征的本质原因在于原子激光器发射的原子都处于同一量子态. 将玻色原子制备成 BEC 并用合适的方法将 BEC 中的部分原子耦合出原子阱,就形成了原子激光器,有如光学谐振

腔中高简并度的光子被部分反射镜耦合输出形成激光一样. 但是 BEC 系统并不完全等同于原子激光器:BEC 是一个处于极低温度的、热平衡下的特殊物态的系统,而原子激光器是一个开放系统. 另外原子激光器只要求原子处于同一量子态,但并不一定是最低量子态,这也是和 BEC 不一样的.

23.4.2 原子激光器的工作原理与工作过程

当原子冷却到温度足够低时,原子的德布罗意波长大于它的平均距离,原子群将进入 BEC 状态,这时所有原子都处于能量最低的量子态(基态),原子间相互相干,形成高度简并的玻色子系统. 原子激光器的工作物质正是处于 BEC 下的超冷原子团. 要使原子团实现 BEC 态,要求物体温度低到 10^{-6}K 以下并保持在气体状态下冷却. 冷却技术分级进行,第一级利用激光冷却和囚禁获得大数目、高密度的初始冷却玻色子气体;第二级利用射频蒸发冷却方法进一步降低温度,使超冷原子团温度达到几个 μK. 原子激光器在工作过程中首先把存放在室温下高真空气室中的工作物质(铷 Rb,锂 Li,钠 Na 等碱金属原子气)经过强磁场的捕获和初步冷却后,再输运到激光冷却器进一步冷却. 这时在激光冷却器中被初步冷却的原子能量参差不齐,有高,有低,通过切断激光器电源的方法,把较高能量的原子筛选令其逃逸,剩下低能量的原子经过碰撞重新建立温度更低的热平衡. 如此反复多次就能使原子都聚于同一个最低量子态上,即实现了 BEC 状态. 实现了 BEC 的原子虽然处于同一量子态,但由于其运动方向是杂乱无章的,故还需要进一步降温筛选使它们的运动状态趋于一致,然后让 BEC 状态的相干原子在其重力作用下注入射频输出耦合器,利用射频蒸发冷却等方法再次冷却,从而得到相对速度趋于零的相干原子束. 最后令其一批一批不可逆地输出耦合器,这就完成了原子激光器的工作过程.

23.4.3 原子激光器的理论模型

一个激光器总是包括:谐振腔、增益介质和泵浦等. 一个原子激光器也对应有 3 个主要的部分:原子阱,以及不可逆地将某些原子输运出原子阱——对应谐振腔;预冷的原子云团——对应增益介质;将原子云团装入原子阱——对应泵浦. 一个激光器工作时最主要的环节是通过泵浦手段,依靠受激辐射在谐振腔中建立光的增益. 一个原子激光器工作时最主要的环节对应是:通过特殊的装入和输运手段,依靠玻色受激转移,在原子阱中建立确定量子态上原子数的增益 . 显然,两种器件中都有关键的受

激过程. 光的受激辐射是这样的：用 n 个相同量子态的光子共振激发原子，其辐射几率正比于$(n+1)$，其中与 n 成正比的过程对应于受激辐射. 玻色原子也有类似的受激转移特性：处于 N 个全同玻色原子占据同一量子态的原子气团中的激发态原子，其跃迁到 N 个原子所占据的量子态的几率正比于$(N+1)$. 这个因子称为玻色增强因子(Bose enhancement factor). 它是玻色系统波函数交换对称性的必然结果. 根据玻色受激转移中产生跃迁的具体机制的不同，现有的理论模型大体可分为两类：一类原子跃迁的产生主要取决于原子阱内原子间的碰撞；另一类原子跃迁的产生则主要取决于原子由高能态向低能态的辐射. 在具体举例说明这两类模型之前，先简单说明一下原子在原子阱中的能态. 正如光谐振腔中的光场存在若干振荡模式，原子阱中的原子则存在若干“捕陷模式”或“捕陷态”(trapped modes，trapped states)，即原子处于阱中时其质心运动的量子态. 一般将这些态分为三类：1)最低量子态称为阱的“基模”(ground mode)，有的文献称之为“激射模”(lasing mode)，这是因为当宏观数量的原子受激转移到这个量子能态后，一旦耦合出原子阱，即形成原子激光. 2)中间的量子态称为“源模”(source modes)，这是因为装入阱的原子常常先直接落在这些态上. 3)那些较高的量子态，有时甚至包括更高的非捕陷态，统统被称为“激发模”(excited modes). 其模型可简单地用图 23.6 来说明. 图中原子阱的“基模”用 0 表示，1 表示所有的“源模”，而 2 表示所有的“激发模”. 泵浦作用由一个能量分布可覆盖大多数“源模”的非相干原子源(热原子源)来提供. 耦合装入原子阱的原子(处于“源模”)通过相互的二体碰撞，导致有些跃迁至“基模”，同时有些跃迁至“激射模”. 因为玻色增强因子的关系，“基模”会因受激转移迅速集聚宏观数量的玻色原子，而处于“激射模”的原子用“蒸发”冷却的方法不断地输运出原子阱，保证了上述受激转移不可逆地顺利进行. 将处于“基模”的原子相干耦合出原子阱，即形成原子激光.

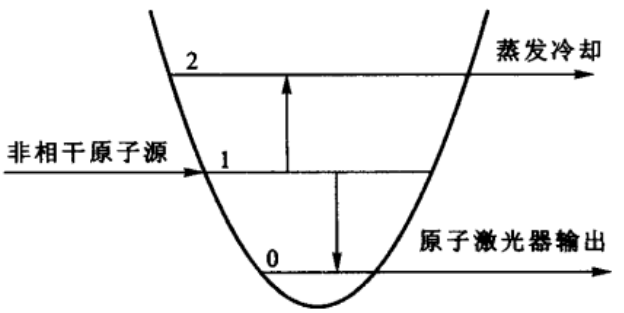


图 23.6 玻色原子通过碰撞受激转移至“基模”的模型原理图

23.4.4 原子激光器与光学激光器的比较

普通激光发射相干电磁波，原子激光发射相干物质波. 普通激光腔中大多数光子处于一个或几个模中. 腔由两个反射镜组成，模由腔长为半波长整数倍来确定. 增益介质由外能源抽运以保证足够光子进入该模中，利用半透反射镜将相干光从腔内引出腔外. 原子激光，即约束在势阱中的玻色-爱因斯坦凝聚体，它包含很多处在势阱的最低能态的原子. 增益介质是一个热原子云，原子通过隧穿而耦合出势阱，形成相干物质波.

对于普通激光，利用受激辐射产生与入射光子同步的光子，而使光得到放大. 原子激光具有类似的机制. 在被囚禁的超冷原子形成玻色-爱因斯坦凝聚的过程中，类似的激发作用——“受激辐射”起到了关键作用，使凝聚过程得到加速，从而证明了原子具有放大效应，图 23.7，图 23.8 表明了玻色-爱因斯坦凝聚具有相干物质波放大效应. 一团原子气体在接近玻色-爱因斯坦凝聚温度时，突然被迅速蒸发冷却，然后又很快地“淬火”(停止蒸发冷却). 此后观察原子气体的热平衡过程，结果发现它们出现了

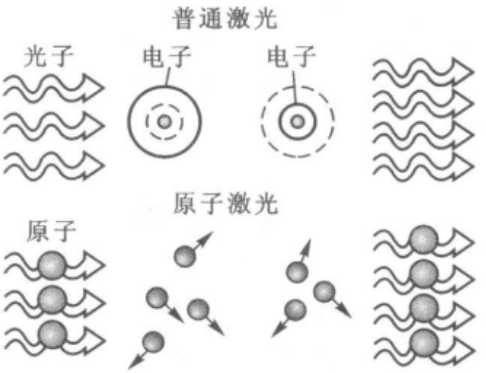


图 23.7 普通激光与原子激光[7]

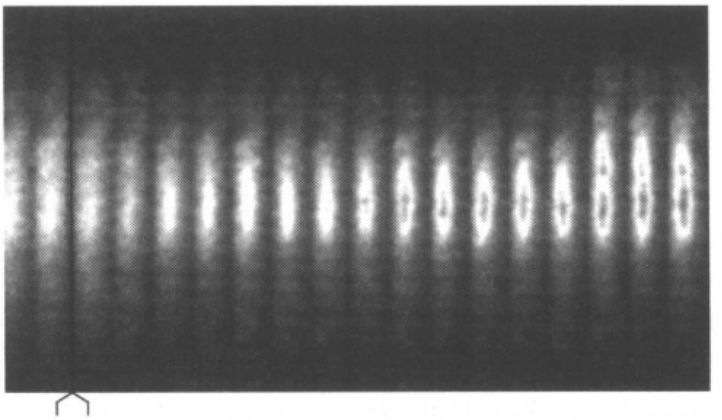


图 23.8 原子激光的放大效应[8]

玻色-爱因斯坦凝聚. 这说明部分热原子受到玻色凝聚体的影响，也跟随着发生了玻色-爱因斯坦凝聚，使得原子束被相干放大.

23.4.5 展望

在 BEC 基础上形成的原子激光，使现有的原子钟精度得到极大提高，并推动原子显微镜、原子全息术的发展，从而达到以极高的精度将原子沉积在固体表面，在原子水平上控制物质，加快纳米技术的发展. BEC 的研究成果还将推动相关领域的发展，如高精密测量、量子信息处理、原子集成电路及原子刻蚀技术等.

此外，有人为了解释大脑功能的整体性，设想大脑功能与玻色子有关，而且这些玻色子能实现玻色-爱因斯坦凝聚，即处于同一量子态，因而成为一个整体.

习题与思考

(1) 说明激光冷却的机理.

(2) 说明用密度矩阵理论求激光对二能级原子的作用力.

(3) 说明 BEC 的物理概念，并从相变的观点进行讨论.

(4) 什么是原子激光？它与普通激光有何异同？

参 考 文 献

[1] Phillips W D. Quantum motion of atoms confined in an optical lattice. Materials Science and Engineering B, 1997, 48: 13 - 18.

[2] Walhout M, Sterr U, Orzel C, et al. . Optical control of ultracold collision in metastable xenon. Phys. Rev. Lett. , 1995, 74: 506 - 509.

[3] 陈徐宗. 实验原子物理进展. 讲义.

[4] Steven Chu, et al. Three-dimensional viscous confinement and cooling of atoms by resonance radiation pressure. Phys. Rev. Lett. 1985, 55: 48 - 51.

[5] Anderson M H, Ensher J R, Matthews M R, et al. Observation of Bose - Einstein condensation in a dilute atomic vapor. Science, 1995, 269: 198 - 201.

[6] Davis K B, Mewes M O, Andrews M R, et al. Bose - Einstein condensation in a gas of sodium atoms. Phys. Rev. Lett. , 1995, 75(22): 3969 - 3973.

[7] Alexander Hellemans. Atom laser shows that it is worthy of the name. Science, 1998, 279(5353): 968 - 987.

[8] Miesner H J, Stamper-Kurn D M. Bosonic stimulation in the formation of a Bose - Einstein condensate. Science, 1998, 279(5353): 1005 - 1007.

第 24 章　慢光速与超光速

本章先介绍群速度与相速度、群速度与色散的关系，给出群速的慢光速与超光速的条件. 接着用三能级系统的光学布洛赫方程计算极化强度与折射率色散关系.

24.1　群速与相速的关系及其与折射色散的关系

24.1.1　相速度与群速度

简谐波的相速度定义为

$$v_p=\omega/\beta \tag{24.1}$$

其中 β 是传播常数，当介质中有多个不同频率的波时，情况比较复杂，为了解决这个问题，1839 年由 W. R. 哈密顿提出群速的概念. 1877 年，瑞利在其《声学理论》中定义了群速

$$v_g=\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}\beta \tag{24.2}$$

一般情况下 $v_p\neq v_g$，但对于非色散均匀介质中的平面波传播，相速与群速度相等：

$$v_g=v_p=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} \tag{24.3}$$

其中 ε_r 为介质的相对介电常数. 可以证明，相速与群速有下述关系：

$$v_g=v_p-\lambda\frac{\mathrm{d}v_p}{\mathrm{d}\lambda} \tag{24.4}$$

式中 λ 是波长. 很明显，对于非色散介质来说，$\mathrm{d}v_p/\mathrm{d}\lambda=0$，相速等于群速；对于正常色散来说，$\mathrm{d}v_p/\mathrm{d}\lambda>0$，$v_g<v_p$；对于反常色散来说，$\mathrm{d}v_p/\mathrm{d}\lambda<0$，$v_g>v_p$.

24.1.2　群速度与色散的关系

方程(24.4)也能写成

$$\frac{c}{v_g}=\frac{c}{v_p\left(1-\dfrac{\lambda}{v_p}\dfrac{\mathrm{d}v_p}{\mathrm{d}\lambda}\right)} \tag{24.5}$$

因为 $n=c/v_p$，n 是折射率，因而，$n_g=c/v_g$，n_g 是群速度折射率，上式也可

以写为：

$$n_g=\frac{n}{1-\frac{\lambda}{v_p}\frac{dv_p}{d\lambda}}=Kn \tag{24.6}$$

其中 $K=\left(1-\frac{\lambda}{v_p}\frac{dv_p}{d\lambda}\right)^{-1}$，根据二项式定理上式近似为

$$n_g\approx n+\omega\frac{dn}{d\omega} \tag{24.7}$$

一般来说，折射率 n 是频率的函数，即 $n=n(\omega)$，因此

$$v_g=\frac{c}{n_g}\approx\frac{c}{n+\omega\frac{dn}{d\omega}} \tag{24.8}$$

上式即为群速度与折射率的关系. 很明显，对于非色散介质来说，$dn/d\omega=0$，相速等于群速. 对于正常色散来说，$dn/d\omega>0$，$v_g<c$，在真空中群速度不能超过光速；当 $n+\omega\frac{dn}{d\omega}$很大时，出现群速的慢光速甚至接近零光速. 对于反常色散来说，$dn/d\omega<0$，当 $n+\omega\frac{dn}{d\omega}<1$ 时，则 $v_g>c$，即出现群速超光速；当 $n+\omega\frac{dn}{d\omega}<0$ 时，则出现负群速.

王力军[1]等对实验的原理作了如下的描述：设气体长度为 L，室内为真空时光通过的时间为 L/c，室内为介质时光通过的时间为 $L/v_g=n_gL/c$，所以，光脉冲从进入介质到出来与在真空中相比时间差为

$$\Delta T=\frac{L}{v_g}-\frac{L}{c}=(n_g-1)\frac{L}{c} \tag{24.9}$$

当 $n_g>1$ 时，$\Delta T>0$，$v_g<c$，即群速小于光速.

当 $0<n_g<1$ 时，$\Delta T<0$，$v_g>c$，即群速大于光速.

当 $n_g<1$ 时，$\Delta T<0$，表现为超前，也就是说，$n_g<1$ 时，好像光脉冲还未进入气室之前就离开了气室.

当 $n_g=0$ 时，$v_g\to\infty$.

上面计算的时间延迟的公式表明，折射率色散$\frac{dn}{d\omega}$的符号和大小对群速有绝对影响.

24.2 三能级系统的极化率与折射率色散的计算

本节计算三能级系统的极化率与色散$\frac{dn}{d\omega}$，证明$\frac{dn}{d\omega}$可以非常大，从而

有可能实现慢光速、超光速.

由于原子相干和量子干涉效应,三能级系统的情况和二能级是完全不同的,如图 24.1 所示,这种相干是通过外部的作用建立在双重态上的,假定偶极跃迁在单线与下面两条线上是允许的,在这种情况下三能级系统的极化率为

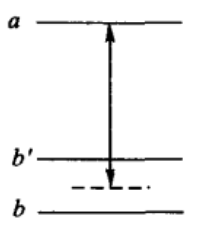


图 24.1 三能级系统的光学性质是被下面两临近能级相干作用影响

$$\chi=\frac{P}{\varepsilon_0 E}=-\left[\frac{\mu N}{\varepsilon_0 E}\rho_{ab}+\frac{\mu' N}{\varepsilon_0 E}\rho_{ab'}\right] \tag{24.10}$$

ρ_{ab} 和 $\rho_{ab'}$ 是非对角矩阵元,不仅仅只是由粒子数的不同决定,此外,新项 $\rho_{bb'}$ 和 $\rho_{b'b}$ 也表示两临近能级之间的相干作用

$$\dot{\rho}_{ab}=-(\mathrm{i}\Delta+\gamma_{ab})\rho_{ab}-\frac{\mathrm{i}\mu E}{\hbar}(\rho_{bb}-\rho_{aa})-\frac{\mathrm{i}\mu' E}{\hbar}\rho_{b'b} \tag{24.11}$$

$$\dot{\rho}_{ab'}=-(\mathrm{i}\Delta+\gamma_{ab'})\rho_{ab'}-\frac{\mathrm{i}\mu' E}{\hbar}(\rho_{b'b'}-\rho_{aa})-\frac{\mathrm{i}\mu' E}{\hbar}\rho_{bb'} \tag{24.12}$$

与二能级系统相反,这些附加项可能与低能级的粒子数成比例的抵消吸收,因此,低频相干可能导致无吸收共振和无反转激光. 在接近吸收为零时,上能级的粒子数为零,这有可能出现一个极大的折射率. 如果在激发态有相对少的粒子,在 $\mathrm{Im}P=0$ 时的频率上不仅折射率的导数,而且折射率本身也有一个较大的值. 这主要是由于量子相干,例如对于图 24.1,假定初态为

$$|\Psi(0)\rangle=a(0)|a\rangle+b(0)|b\rangle+b'(0)|b'\rangle \tag{24.13}$$

从激发态 a 跃迁到 b 和 b' 的总几率为

$$\begin{aligned}P_{\mathrm{em}}&=\{\dots\}\{|\mu_{ab}|^2\ |a(0)|^2+|\mu_{ab'}|^2\ |a(0)|^2\}\\&=\{\dots\}|\mu|^2 2\rho_{aa}(0)\end{aligned} \tag{24.14}$$

从基态 b 和 b' 到激发态 a 的吸收几率等于跃迁振幅和的模的平方

$$\begin{aligned}P_{abs}&=\{\dots\}\{|\mu_{ab}b(0)+\mu_{ab'}b'(0)|^2\}\\&=\{\dots\}|\mu|^2\{\rho_{bb}(0)+\rho_{b'b'}(0)+\rho_{bb'}(0)+\rho_{b'b}(0)\}\end{aligned} \tag{24.15}$$

在上面我们令 $\mu_{ab}=\mu_{ab'}=\mu$,$\{\dots\}$ 是系数因子,它包括辐射场的强度. 最后两项是相干对几率的贡献,它们不一定是正的,在一定的频率下有可能抵消前面的两项,而使得吸收几率为零.

下面从理论上分析三能级系统. 首先考虑一个简单的下面两能级相干的气体原子模型,如图 24.2,用相干的脉冲激发就能出现这种状态. 对于这种相干状态,第 i 个原子的密度矩阵的初始条件为

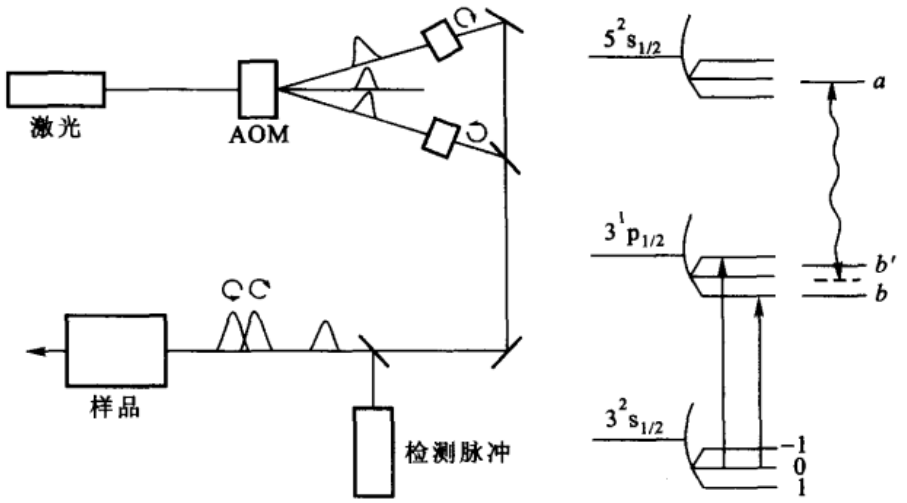


图 24.2 通过 Na 气体原子的脉冲激发来产生原子相干的实验装置.
用声光调制器(AOM)把强的线偏振泵浦脉冲分成频率不同的三部分,两个偏振器产生圆偏振光,使得泵浦光跃迁的 $\Delta m=\pm 1$,如右面的数字,两泵浦光脉冲的时间延迟是由调节方程 χ' 和 χ'' 中的位相 ϕ 来决定的.

$$\rho^i=\begin{bmatrix}\rho_{aa}^0 & 0 & 0\\ 0 & \rho_{b'b'}^0 & \rho_{b'b}^0\\ 0 & \rho_{bb'}^0 & \rho_{bb}^0\end{bmatrix} \tag{24.16}$$

原子以速率 ν 注入,因此密度矩阵元对时间的导数为

$$\dot{\rho}_{ab'}=-(\mathrm{i}\Delta_{ab'}+\gamma_{ab'})\rho_{ab'}-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\mu'(\rho_{b'b'}-\rho_{aa})E-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\mu\rho_{bb'}E \tag{24.17}$$

$$\dot{\rho}_{ab}=-(\mathrm{i}\Delta_{ab}+\gamma_{ab})\rho_{ab}-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\mu(\rho_{bb}-\rho_{aa})E-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\mu'\rho_{b'b}E \tag{24.18}$$

$$\dot{\rho}_{b'b}=\upsilon\rho_{b'b}^0-(\mathrm{i}\omega_{b'b}+\gamma_{b'b})\rho_{b'b}-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\mu'\rho_{ab}E^*-\mu\rho_{b'a}E) \tag{24.19}$$

$$\dot{\rho}_{aa}=\upsilon\rho_{aa}^0-\gamma_a\rho_{aa}-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[(\mu'\rho_{b'a}+\mu\rho_{ba})E-\mathrm{c.\,c.}] \tag{24.20}$$

$$\dot{\rho}_{b'b'}=\upsilon\rho_{b'b'}^0-\gamma_{b'}\rho_{b'b'}-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\mu'\rho_{ab'}E^*-\mathrm{c.\,c.}) \tag{24.21}$$

$$\dot{\rho}_{bb}=\upsilon\rho_{bb}^0-\gamma_b\rho_{bb}-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\mu'\rho_{ab}E^*-\mathrm{c.\,c.}) \tag{24.22}$$

上面描述的是光场和原子集体的动力学性质,再加上传播方程就能解出光脉冲在介质中传播的具体情况. 在慢变包络近似下由麦克斯韦方程可以得到如下的传播方程:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+c\frac{\partial}{\partial z}\right)E(z,t)=\mathrm{i}gN\rho_{ba}(z,t) \tag{24.23}$$

其中 E 为慢变振幅. 引入 $\gamma_{ab}=(\gamma_a+\gamma_b)/2$, $\Delta_{ab}=\omega_{ab}-\nu$, ν 是探测光的频率, 则在定态条件下, 有 $\dot{\rho}_{ab'}=0$, $\rho_{ab}=0$, 由(24.17)和(24.18)得

$$\rho_{ab'}=\frac{\mathrm{i}}{\hbar}E\frac{1}{\gamma_{ab'}+\mathrm{i}\Delta_{ab'}}[\mu'(\rho_{aa}-\rho_{b'b'})-\mu\rho_{bb'}] \tag{24.24}$$

$$\rho_{ab}=\frac{\mathrm{i}}{\hbar}E\frac{1}{\gamma_{ab}+\mathrm{i}\Delta_{ab}}[\mu(\rho_{aa}-\rho_{bb})-\mu''\rho_{b'b}] \tag{24.25}$$

为了分析激光场的零阶导数, 把 ρ_{aa}, $\rho_{b'b'}$, ρ_{bb} 和 $\rho_{bb'}$ 的零阶导数 $\rho_{aa}^0=\frac{v\rho_{aa}^0}{\gamma_a}$, $(\alpha=a,b,b')$, $\rho_{b'b}^0=\frac{v\rho_{b'b}^0}{\mathrm{i}\omega_{b'b}+\gamma_{b'b}}$ 代入上面的方程, 得

$$\chi'=\frac{\mu^2 v}{\hbar\varepsilon_0 V}\left\{\frac{1}{\gamma_{ab'}^2+\Delta_{ab'}^2}\left[\left[\Delta_{ab'}\left[\frac{\rho_{aa}^0}{\gamma_a}-\frac{\rho_{b'b'}^0}{\gamma_{b'}}\right]\right]-\frac{|\rho_{b'b}^0|}{(\gamma_{b'b}^2+\omega_{b'b}^2)^{1/2}}(\Delta_{ab'}\cos\phi+\gamma_{ab'}\sin\phi)\right]\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\gamma_{ab}^2+\Delta_{ab}^2}\left[\left[\Delta_{ab}\left[\frac{\rho_{aa}^0}{\gamma_a}-\frac{\rho_{bb}^0}{\gamma_b}\right]\right]-\frac{|\rho_{b'b}^0|}{(\gamma_{b'b}^2+\omega_{b'b}^2)^{1/2}}(\Delta_{ab}\cos\phi-\gamma_{ab}\sin\phi)\right]\right\} \tag{24.26}$$

$$\chi''=\frac{\mu^2 v}{\hbar\varepsilon_0 V}\left\{\frac{1}{\gamma_{ab'}^2+\Delta_{ab'}^2}\left[\left[\gamma_{ab'}\left[\frac{\rho_{aa}^0}{\gamma_a}-\frac{\rho_{b'b'}^0}{\gamma_{b'}}\right]\right]-\frac{|\rho_{b'b}^0|}{(\gamma_{b'b}^2+\omega_{b'b}^2)^{1/2}}(\gamma_{ab'}\cos\phi-\Delta_{ab'}\sin\phi)\right]\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\gamma_{ab}^2+\Delta_{ab}^2}\left[\left[\gamma_{ab}\left[\frac{\rho_{aa}^0}{\gamma_a}-\frac{\rho_{b'b'}^0}{\gamma_b}\right]\right]-\frac{|\rho_{b'b}^0|}{(\gamma_{b'b}^2+\omega_{b'b}^2)^{1/2}}(\gamma_{ab'}\cos\phi+\Delta_{ab'}\sin\phi)\right]\right\} \tag{24.27}$$

V 是相互作用的体积, 位相 ϕ 是由下式定义的, $\frac{\mu'\mu\rho_{b'b}^0}{\gamma_{b'b}+\mathrm{i}\omega_{b'b}}=\frac{\mu^2|\rho_{b'b}^0|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}}{(\gamma_{b'b}^2+\omega_{b'b}^2)^{1/2}}$, 为了简便, 令 $\mu'=\mu$.

从上面的方程看到, 吸收(χ'')消失时, 仍会保持一个很大的极化率(χ'), 定义 $\Delta=(\Delta_{ab}+\Delta_{ab'})/2$, 通过调节磁场强度来调节 $\omega_{b'b}$ 的值, 使得 $\omega_{b'b}=\gamma_{b'b}$, 同时考虑到外部原因, $\gamma_b=\gamma_{b'}$, 最后使得能级 b' 和 b 相干, 因而, $\phi=5\pi/4$, $\rho_{bb}^0=\rho_{b'b}^0=|\rho_{b'b}^0|$. 极化的结果如图 24.3 所示, 很明显, 在零吸收时能得到高的折射率.

下面再分析一下以上所涉及的情况, $\gamma_b=\gamma_{b'}=\gamma$, 当 $\Delta\approx1.1\gamma$, 有一小部分的原子在激发态 a 上时, 吸收消失, 极化率的实部为

$$\chi'\approx\frac{1}{10}\frac{\mu^2 N_a}{\hbar\varepsilon_0\gamma} \tag{24.28}$$

其中 $N_a=v\rho_{aa}^0/V\gamma$ 是激发态 a 上的原子密度, 当辐射衰减 $\gamma_r=\mu^2 v^3/$

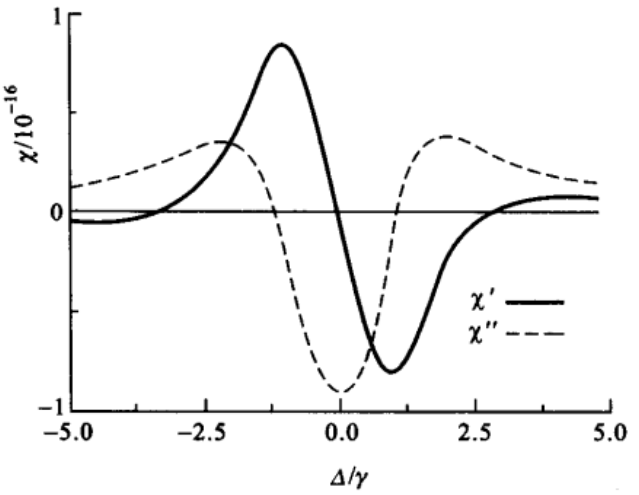


图 24.3 对于注射原子相干的情况，极化率的实部(实线)和虚部(虚线)是失谐量 Δ 的函数

$6\pi\hbar\varepsilon_0 c^3$ 时，上式变为 $\chi' \approx \frac{1}{10}\frac{3\lambda^3}{4\pi^2}\frac{\gamma_r}{\gamma}N_a$.

因此，在透明介质中能够得到大的极化率，例如，$N_a = 10^{11}\,\mathrm{cm}^{-3}$(气压 0.133 Pa，室温下，有相同密度的原子受激发后，有 1%的原子在激发态上)，并且假定是纯辐射衰减($\gamma_r = \gamma$)，$\lambda = 1\ \mu\mathrm{m}$，在完全透明时能得到 $\chi' \approx 7\times10^{-4}$. 这是在同样压力下，比一般透明气体所能达到的值大三个数量级.

由 $n^2 = 1+\chi$，折射率的实部为 $n \approx 1+\frac{1}{2}\chi'$，虚部 $n \approx \frac{1}{2}\chi''$. 因此，由 $\chi'(\omega)$和 $\chi''(\omega)$可知折射率与 ω 的关系——色散关系. 而$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\omega}$的关系是讨论慢光速、超光速的关键.

24.3 群速的慢光速与超光速实验

上节的理论计算表明，$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\omega}$的绝对值可以很大，这对群速有决定性影响. 因此可能出现慢光速、超光速、负光速. 本节介绍典型的实验结果.

24.3.1 慢光速($v_g < c$)、零光速

由群速度与折射率的关系 $v_g = \frac{c}{n_g} \approx \frac{c}{n+\omega\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\omega}}$ 可知，即当 $n+\omega\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\omega}$远远

大于 1 时，就可以使得 v_g 变小获得极慢光速，所以，获得折射率随光波频率变化很大的正常色散介质是必需的. 在与介质发生共振频率的附近，可以得到斜率很大的 $n\sim\omega$ 曲线，此时极化率的虚部即吸收也取极大值，这时光脉冲被强烈吸收. 若 $n+\omega\dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\omega}$ 非常大时，$v_g\to 0$，可以使光停下来，而实现零光速.

北京大学陈徐宗教授的实验小组利用 EIT 介质实现了光脉冲的减慢，选用 $F=3\to F'=2$ 跃迁来构成简并结构，这种情况下 EIT 信号强.

图 24.4(a)是两个探测器接受到的光脉冲，其中幅度大的是光脉冲传播的，幅度小的通过了 EIT 介质，可见信号被衰减得很厉害(大约衰减到 10%). 图 24.4(b)是将两路信号的幅度作归一化以后得到的，可见，经过 EIT 介质以后的脉冲形状基本上和原来保持一致，同时比在空气中传播的脉冲慢了 2.6 μs 到达探测器.

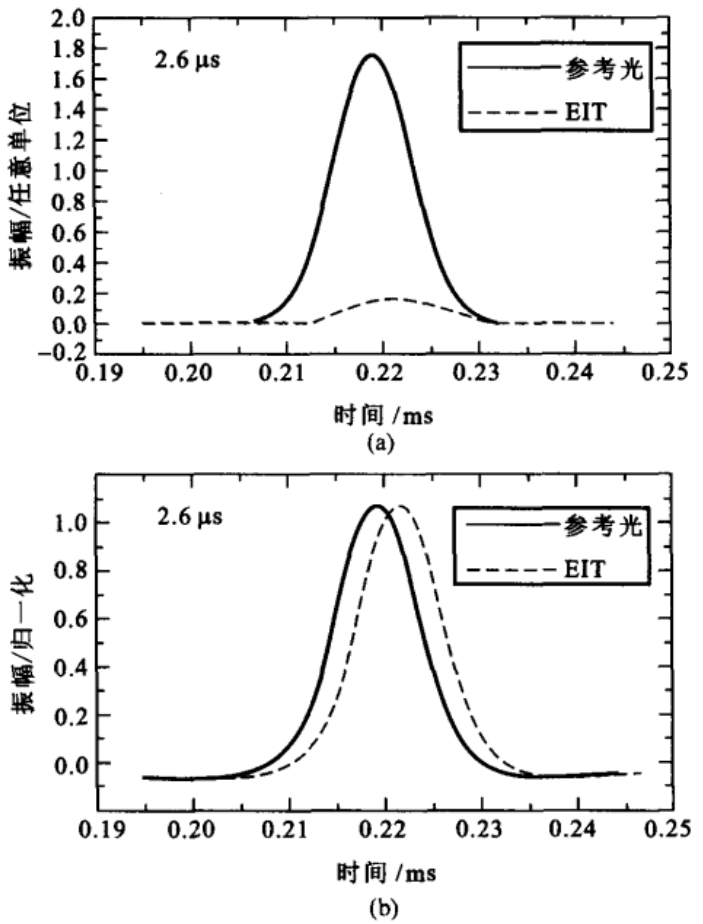


图 24.4 EIT 介质中光脉冲群速度的减慢

慢光速的可能应用是作为光学延迟线或光信息存储. 这对于光信息

技术有重要意义.

24.3.2 超光速($v_g>c$)

从上一节可知,在反常色散介质中,有$\frac{dn}{d\omega}<0$,在共振频率的附近,可能得到$n+\omega\frac{dn}{d\omega}<1$或者$\frac{dn}{d\omega}<\frac{1-n}{\omega}$,从而使得$v_g>c$,当$n+\omega\frac{dn}{d\omega}=0$时,群速度$v_g\to\infty$.因此在反常色散足够强时群速能够超过光速.

24.3.3 王力军小组的实验

王力军等人的实验[1]使用的介质是 6 cm 厚的铯原子气体池,其中有两束连续的激光穿过气体池使铯原子气体处于粒子数反转状态(这两束光简称为泵浦光).当另一束激光(用来检测铯原子气体的光学性质,因而把它称为探测光束)通过气体池时,就会使铯原子从泵浦光中吸收光子而激发,随后又放出光子.这样一来就增强了那束探测光束(增益效应).这种机理使得铯原子气体表现出了如下的光学特性:不同频率的光在其中会有不同的增益和不同的速度.

实验中使用一束可调谐的连续激光测得了铯原子气体中光波振幅的增益系数以及折射率随光波频率的变化曲线,如图 24.5 所示.

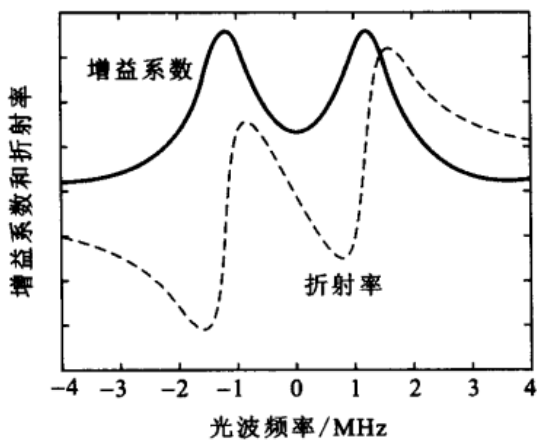


图 24.5 光波振幅的增益系数以及折射率随光波频率的变化曲线[1]

图中显示的折射指数 n 随光波频率 ν 的变化,曲线包含了两类区域:正常色散区域(光波频率增加时,折射率变大)和反常色散区域(光波频率增加时,折射率变小).一个光脉冲(或称波包)在通常的正常色散介质中传播时基本不会改变它的形状,或者说,光脉冲整体有一定的传播速度

(群速度). 在现在的情况下,因为存在色散和增益效应,一个高斯光脉冲通过铯原子气体池后其形状会发生变化. 由于脉冲形状发生了变化,所以脉冲的不同部分可能有着不同的传播速度. 这样一来,群速度已不能简单地说成是脉冲的传播速度了. 尽管如此,仍可按照群速度的定义 $v_g=c/n_g$,其中 $n_g=n+\omega \mathrm{d}n/\mathrm{d}\omega$ 称为群速折射率,并使用图中给出的折射率曲线计算出群速度为:$v_g=-c/(330\pm30)$. 这是个负的群速度,但其绝对值是真空光速 c 的 1/330. 负号是指其方向与入射方向相反,即反向"传播".

实验中使用两束光强接近于高斯分布的光脉冲穿过气体池,其中一束处于反常色散区域(因而,它的传播速度一般不同于真空中的光速 c). 另一束与铯原子基本没有相互作用(因而,它会以真空光速传播). 放在气体池"出口"处的光电仪器记录下了这两个光脉冲通过气体池后的强度随时间的变化,如图 24.6 所示.

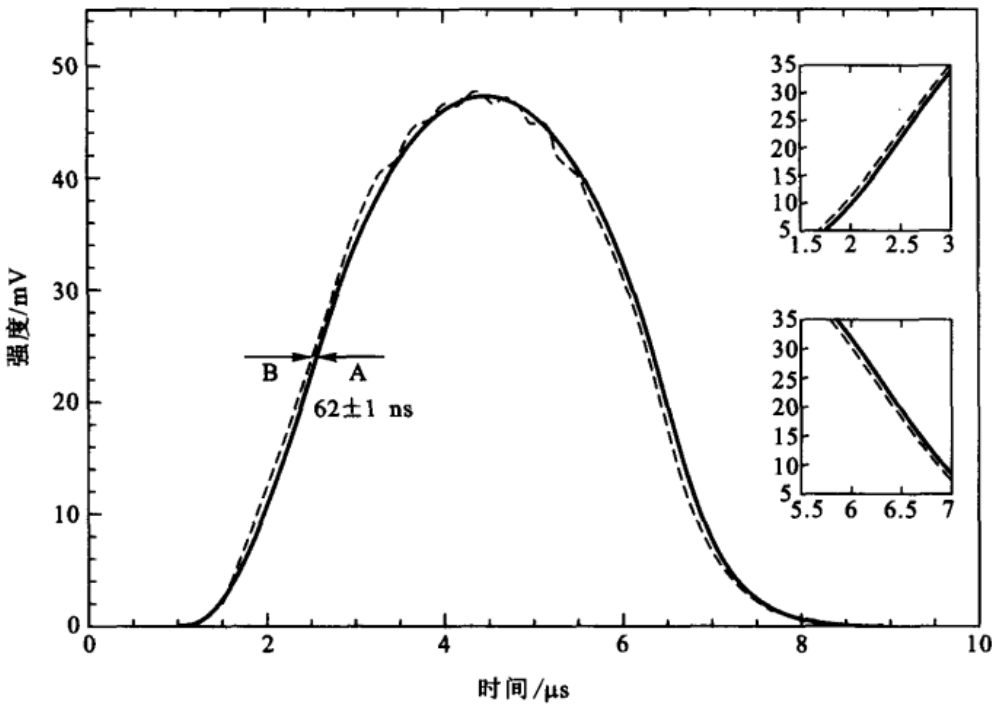


图 24.6 两个光速通过气体池后的强度随时间的变化[1]

图中虚线(记录光束通过反常色散区)的半高点比实线(记录光速传播)的半高点超前 62±1 ns 到达气体池的出口,相当于群速度 $v_g=-c/(310\pm5)$.

24.3.4 负群速($v_g<0$)

在反常色散介质中，在一定频率下，$n+\omega\dfrac{dn}{d\omega}$的值可以减小到小于零，即 $n+\omega\dfrac{dn}{d\omega}<0$，此时 $v_g\approx c/(n+\omega\dfrac{dn}{d\omega})<0$，即可以实现负群速. 可见，负群速是超光速的一种特殊情况.

1914 年，L. Brillouin[9] 用鞍点积分法求解 Sommerfeld 的积分方程，经过复杂的演算和在复 P 平面上的作图分析，他得到一些结果，如图 24.7 所示，在远离中心频率(或者说反常色散区)，即 $\omega<\omega_1$，$\omega>\omega_4$ 时，群速度小于光速($v_g<c$)，当 $\omega_1<\omega<\omega_2$，$\omega_3<\omega<\omega_4$ 时，群速度大于光速($v_g>c$)，在 ω_0 附近一个窄频段内($\omega_2<\omega<\omega_3$)，群速度 v_g 也是大于光速的.

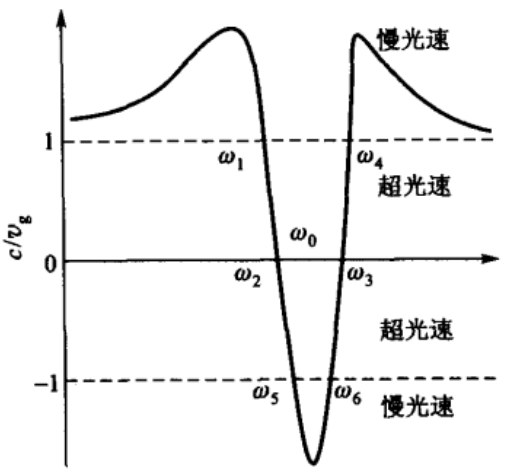


图 24.7 群速与频率的关系[9]

24.4 群速超光速实验现象与相对论

本节讨论超光速实验的争论、超光速数字通信可能性的实验检验以及关于光速不变原理的新检验.

24.4.1 关于超光速的争议与实验

关于超光速的实验的含义与解释，存在很大争议. 学者们多认为这与因果关系没有矛盾. 超光速实验现象可能是假象或表观现象.

一种解释是考虑光脉动是很多频率成分的叠加. 由于色散作用，这些

不同频率成分产生位相移动，重新叠加、组合的结果，使得脉动的峰值位置发生了移动，表现为超光速. 还有人对前述实验条件下的群速定义提出质疑.

近十几年以来，国外对超光速脉冲传输的实验研究，取得了显著进展. 这些实验结果已在最著名的杂志发表.

(1) Nature 杂志[1]，2000 年发表了王立军等人的实验研究，表明光脉冲在负色散介质中的群速度超过了真空中的光速.

(2) 2003 年 Bigelow 等人的实验研究，观察到在室温下的固体样品中，脉冲传输的群速可以超光速(也可以慢光速).[2]

(3) 2000 年 Mugnai 的实验研究表明微波传输的速度超过了真空中的光速.[3]

(4) 2002 年发表了 Hache A 的实验观察到电脉冲在同轴光子晶体中的长程超光速传输[4].

(5) 2003 年 Stenner 的实验研究表明单个光脉冲在负色散介质中传输时，群速超过了真空中的光速. 但是，两个光脉冲组合起来时，波形的“非连续点”或“微分的非连续点”的速度不能超过光速. 他们把该点的传输速度定义为信息传输速度. 实验表明，这样定义的“信息速度”没有达到超光速.[5]

(6) 2002 年 Munday 的实验观察到电脉冲在同轴光子晶体中的负群速传输(负群速传输是对超光速群速传输实验的支持).[6]

其他杂志还发表了许多有关群速超光速的实验结果，还有不少研究超光速传输的理论文章. 例如，Optics Communication 杂志报道了 150 fs (飞秒)T 赫兹(10^{12} Hz)脉冲在波导中的传输，发现了“信息交换”可以超光速，但认为超光速通信是不现实的.[7]

还有人从理论上研究了光子晶体中的超光速问题.

综上所述，Nature、Science、Phys. Rev. Letters 和 Appl. phy. Letters 等著名杂志的文章表明，实验已经证明了脉冲传输的群速可以超过真空中的光速，但人们仍未实现超光速通信.

此外，还有天文学中的超光速现象、星子隧道效应中的超光速现象等.

24.4.2 超光速通信可能性的实验检验

现在要问，光脉冲在负色散介质中的超光速现象，有没有技术应用的可能性？为此，可进行一些实验. 例如，

(1) 使入射的光脉动先通过一个模拟图像(例如“+”字)，然后进入

快光介质，检验从快光介质中输出的光脉冲是否携带了原来的图像信息.

(2) 将入射的多个光脉动编码，携带数字信息，该数字脉冲进入快光介质，检验从快光介质中输出的光脉动是否携带了原来的数字信息.

(3) 使多路光脉动对图像进行并行传输，使其进入快光介质，检验从快光介质中输出的多路光脉动是否完成了图像的并行传输.

(4) 使用 n 路光脉动，各路脉动有适当的延迟，等价于数字脉冲串. 使它们分别通过 n 个单独的快光介质，再进入同一个探测器检验是否实现了超光速数字通信传输. 这种情况的成功几率较大，而且与习惯观念的冲突不大. 万一这类实验取得成功，再设法提出新的理论解释.

24.4.3 慢光速、超光速与相对论

超光速实验现象与爱因斯坦相对论的关系，是人们争论的焦点. 但是爱因斯坦本人对光速不变原理有几种不同的说法.

这里要强调指出，似乎人们认为超光速实验现象与相对论矛盾，而慢光速与相对论没有矛盾. 人们对慢光速实验现象的态度更“宽容”一些. 其实不然，慢光速与超光速实验现象与相对论的关系是一样的，或者都有矛盾，或者都无矛盾. 爱因斯坦说“光速不变”，慢光速当然也不符合“光速不变”.

建议用实验检验慢光速脉冲是否满足光速不变原理. 例如，使慢光速整个实验装置或者是慢光介质以一定速度 v_s 运动. 设慢光脉冲速度是 c_s，当慢光介质运动时，光脉冲的运动速度 v 是 c_s 还是 v_s+c_s? 如果实验证明 $v=v_s+c_s$，则表明慢光速脉冲不服从光速不变原理. 若实验证明 $v=c_s$，则有助于人们加深对慢光速机理的理解.

建议进行的另一个实验是检验超光速脉冲传输是否满足光速不变原理. 若快光介质以 v_f 运动，原来的超光速脉冲速度是 c'_f(超快介质不动时)，当快光介质以 v_f 运动时，实验若证明光脉冲速度 $c_f=v_f+c'_f$，则证明超光速脉冲不服从光速不变原理. 若实验证明 $c_f=c'_f$，也提出了新的问题.

总之，以上若干实验，不论得到正的结果还是负的结果都是有意义的.

习题与思考

(1) 导出三能级系统的光学布洛赫方程.

(2) 讨论产生强的负色散曲线的方法.

(3) 什么是相速？什么是群速？详加讨论.

(4) 求出群速与折射率的关系.

(5) 讨论图 24.5 的折射率曲线的来源与意义.

(6) 对群速、超光速、负群速的实验现象及其机理提出自己的看法.

(7) 你认为介质中慢光速与超光速是否服从速度叠加原理，与介质运动速度是否有关.

参 考 文 献

[1] Wang L J, Dugmich A, Dogariu A. Gain asisted superluminal light propagation. Nature, 2000, 406: 277 - 279.

[2] Bigelow M S, Leperhdin N N, Boyd R W. Superluminal and slow light propagation in a room temperature solid. Science, 2003, 301: 200 - 202.

[3] Mugnai D, Ranfagmi A, Ruggeri R. Observation of superluminal behaviors in wave propagation. Phys. Rev. Lett., 2000, 84(21): 4830 - 4833.

[4] Hache A, Poirier L. Long range superluminal pulse propagation in a coaxial photonic crystal. Appl. Phys. Lett., 2002, 80(3): 518 - 520.

[5] Stenner M D, Gauthier D J, Neifeld M A. The speed of information in a fast-light optical medium. Nature, 2003, 425: 695 - 698.

[6] Munday J N, Robertson W M. Negative group velocity pulse tunneling throngh a coaxial photonic crystal. Appl. Phys. Lett., 2002, 81(11): 2127 - 2129.

[7] Wynne K, Carey J J, Justyma Zawadgka, et al.. Tunneling of a single-cycle teraherz pulses through waveguides. Opt. Communication, 2000, 176: 429 - 435.

[8] Huang Zhixun, Lu Guizhen, Guan Jian. Superluminal and negative group velocity in the electromagnetic wave propagation. Engineering Sciences, 2003, 1(2): 35 - 39.

[9] Brillouin L. Uber die fortpflanzung des lichtes in dispergierenden medien. Ann. d. Phys., 1914, 44(1): 203 - 208.

第25章 光子晶体

25.1 光子晶体的概述

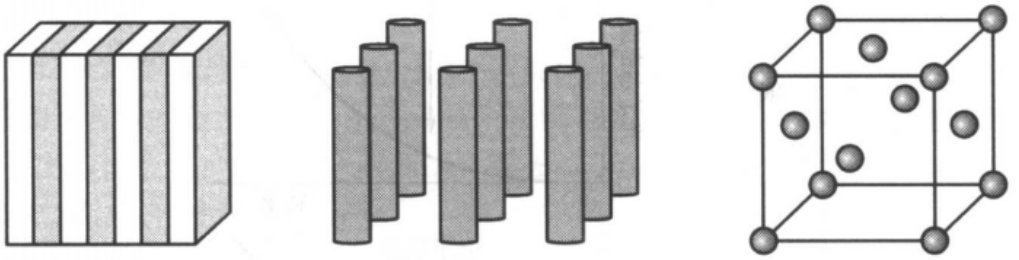
20世纪，在物理科学发展上可以被称作为“电的世纪”，电已经走进我们现代生活的每一个角落. 在过去的50年里，对半导体技术的深入研究和广泛应用推动了电子工业和信息产业的迅速发展. 目前，半导体技术正向着高速度、高集成化方向发展，为了获得更小的电路体积和更高的信息交换速度，科技人员进行了不断的研究与探索，但是一系列问题也摆在了人们的面前. 比如线路越细电阻就越大，电路中能量损耗也越大，从而导致集成电路发热. 此外，信息传输速度越高对信号同步的准确性要求也更高，半导体器件的能力已接近了极限.

信息业的梦想之一，是由光子替代电子传递信息，因光子具备了电子所不具备的许多优势[1]. 首先光子的传播速度快，在介电材料中的传播速度已达到10^8 m/s数量级. 而电子在金属中的传播速度只能达到10^4～10^5 m/s数量级. 其次，光作载体每秒可以携带更多的信息，而且在电介质的传输带宽要远大于金属导线：光纤系统的带宽可能达到10^{12} Hz数量级，而金属导线（如电话线）的带宽只能达到10^5 Hz数量级. 另外重要的一点是，光子之间没有电子之间那么强的相互作用，使之传输时极大地降低了能量损耗. 目前我们对光的通信传输、处理和应用还十分有限，虽然我们在利用光传输信息的研究方面迈出了可喜的一步，即光纤的使用，但信息输入和输出光纤仍然依靠传统的电子器件，从而大大限制了传输的效率. 由于制作一个与半导体器件有类似功能的光学器件的难度很大，使能够集收集、处理、传输于一体的光学系统无法广泛使用. 20世纪80年代末光子晶体的出现可能改变这种现状. 光子晶体的研究已不仅仅是通信领域的问题，它同时对其他相关产业都将产生巨大的影响.

25.1.1 光子晶体的概念

1987年，Yablonovitch和John分别在讨论周期性电介质结构对材料中光传播行为的影响时，各自独立地提出了“光子晶体”这一新概

念[2,3]. 我们知道,在半导体材料中由于周期势场作用,电子会形成能带结构,带与带之间有能隙(如价带与导带). 光子的情况其实也非常相似. 如果将具有不同介电常数的介质材料在空间按一定的周期排列(如图 25.1),由于存在周期性,在其中传播的光波的色散曲线将成带状结构,带与带之间有可能会出现类似于半导体禁带的"光子禁带"(photonic bandgap). 频率落在禁带中的光是被严格禁止传播的(如图 25.2). 如果只在一个方向具有周期结构,光子禁带只可能出现在这个方向上. 如果存在三维的周期结构,就有可能出现全方位的光子禁带,落在禁带中的光在任何方向都被禁止传播. 这种将具有光子禁带的周期性电介质结构称为光子晶体(photonic crystal). 光子晶体可分为一维光子晶体、二维光子晶体和三维光子晶体. 绝大多数光子晶体都是人工设计制造出来的,但是自然界也存在光子晶体的例子,如蛋白石、蝴蝶翅膀等.



一维光子晶体　　二维光子晶体　　三维光子晶体

图 25.1　光子晶体空间结构示意图

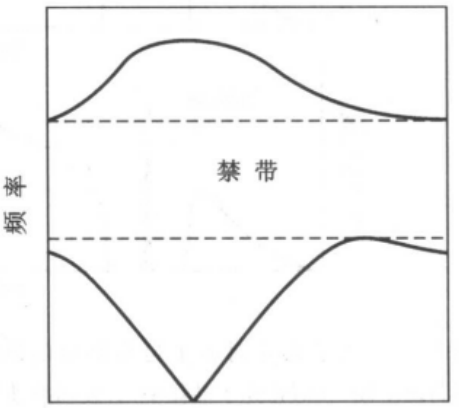


图 25.2　光子禁带示意图

25.1.2　光子晶体的特征

光子晶体的最根本特征是具有光子禁带,落在禁带中的光是被禁止

传播的. Yablonovitch 指出[2]光子晶体可以抑制自发辐射. 这是因为，自发辐射的几率与光子所在频率的态的数目成正比，当原子被放在一个光子晶体里面，而它自发辐射的光频率正好落在光子禁带中时，由于该频率光子的态的数目为零，因此自发辐射几率为零，自发辐射也就被抑制，反过来，光子晶体也可以增强自发辐射，只要增加该频率光子的态的数目便可实现. 如在光子晶体中加入杂质，光子禁带中会出现品质因子非常高的杂质态，具有很大的态密度，这样便可以实现自发辐射的增强（如图 25.3）.

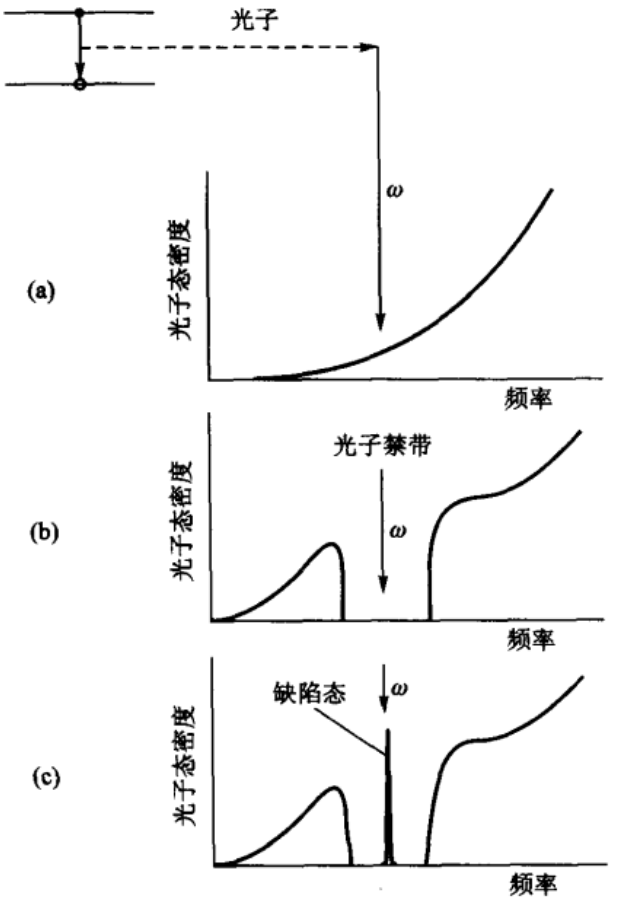


图 25.3 光子禁带对原子自发辐射的影响

(a)在自由空间 (b)在光子晶体中(自发辐射被抑制)

(c)在有缺陷的光子晶体中(自发辐射被增强)

光子禁带的出现依赖于光子晶体的结构和介电常数的配比. 一般来说，光子晶体中两种介质的介电常数比越大，入射光将被散射得越强烈，就越有可能出现光子禁带. 影响禁带的存在还有一个重要因素：晶体的几何构形.

光子晶体的另一个主要特征是光子局域. John 于 1987 年提出[3]：在一种经过精心设计的无序介电材料组成的超晶格(相当于现在所称的光子晶体)中，光子呈现出很强的安德森(Anderson)局域. 如果在光子晶体中引入某种程度的缺陷，和缺陷态频率吻合的光子有可能被局域在缺陷位置，一旦其偏离缺陷处光就将迅速衰减. 当光子晶体理想无缺陷时，根据其边界条件的周期性要求，不存在光的衰减模式. 但是，一旦晶体原有的对称性被破坏，在光子晶体的禁带中央就可能出现频宽极窄的缺陷态[如图 25.3(c)]. 光子晶体有点缺陷和线缺陷. 在垂直于线缺陷的平面上，光被局域在线缺陷位置，只能沿线缺陷方向传播. 点缺陷仿佛是被全反射墙完全包裹起来. 利用点缺陷可以将光“俘获”在某一个特定的位置，光就无法从任何一个方向向外传播，这相当于微腔.

表 25.1 给出了光子晶体和半导体特性的比较. 从表中不难看出：光子晶体与半导体在构成的物理思想上有惊人的相似之处，可以将半导体的研究方法移植到光子晶体中. 当然必须注意的是：光子是玻色子，而电子是费米子.

表 25.1 光子晶体和半导体特性的比较

	光子晶体	半导体
结构	不同介电常数介质的周期分布	周期性势场
研究对象	电磁波(光)在晶体中的传播，玻色子	电子的运输行为，费米子
本征方程	$\left[\nabla\times\left(\frac{1}{\epsilon(x)}\nabla\times\right)\right]\boldsymbol{H}(x)=\frac{\omega^2}{c^2}\boldsymbol{H}(x)$	$\left[-\frac{\eta^2}{2m}\nabla^2+V(r)\right]\phi(r)=E\phi(r)$
本征矢	电场强度、磁场强度：矢量	波函数：标量
特征	光子禁带	电子禁带
	在缺陷处的局域模式	缺陷态
	表面态	表面态
尺度	电磁波(光)波长	原子尺寸

25.2 光子晶体中的场方程与布洛赫方程[9]

在研究光子晶体内的光与物质作用时，必须引入场方程与布洛赫方程.

25.2.1 场方程

光子晶体具有周期性结构，与普通晶体相似，所以光子晶体也可以用

能带、能隙、能态密度、缺陷态等概念来描述. 与电子不同的是光子是自旋为1的玻色子,是矢量波,因此,计算光子晶体的能带结构必须在矢量波理论的框架下,从麦克斯韦方程出发. 从电磁场理论知道,在介电系数$\varepsilon(r)$呈空间周期性分布的介质中,频率为ω的单色电磁波(光波)的传播,服从麦克斯韦方程组:

$$\nabla \times \boldsymbol{E}=\frac{\mathrm{i}\omega\mu}{c}\boldsymbol{H} \tag{25.1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H}=\frac{-\mathrm{i}\omega\varepsilon}{c}\boldsymbol{E} \tag{25.2}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H}=\frac{-\mathrm{i}\omega\varepsilon}{c}\boldsymbol{E} \tag{25.3}$$

$$\nabla \cdot (\mu \boldsymbol{H})=0 \tag{25.4}$$

这里,c是真空中的光速. 设$\mu=1$(电介质为非磁性介质)并消去$\boldsymbol{H}$,得到关于电场$\boldsymbol{E}$的方程:

$$\nabla^2 \boldsymbol{E}(r)+\frac{\omega^2\varepsilon}{c^2}\boldsymbol{E}(r)=0 \tag{25.5}$$

如果介电常数是周期性变化的,就有:

$$\varepsilon(r)=\varepsilon(r+R_n) \tag{25.6}$$

这里,R_n是任意光学超晶格的晶格矢量. 另外,可以将介质的介电常数写为两部分之和:

$$\varepsilon(r)=\varepsilon_0+\varepsilon_s(r) \tag{25.7}$$

这里,ε_0是背景(基质)的介电常数,$\varepsilon_s(r)$是晶格介质(散射体)的介电常数. ε_0也可以是整个介质的平均介电常数(等效介质的介电常数),而此时的$\varepsilon_s(r)$则是散射体相对于等效介质的介电常数. 将(25.7)式代入(25.5)式,则有

$$\left[-\nabla^2+\left(\frac{\omega}{c}\right)^2(-\varepsilon_s(r))\right]E(r)=\frac{\omega^2}{c}\varepsilon_0 E(r) \tag{25.8}$$

这是一个矢量方程,但可以化成标量方程:

$$\left[-\nabla^2+\left(\frac{\omega}{c}\right)^2(-\varepsilon_s(r))\right]\phi(r)=\frac{\omega^2}{c}\varepsilon_0\phi(r) \tag{25.9}$$

而电子的德布罗意波所遵从的方程为:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V(r)\right]\phi(r)=E\phi(r) \tag{25.10}$$

从方程(25.9)和(25.10)比较可以看出,光波所遵从的方程与电子的德布罗意波所遵从的方程相似. 它们的系数对应关系如下:

$$\left.\begin{array}{l}\left(\dfrac{\omega}{c}\right)^2(-\varepsilon_s(r))\to V(r)\\ \dfrac{\omega^2}{c}\varepsilon_0\to E\end{array}\right\} \tag{25.11}$$

如果 R_n 为波长的量级，则光子在此介质中运动将形成能带结构. 若光子频率落在禁带(gap)内，则此光子不会通过介质，而全部被反射掉.

25.2.2 布洛赫方程

与激光的拉姆理论或哈肯理论相似，还应在光子晶体中引入布洛赫方程. 在光与物质作用的问题中，场由光子晶体的场方程描述，而物质则由布洛赫方程描述. 布洛赫方程本质上也是量子力学的一种形式. 这会大大扩展激光物理的研究内容. 当然也可以用一般的量子力学形式取代布洛赫方程.

25.3 光子晶体光纤

1996 年英国 Bath 大学的 Russell 等人研制出第一根光子晶体光纤. 光子晶体光纤有独特的传输特性、色散特性和非线性.

25.3.1 光子晶体光纤的概念

传统的光纤是利用光全反射途径来实现的，但纤芯和包层之间折射比小以及纤芯固体物质对传输光波波长的要求限制了它的应用. 1996 年，Knight 等制得一个固体纤芯的光子晶体光纤(图 25.4)，它应用的原理类似于全反射，但 Suzuki 等证明它可以使传输光损失明显降低. 1999 年，Cregar 等又制得了空气纤芯的光子晶体光纤. 由于不存在比空气折射率更低的固体物质，一般的空气纤芯光纤不能用来传输光波，而在空气纤芯周围引入周期性排列的包层(二维光子晶体)，使传输光的波长和光子带隙的频率相吻合，光波将只能沿着空气纤芯传播. 光子晶体光纤的出现，大大减低了传输光能量的损失.

根据光子晶体光纤传导机理的不同可以将其分为折射率引导型(Index-Guiding)光子晶体光纤和带隙波导型光子晶体光纤. 前者形成周期性结构缺陷的是熔融硅(或掺杂的熔融硅)，中间的缺陷相当于纤芯，而外围的周期性区域相当于包层，两者之间形成一定的有效折射率差，从而使光可以在芯层中传播，传输机理仍然是全内反射. 但由于包层含有气孔，与传统光纤的“实芯”熔融硅包层不同，因而叫做改进的全

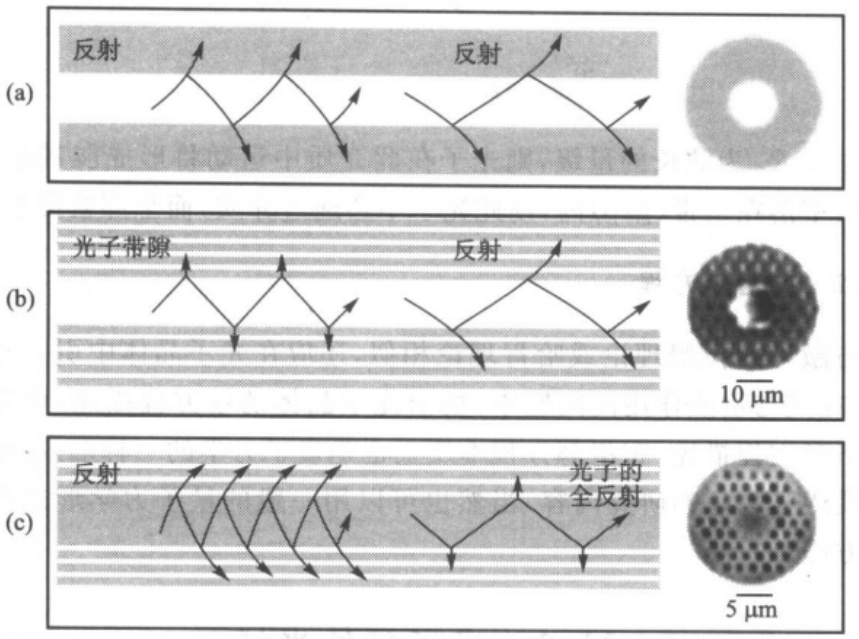


图 25.4 光子晶体光纤

(a)空气纤芯的一般光纤及传输机理 (b)空气纤芯的光子晶体光纤及传输机理
(c)固体纤芯的光子晶体光纤及传输机理

内反射(modified total internal reflection). 后者形成周期性结构缺陷的是空气,传输机理是利用包层对一定波长的光形成光子带隙,光波只能在气芯形成的缺陷中存在和传播,叫做光子带隙效应(photonic bandgap effect).

尽管空芯光子晶体光纤已在实验中证实且结果令人鼓舞,它可以传输极高功率的激光束而由于在空气中传输故仅具有极低损耗,但值得注意的是目前大多数的光子晶体光纤都是折射率引导型的,光子禁带的作用很小. 对于带隙波导型光子晶体光纤,因为若要形成完全的二维光子禁带,需要一个比较大的空气填充比例(空气孔直径和空间距之比不小于40%)和精确的周期性结构,在目前的工艺水平下,这种光纤的制备难度比较大. 相比之下,折射率引导型光子晶体光纤对结构的不完善性有着更强的承受力,甚至可以对周期性没有任何要求. 因此这种光纤制备难度相对较小,它也是近年来发展最迅速的光子晶体光纤.

光子晶体光纤包层中空气孔特殊的排列结构使得其呈现出许多在传统光纤中难以实现的特性,这些特性突破了传统光纤光学的局限,大大拓展了光子晶体光纤的应用范围,在超快激光光学、光通信、微光电子学及强场物理学等领域开辟了新的研究方向.

25.3.2 无截止单模(endlessly single mode)特性

对于传统的阶跃型光纤,光纤光学中定义归一化频率为:

$$\nu=\frac{2\pi\rho}{\lambda}(n_{co}^2-n_{cl}^2)^{1/2} \tag{25.12}$$

其中 n_{co} 和 n_{cl} 分别为光纤芯层和包层材料的折射率,ρ 为芯层半径. 只有当 $\nu<2.405$ 时,此光纤才是单模的. 即传统光纤存在着一个截止波长,只有波长大于此截止波长的光波才能在光纤中实现单模传输,而波长小于此截止波长的光波在光纤中为多模传输.

在光子晶体光纤中,亦可定义一个等效的归一化频率为:

$$\nu_{eff}=\frac{2\pi\rho}{\lambda}(n_{co}^2-n_{eff}^2)^{1/2} \tag{25.13}$$

其中 n_{co} 和 n_{eff} 分别为光子晶体光纤芯层和包层的等效折射率,ρ 为芯层半径. 光子晶体光纤包层的等效折射率 n_{eff} 可以根据包层晶胞的等效数学模型解出. 它是光波长的函数,波长越短时,光束截面也随之收缩,光波模式分布向熔融硅区域集中,因此 n_{eff} 增大,从而 n_{co} 和 n_{eff} 的差减小,这就抵消了波长减小的趋势,使 ν_{eff} 趋于定值.

色散是光纤的一个重要参数,它决定着光纤能否应用到某个领域,如孤子传输,超短脉冲的产生,超连续光谱的产生和谐波的获得,对光通讯以及应用光子晶体光纤进行色散补偿和设计光子晶体光纤激光器等也起着决定作用.

作为一种近似,可将光子晶体光纤的总色散 D(单位为:$ps\cdot km^{-1}\cdot nm^{-1}$)分为波导色散 D_w 和材料色散 D_m 两部分分别计算,即

$$D(\lambda)\approx D_w(\lambda)+D_m(\lambda) \tag{25.14}$$

这将在很小的允许误差范围内大大的简化计算过程.

光子晶体光纤的材料色散 D_m 由 Sellmeier 公式直接得到. 而波导色散由光纤的色散定义,可以表示为:

$$D_w(\lambda)=-\frac{\lambda}{c}\frac{d^2n_{eff}}{d\lambda^2} \tag{25.15}$$

其中 n_{eff} 为根据光子晶体光纤基模特征方程求得的模式有效折射率.

传统光纤中芯层与包层折射率之差是通过在芯层中掺杂稀土元素来实现的,但同时出现的问题是由于材料不匹配可能引起较大损耗,故芯层与包层折射率之差不可能很大. 而光子晶体光纤是由一种材料(熔融硅或聚合物)制成,只需适当调节包层的结构参数,不存在材料失配问题. 与传统光纤在可见光波段呈现正常色散不同,光子晶体光纤由于其包层的空

气孔结构使得芯层和包层的折射率之差增大，从而极大地增强了波导色散的作用. 光子晶体光纤的零色散点可以移至 1.3 μm 以下乃至可见光范围，而且通过结构的改变很容易把零色散点移到所需要的波长. 这在传统光纤中是不可能实现的. 不仅零色散点灵活可调，通过适当设计空气孔的参数，光子晶体光纤还可以在极宽的波段内具有平坦色散而且宽带平坦色散曲线的中心波长可移，平坦色散值也可以根据需要为正常色散、反常色散或近似零色散. 另外，光子晶体光纤在光通信波段也能呈现很大的正常色散.

25.3.3 极强的光学非线性效应

在折射率引导型光子晶体光纤中，光场可以被高度局限在纤芯周围的一小块区域内，从而可以极大地提高光学非线性作用. 研究表明，增大包层的空气填充比可以增大光纤芯层的折射率和包层的有效折射率之差，从而就能够控制光场局部集中的程度. 不单单是自相位调制(SPM)，诸如互相位调制(XPM)、受激拉曼散射(SRS)、受激布里渊散射(SBS)以及四波混频(FWM)等等都可能发生，因而当低功率飞秒激光脉冲在芯中传播时，在很短的长度内就能够展宽成很宽的光谱. 实验中已经可以实现超过一个倍频程甚至两个倍频程的非常平坦的超连续光谱，这为产生脉宽只有几个光学周期的超短脉冲和光学高次谐波提供了新的方法. Ranka 等人用能量小于 1 nJ、脉宽 100 fs、中心波长在 790 nm 的超短脉冲在 75 cm 长的微结构光纤(零色散波长在 767 nm)中产生两个倍频程的超连续光谱，频程从 400 nm 到 1 600 nm，如图 25.5 所示.

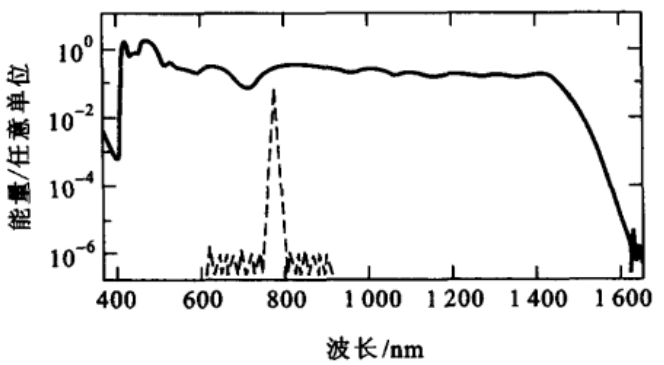


图 25.5 两个倍频程的超连续光谱[10]

在带隙波导型光子晶体光纤中，非线性效应也有非常重要的作用. 传统单模光纤在向更大容量发展时遇到了一些不可逾越的障碍：第一，普通

单模光纤的纤芯主要成分是熔融硅，即使尽量降低杂质吸收，但本征吸收和瑞利散射仍是不可避免，因而总是存在损耗；第二，虽然单模光纤可以避免模式色散，波导色散也可以做得很低，但材料色散是本征性的，它的存在必定使脉冲展宽，进而限制了传输速率；第三，当采用波分复用技术在一根光纤中传输多个信道时，随着光功率增加，交叉相位调制和四波混频等非线性出现，虽然可以通过增加有效面积缓解非线性的影响，但过大的通光口径又不能保证单模运转. 而依靠光子带隙传输的光子晶体光纤可以使上述三个障碍迎刃而解. 带隙波导型光子晶体光纤为空心结构，纤芯可以是空气或真空而不是熔融硅，作为材料属性的吸收、散射、色散及非线性等自然也就不存在了. 由于气体的光学损坏阈值远高于固体的光学损坏阈值，此种光纤为传输高强度激光脉冲提供了条件.

25.3.4 弯曲损耗特性

与传统光纤不同的是，光子晶体光纤不仅在长波方向上存在弯曲损耗边，同时在短波长上也存在弯曲损耗边. 当波长超过长波弯曲损耗边时，光纤会因为模场大量扩散到低折射率区而经受强烈的损耗. 在传统光纤中，短波方向的限制由截止波长给出，波长低于这一限制时，光纤会变成多模的. 在具有无截止单模特性的光子晶体光纤中，单模范围在短波方向的限制被二阶弯曲边所取代，当波长低于短波弯曲损耗边时，光场会因为芯/包折射率差的消失而经受强烈的损耗.

25.3.5 双折射效应

保偏光纤在长距离通讯、传感以及特定激光器的设计方面有很重要的应用. 其原因是平行于双折射轴的线偏振光可以保持其偏振特性，而不受弯曲引起的应力等的影响. 对于保偏光纤而言，双折射效应越强，波长越短，越能够保证传输光的偏振态. 对传统光纤而言，由于弯曲或其他不可预料的微小形变，偏振态无法很好的保证. 普通的保偏光纤，在线偏振光进入光纤以前，需要鉴别光纤的快慢轴，通过改变光纤结构达到这种目的. 在微结构光纤中，这一点很容易达到，只需破坏光子晶体光纤截面的圆对称性使其成为二维结构即可形成很强的双折射(比如，减少一些空气孔或改变空气孔的尺寸，如图 25.6)，可比现在常用的保偏光纤提高几个数量级，而且波长越长，双折射效应越强. 即使弯曲和形变，也能很好的保证传输光束的偏振态.

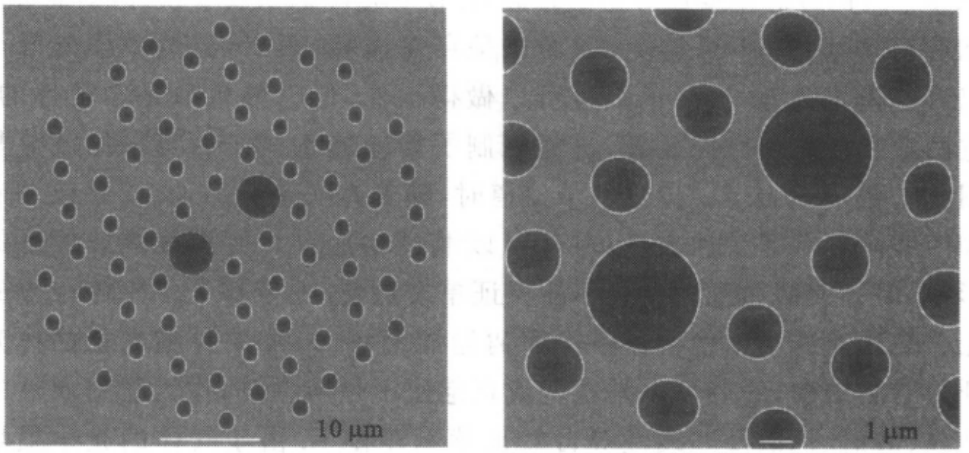


图 25.6 保偏型光子晶体光纤[11]

25.4 光子晶体激光器

本节介绍光子晶体激光器的概念、特点、结构以及工作过程.

25.4.1 光子晶体激光器的概念

传统光电器件尺寸的缩小已经接近物理发展的极限,光子晶体为突破这一瓶颈带来了曙光.随着元器件不断微细化,半导体激光器由于体积的相对庞大,慢慢不能适应需要.同时,由于自发辐射的存在,激光出射的方向总会和自发辐射的方向成一定的角度,这样只有在驱动电流达到一定阈值时才能产生激光.而在激光器中引入一带有缺陷的光子晶体,使缺陷态形成的波导与出射方向成一样的角度,自发辐射的能量几乎全部用来发射激光,将大大降低激光器的阈值.1999 年,Painter 等在二维光子晶体中引入一点缺陷——就像一个光学微腔,形成了一个光能量阱(类似于量子阱),从而实现了光子晶体激光器(图 25.7).这种光子晶体激光器是受光线来驱动的.2000 年,Zhou 等制得了以电流驱动的光子晶体激光器.虽然这种光子晶体激光器的阈值为 300 A,却为后来的研究提供了借鉴.

25.4.2 光子晶体激光器的特点

光子晶体激光器可以分为两类:一类基于缺陷态光子晶体的特征,另一类基于光子晶体的理想反射特性.

光子晶体的突出特性是具有光子禁带,落在禁带中的光被禁止传播,

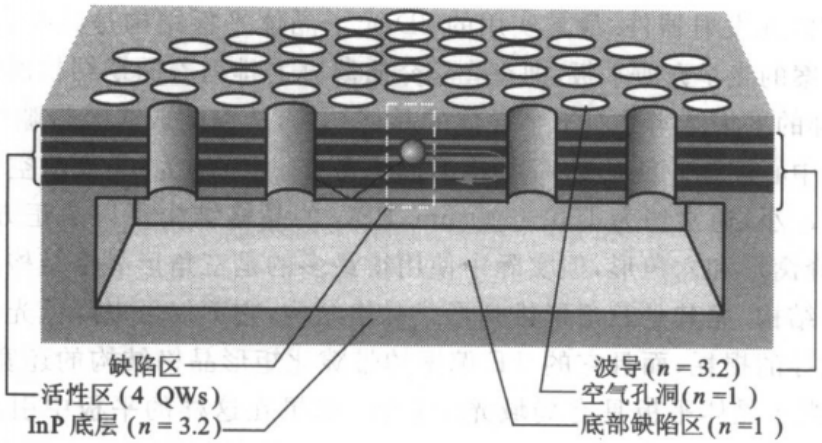


图 25.7 光子晶体激光器

这使得光子晶体可以抑制自发辐射. 利用这个特性,可大大降低副波方向上的自发跃迁复合的几率. 在光子晶体中引入特定的缺陷形成波导,可以保证自发辐射的能量几乎全都用来发射激光,从而大大降低激光器的阈值,理论上可以制作出无阈值激光器. 另一方面,若在光子晶体中引入缺陷,可使光子禁带内产生高密度的缺陷态. 只有缺陷模式波长的光才可不断地在光子晶体中振荡和增强,从而构成可实现自发辐射增强的光子晶体单模微谐振腔激光器. 这就是第一类光子晶体激光器的工作原理.

基于光子晶体的理想反射特性的激光器的工作原理与传统的激光器非常类似,不同的是这种激光器以光子晶体构成谐振腔,其品质因数非常高,而且体积非常小,约为传统微型激光器的十分之一.

光子晶体从空间形态上可分为一维、二维和三维结构. 同样,光子晶体激光器也有一维、二维和三维结构之分. 一维分布反馈式微型激光器实质上就是一维光子晶体激光器,理论和实践上都已经做了较多研究,二、三维光子晶体激光器的制作工艺比较复杂,因此目前进行的多是二维光子晶体激光器的研究.

从工作特点上看,光子晶体激光器可以分为半导体光子晶体激光器,光子晶体光纤激光器,光子晶体激光二极管,有机聚合物光子晶体激光器. 从结构特点上看,已研制出的有光子晶体带间缺陷模激光器,表面发射型光子晶体激光器,脊形波导光子晶体激光器,六角波导环行谐振腔光子晶体激光器,光子晶体分布反馈式(PCDFB)激光器,垂直腔面发射光子晶体激光器,光子晶体带边激光器等等.

25.4.3 光子晶体激光器的结构

这里主要介绍的光子晶体激光器是基于 2D 光子晶体平板的为谐振

腔结构的光发射器件. 最具实用的 2D 光子晶体平板结构是具有 2D 空气孔阵图案的光学介质平板，即在光学介质薄膜上排列着周期结构的空气孔阵. 这样的平板结构类似于半导体的晶格结构，从而构成光子带隙(PBG). 空气孔中心间距 a 就是 PBG 结构的晶格常数，通常约为500 nm，空气孔半径 r 比 a 小，通常约为 150～300 nm. PBG 的晶格结构可以是正方形、三角形、蜂窝形和六角形，但实际中使用得最多的是三角形晶格结构或六角形晶格结构. 尤其是三角形排列形式晶格结构，它不仅可以降低光子晶体弯曲波导的损耗，而且它的 TE 偏振的带隙比矩形晶格结构的还宽. 这样的 2D 光子晶体平板具有局域光的特性. 如果在这样的平板中引入一个环形缺陷，便可构成一个环形谐振腔，光波可以在环形微腔中振荡. 如果在这种平板中引入一个点缺陷，便可构成一个点微腔，利用这个点微腔便可构成一个点微腔谐振腔.

线缺陷和点缺陷的引入非常简单，只要破坏光子晶体的周期结构即可. 例如，丢失一排或一个空气孔便可构成线性光波导或点缺陷微腔.

目前研究得最多的光子晶体激光器有两类结构：一类是具有中心缺陷的纳米腔结构的激光器，如图 25.8(a)；另一类是基于光子晶体波导的六角形波导环形腔结构的激光器，如图 25.8(b).

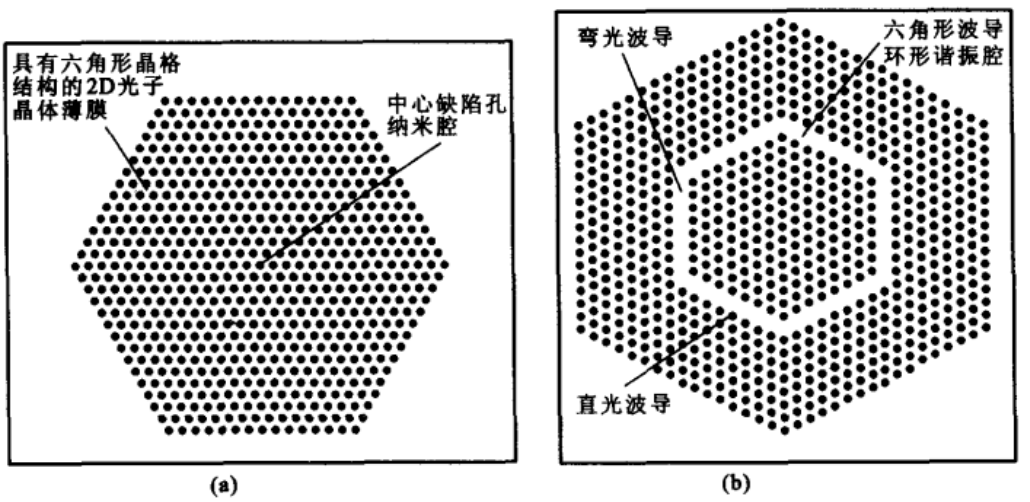


图 25.8 光子晶体激光器结构

在具有中心缺陷的纳米腔结构的激光器中，它的微谐振腔是通过改变中心空气孔的尺寸或者丢失中心空气孔而形成的. 图 25.8(a)所示结构就是使中心孔的半径小于环绕它的空气孔半径，从而在中心引入缺陷而形成点缺陷微腔. 由于中心缺陷的纳米腔光子晶体激光器具有极小的腔尺寸，可获得更低或者无阈值泵浦功率和更高的腔的品质因子

(−30 000). 在具有六角形波导环形腔结构的激光器中,它的谐振腔是一个六角形的环形腔,它由六段直波导和六个 120°角弯曲波导构成. 这个六角形环形腔是通过丢失六角形框线上的空气孔而形成的. 尽管六角形波导环形腔光子晶体具有比纳米腔激光器更大的尺寸(环形腔直径约 8 μm)和较高的阈值泵浦功率(约 3 mW),但从制作和泵浦角度考虑,这种结构激光器更易做到腔尺寸的精确控制和更方便的光学泵浦. 所以,作为使用的器件,更多采用这类结构的激光器,这是因为在未实现电学泵浦之前,光子晶体激光器的泵浦几乎是光学泵浦的,即用半导体激光器(如 900 nm 半导体激光器)照射谐振腔部分. 如果谐振腔的直径太小,很难把泵浦光束聚焦成纳米量级尺寸的光束,而六角形波导环形腔具有约 8 μm 的腔直径,光束聚焦较为方便. 此外,由于六角形谐振腔的波导和光子晶体集成电路中的光波导有类似的模式图案,从谐振腔激出的光波很容易耦合到与之相连的光子晶体光波导中,这意味着波导环形腔激光器更加适合于光子晶体集成电路应用.

25.4.4 光子晶体激光器的应用前景

目前光子晶体激光器的制作主要有离子刻蚀法(FIB)、晶体熔接技术、电子束平板印刷术、显微操纵技术,以及聚苯乙烯微滴生长法等等.

光子晶体激光器的超微型化、低阈值化和可集成性,在很多领域中都将有着好的应用前景. 光子晶体激光器可以用作光纤通信系统的紧凑光源. 这是因为它的谐振模类似偶极子,且在平面内的辐射是高度方向的,完全可以制作出相间距小于 5 μm 并以不同波长工作的光子晶体激光器. 通过光刻蚀方法改变缺陷腔的几何尺寸,可以实现不同的发射波长.

光子晶体激光器第二个潜在应用是用作气体传感器. 这是因为光子晶体激光器是一种基于 2D 空气孔阵的器件,空气孔存在于最大场强处,这一特性适用于毫微的光谱学应用,可以通过研究孔和材料之间的相互作用,探测微量气体变化. 例如,可以通过设计不同几何尺寸的腔(如改变单个缺陷中心的尺寸)便可设计出不同波长的激光器,每个波长可被用来探测不同气体的存在. 由于光子晶体激光器的紧凑尺寸,可以在很小面积上集成若干个器件,形成紧凑的传感器.

光子晶体激光器的第三个潜在应用是用于半导体微处理器芯片的光时钟分配. 这一应用利用了光子晶体激光器低功耗、小尺寸和可与微处理器单片集成的特性.

到目前为止,光子晶体激光器的研究已取得了重大突破,距离实用化已为期不远.

25.5 光子晶体的其他应用

25.5.1 光子晶体波导

传统的光纤主要利用电磁波在介质交界处的全反射机制，在光纤转弯的地方它出现一个很大的问题：当波导的曲率大于一定值时，会出现很大的能量损失，只有当转角的曲率半径远大于光波波长时，才能避免过多的能量损失. 而当在光子晶体中引入一线缺陷的时候，如果线缺陷的频率落在光子带隙中，就会在其中引入一个“光通道”——光波导，当线缺陷为直线时，光波导也是直的，当线缺陷成一定角度时，光波导也成一定的角度. 利用这一性能设计的光波导能极大地减少光纤传播中能量的损失.

25.5.2 高性能反射镜

传统的金属反射镜在很大的频率范围内可以反射光，但在红外和光学波段有较大的吸收. 而在光子晶体中，频率落在带隙中的光线不能在光子晶体中传播，只要选择没有吸收的介电材料制成的光子晶体就可以反射从任何方向的入射光，反射率几乎为 100%. 这种光子晶体反射镜有许多实际用途，如制作新型的平面天线. 普通的平面天线由于衬底的透射等原因，发射向空间的能量有很多损失，如果用光子晶体做衬底，由于电磁波不能在衬底中传播，能量几乎全部发射到空间. 另外，光子晶体在光开关、光放大、滤波器、偏振器等方面都存在着广阔的应用前景.

25.5.3 宽带带阻滤波器和极窄带选频滤波器

利用光子晶体的光子禁带特性可以实现极优良的滤波性能. 这是由于光子晶体的滤波带宽可以做得比较大，钻石结构的光子晶体的滤波带宽可以做到中心工作频率的 20%，而由 S. Gupta 等人所提出的金属-介质复合型光子晶体可以将从低频(频率接近 0 Hz)直到红外波段的电磁波完全滤掉. 这种大范围的滤波作用是传统的滤波器难以实现的. 另外，在光子晶体中引入缺陷态，可以制作高品质的极窄带选频滤波器.

25.5.4 非线性光子晶体器件

非线性光子晶体是采用非线性介质在空间周期性排列而制成的. 目前在非线性光子晶体器件方面已开展了一些研究工作. T. Trull 小组已在实验上观察到了非线性光子晶体的二次谐波产生现象. 另外，在非线性

光子晶体限幅器、光子开关以及光波分割与合成方面也开展了一些工作.这方面的工作目前还处于初始阶段,但其研究前景是十分广阔的.

25.5.5 高发射率小型微波天线

对于频率位于光子带隙范围内的光波,光子晶体的表面是一个理想的反射镜面,用它来做小型平面微波天线的基底材料,原来进入基底而损耗的能量将全部被光子晶体反射回空间,从而大大提高了天线的发射效率.对光子晶体其他性质的应用还很多,比如利用二维光子晶体对入射的TE、TM两种偏振模式的光具有不同的带隙结构而设计的二维光子晶体偏振片,可以获得单一模式的出射光,而且这种偏振光具有很高的偏振度和透射率.又如,现在日本NTT的科学家应用光子晶体已经实现了对1 550 nm波长光波速度的减慢,在实现光子集成电路的研究中迈出了具有决定意义的一步.综合运用光子晶体的各种性质,还可制成光开关、光聚焦器等.

光子晶体调节光子传播状态的特性,在光子学的各个领域具有广阔的应用前景,有希望成为未来光子产业的基础材料.虽然光子晶体与半导体材料有许多类似的地方,但人们对光子晶体的认识还远不如对半导体材料的认识那么成熟.理论和实验上,对光子晶体性质及其光子带隙调节的研究还需要进一步深化与完善,以进一步开发光子晶体的应用潜力.目前还不能大规模地制造尤其是可见光及近红外波段的光子晶体;而且,光子晶体的部分应用也仅在实验室中实现.因此,研究并开发技术上易于制造的、具有宽带隙的光子晶体并实现其商业化应用仍是世界众多科技人员努力的目标.

此外,光子晶体的概念对于考虑电磁波在大尺度周期结构中传输也可能有启发,而且有实际意义.例如考虑到城市街道中建筑物可能有近似周期结构,或建筑物内房间的近周期分布,对于空间传输的通信可能有影响.山丘、沙浪、海浪近周期结构对电磁波的反射或传输也可能有影响.这对解释自然的奥秘和安全、反恐可能是很重要的.

习题与思考

(1) 什么是光子晶体?它与半导体有何相似之处?

(2) 光子晶体有哪些可能的应用?

(3) 如何处理光子晶体中激光与二能级原子的作用?

(4) 如何处理光子晶体中激光与三能级原子的作用?

(5) 如何处理光子晶体中的群速超光速脉冲传输问题?

参考文献

[1] Joannopoulos J D, Villeneuve P R, Fan S. Photonic crystals: Putting a new twist on light. Nature, 1997, 386: 143 - 149.

[2] Yablonovitch E. Inhibited spontaneous emission in solid-state physics and electronics. Phys. Rev. Lett., 1987, 58: 2059 - 2062.

[3] John S. Strong localization of photons in certain disordered dielectric superlattices. Phys. Rev. Lett., 1987, 58: 2486 - 2489.

[4] Fink Y, Winn J N, Fan S, et al. Dielectric omnidirectional reflector. Science, 1998, 282: 1679 - 1682.

[5] Yablonovitch E, Gmitter T J, Leung K M. Photonic band structure: The face-centered cubic case employing nonspherical atoms. Phys. Rev. Lett., 1991, 67: 2295 - 2298.

[6] Hongqiang Li, Hong Chen, Xinjie Qiu. Band-gap extension of disordered 1D binary photonic crystals. Phys. B, 2000, 279: 164 - 167.

[7] Ho K M, Chen C T, Soukoulis C M. Existence of a photonic gap in periodic dielectric structures. Phys. Rev. Lett., 1990, 65: 3152 - 3155.

[8] Yang Y D. Finite difference analysis of 2D photonic crystals. IEEE Trans. Microwave Theory Tech. 1996, 44: 2688 - 2695.

[9] Chan C T, Lu Q L, Ho K M. Order-N spectral method for electromagnetic waves. Phys. Rev. B, 1995, 51: 16635 - 16642.

[10] Ranka J K, Windeler R S, Stentz A J. Visible continuum generation in air-silica microstructure optical fibers with anomalous dispersion at 800nm. Opt. Lett., 2000, 25(1): 25 - 27.

[11] Birks T A, Knight J C, Russell P S J. Endlessly single-mode photonic crystal fiber. Opt. Lett., 1997, 22(13): 961 - 963.

[12] 高慧敏, 于丽, 王永钢等. 光子晶体光纤. 现代有线传输, 2005, 3: 36 - 37.

第 26 章　飞秒激光与阿秒激光

本章介绍飞秒激光及其在光频测量中的应用，最后介绍阿秒激光进展. 光频测量的研究荣获 2005 年诺贝尔奖. 此外，飞秒激光在化学中的应用荣获 1999 年诺贝尔化学奖. 阿秒激光可能开创阿秒物理学.

26.1　飞秒激光

飞秒即 10^{-15} s，记为 fs 激光是用锁模技术产生的. 关于锁模的基本原理已在第五章介绍.

最常用的飞秒激光器是钛宝石锁模激光器. 由式(5.131)可知，锁模激光器的脉宽 Δt 与增益介质的谱线宽度 $\Delta\nu$ 成反比，即 $\Delta t=1/\Delta\nu$. 钛宝石的 $\Delta\nu$ 很宽，$1/\Delta\nu$ 在飞秒的量级. 钛宝石激光锁模原理与饱和吸收式锁模原理相似. 它们都属于被动锁模.

饱和吸收锁模方法是在腔内放入可饱和吸收体，通常为染料溶液、固体染料或半导体材料也可用 C_{60}. 饱和吸收体的特性是入射光越强，透射率越高；入射光越弱，透射率越低，甚至被完全吸收掉. 这些材料在激光波长处有强吸收，其吸收带宽大于激光介质的增益带宽，但它们的吸收饱和光强却低于增益介质的饱和光强，更容易饱和. 吸收饱和的弛豫时间应该远短于光在腔内往返一周所需的时间.

饱和吸收式锁模可用随机涨落模型来解释. 起初在激光器内振荡的纵模相位是随机变化的，他们叠加起来，包含一系列光强无规起伏的尖脉冲. 当它们经过饱和吸收介质时，光强较大的尖脉冲首先使其吸收饱和，吸收系数变小，因此他们更易得到放大，其余小脉冲则受到抑制. 光强较大的尖脉冲经过增益介质的放大，再通过吸收介质时使其产生更强的吸收饱和，甚至达到“透明”. 经过一段时间，除最强的尖脉冲外，其余脉冲被抑制掉. 这样便实现了锁模. 不仅如此，最初光强较强的脉冲，在经过吸收介质和增益介质时，因其前沿和后沿光强较弱，也会被减弱，而峰值急剧增大. 这样，其脉冲被整形使脉冲宽度变得更窄，峰值更高. 最终得到周期为 $2L/c$ 脉宽为 $1/\Delta\nu$ 的尖脉冲序列，这里 L 为激光器的腔长.

典型的钛宝石飞秒激光器是利用克尔透镜效应进行锁模. 克尔透镜(Kerr Lens)简称 KL，利用 KL 的锁模简称 KLM. 实际上，钛宝石飞秒激

光器内既没有插入主动锁模装置也没有放入饱和吸收材料，而是利用钛宝石自身的 KL 效应. 钛宝石有非线性折射率 $n=n_0+n_2I$，$n_2>0$. 由于外电场的作用，介质折射率的变化与电场平方成正比，这种效应叫克尔效应. 显然，n_2I 属于克尔效应，可称为自克尔效应. 由于激光束可看成高斯光束，在钛宝石中心线附近的光最强，$n_2I(t)$ 最大，折射率 n 也最大. 这样，使得钛宝石棒等价于一个中心折射率大、边缘折射率小的透镜. 这就是克尔透镜效应. 这样由与介质作用而自己把自己光束聚焦起来，被称为自聚焦. 若钛宝石的长度为 ΔL，则此透镜的焦距为 $f_m=\dfrac{\alpha W_m^2}{4n_2I\Delta L}$，其中 α 是与介质有关的常数，W_m 是光斑大小. 若在焦点附近放置一个光阑，由于光强越强，克尔效应就越大，通过光阑的光强就越多. 反之，光强越弱，通过光阑的光就越强. 这样就等价于饱和吸收的作用.

因此，可这样理解钛宝石激光器锁模的过程：起初在钛宝石激光器中由于某种扰动或涨落，出现一些无规的小脉冲，其中光强最强的小脉冲通过 KL 的透射率最高，即损耗最小，能更有效的被放大，通过竞争，将其他小脉冲抑制掉. 其实，最初那个最强的小脉冲来自涨落，是部分纵模叠加而增强的结果. 另一方面，在振荡过程中，其他纵模的位相也有随机性变化的. 这样就会有越来越多的锁模“参加”到最初光强最强的小脉冲中，直至全部纵模可能都锁定起来.

那么，钛宝石飞秒激光器最初的扰动是怎样产生的呢？其方法却出奇的简单. 有时敲一敲激光器的工作台就可导致锁模. 通常是用机械方法使其谐振腔的反射镜振动一下.

钛宝石飞秒激光器的另一个问题是色散补偿，因为其中的短脉冲有不同的频率成分，有色散效应，该色散作用会使脉冲加宽. 为解决这一问题，必须用一系列光学元件消除这种色散，实现色散补偿.

26.2 用飞秒锁模激光测量光的频率

美国的霍尔和德国的亨施用非常简单的方法解决了直接测量光频的问题[1]，荣获 2005 年诺贝尔物理学奖. 他们的成功是综合创新的典范. 他们能够取得突破，是因为综合应用了超短脉冲激光技术、超稳激光技术、超灵敏光谱技术与非线性光学技术. 关键是用钛宝石飞秒激光通过光子晶体光纤或者有微结构的光纤，产生包含几十万到上百万个等间隔频率成分的“光梳”，并用倍频和拍频技术把对光频的测量变为对射频(RF)或微波频率的测量，使光频测量精度达到 10^{-14} 左右.

26.2.1 钛宝石飞秒激光

Hall 使用的钛宝石飞秒激光的脉宽约为 12 fs，带宽约为 180 nm，中心频率为 800 nm. Hansch 使用的钛宝石飞秒激光的脉宽约为 73 fs，重复频率为 76 MHz.

由锁模技术产生的超短脉冲系列的时间间隔是 $T=\frac{2L}{c}$，重复频率是 $\frac{c}{2L}$. 而频谱或纵模间隔是 $\nu_r=\frac{1}{T}=\frac{c}{2L}$，与锁模脉冲重复频率相等. 脉冲重复的角频率是 $\omega_r=2\pi\nu_r=\frac{2\pi c}{2L}$. 显然，$\frac{\Delta\nu_r}{\nu_r}=-\frac{\Delta L}{L}$. 为了把锁模激光用于光频测量，必须使 ω_r 特别稳定. 为此，可采用两个方法. 首先，用快速的压电材料使腔长尽可能稳定. 第二，可把锁模脉冲系列的重复频率 ω_r 用原子钟的频率来锁定.

26.2.2 飞秒激光“光梳”

“光梳”即“光频梳”，即一系列等间隔的光频的分布像人们使用的梳子. 每个频率相当于梳子上的一个齿. 频率的间隔相当于梳子的齿的间隔.

当然，锁模激光的原理本来就是把等间隔的纵模振荡锁起来. 因此，锁模激光的频率本来就是等间隔$\left(\frac{c}{2L}\right)$的，但是，对于作为商品的钛宝石锁模激光器这个“光频梳”的齿太少，不能用于光频测量. 为了测量光频率，要求有一个“足够长”的梳子. 这个光梳应有几十万到上百万个“齿”. 这些“齿”也是等间隔$\left(\frac{c}{2L}\right)$. 为了得到这样的光梳，采用的方法就是用光纤的非线性来把锁模激光的频谱展宽，以至于展宽到从红外到可见光这样宽的频段，即覆盖了白光波段. 1999 年，人们发现光子晶体光纤在 $\lambda\approx$ 700 nm 的色散几乎为零，且非线性很强，用 10 cm 长的光子晶体光纤就能更有效的把锁模脉冲的频谱展宽.

为了测量光频率，到底这个光梳应有多长或者多少个齿呢？具体说来，这个光梳的最低频率经过倍频以后，应正巧等于该光梳的最高频率. 例如，若光梳最低频率为 $n\omega_r$，则最高端频率应是 $2n\omega_r$.

为什么飞秒光脉冲通过光子晶体光纤能产生光梳呢？根本机理就是自位相调制. 非线性折射率 $n=n_0+n_2I(t)$，引起自位相调制，

$$\phi_{NL}=n_2I(t)\omega_c\frac{L}{c} \tag{26.1}$$

$$\Delta\omega=-\frac{\mathrm{d}\phi_{\mathrm{NL}}}{\mathrm{d}t}=-n_2\omega_{\mathrm{c}}\frac{L}{c}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \tag{26.2}$$

$I(t)\propto|A(t)|^2$，$A(t)$是飞秒脉冲光场的包络. n_2 是光学克尔系数，石英材料的 $n_2>0$.

光梳的范围由(26.2)式决定. 由此式可知，n_2 与$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$越大，光梳的频率范围越大. 光子晶体的 n_2 很大，能满足这里的要求. 要使$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$很大，一是要用短脉冲(飞秒级)，二是要提高功率，而飞秒钛宝石激光器正好满足这两个条件. 具体来说，由于飞秒脉冲前沿$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}>0$，所以 $\Delta\omega<0$，向长波扩展，即在前沿发生红移. 而在飞秒脉冲的后沿$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}<0$，所以 $\Delta\omega>0$，向短波扩展，即在后沿发生蓝移. 红移和蓝移的结果是产生频率范围非常大的光梳.

26.2.3 光梳的理论分析

下面对光梳的性质做一理论分析

首先，自位相调制产生光梳时，却又能保证光梳中的频率间隔不变. 其原因如下：自位相调制使飞秒脉冲的光场变为 $A(t)\rightarrow A(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_{\mathrm{NL}}(t)}$. 由于 ϕ_{NL}是锁模飞秒脉冲串引起的，所以 ϕ_{NL}的周期也是飞秒脉冲串的周期，即与原来的飞秒脉冲重复周期一样. 因此，经过自位相调制而使频谱大大展宽时，这些频谱中谱线的间隔仍是 $c/(2L)$. 这些谱线也很容易从一系列在时域内类似 δ 函数的脉冲进行傅里叶变换而得出，间隔由群速和腔长决定 $\omega_{\mathrm{r}}=c/(2L)$，即原来飞秒脉冲的重复频率. 这样，保证了光梳各个齿之间都是等间隔的. 实验也证明了自位相调制对频率间隔(或模式间隔)的影响只有 10^{-18}，可忽略. 实验还证明了，光梳中的那些光梳的全部频率成分都是位相相干的.

从上面的分析已经知道强度和位相的调制并不改变脉冲串的间隔. 更进一步，把空间中某点的光场 $E(t)$写成波包函数 $A(t)$和载波 $C(t)$的乘积

$$E(t)=A(t)C(t)+\mathrm{c.c.} \tag{26.3}$$

其中 $A(t)=A(t-T)$是波包函数，$T=2\pi/\omega_{\mathrm{r}}$ 脉冲的重复周期. 由于在激光谐振腔内部有空气，以及激光晶体的折射率不等于零，因而群速度和相速度不同，载波与光场波包有相位移动，如图 26.1.

相邻脉冲间的相位移动为 $\Delta\phi$，有 $\Delta\phi=\left(\frac{1}{\nu_{\mathrm{g}}}-\frac{1}{\nu_{\mathrm{p}}}\right)l_{\mathrm{c}}\,\omega_{\mathrm{c}}\cdot 2\pi$，从而引起

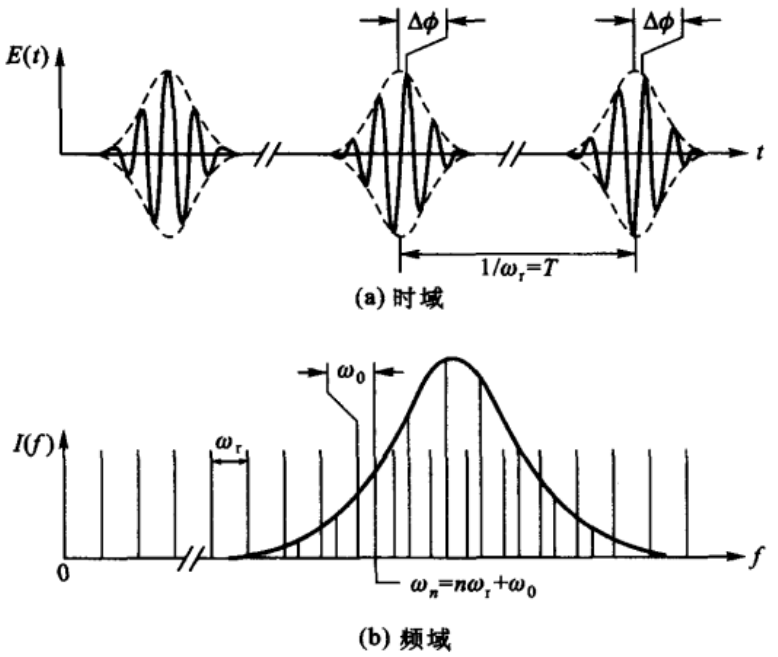


图 26.1 时域中的 $\Delta\phi$ 对应频域中的 ω_0

(a) $\Delta\phi$ 是由于群速与相速的不同而引起的位相移动 (b)在频域内锁模光梳的间隔为 ω_r，整个光梳(实线)偏移重复频率的整数倍，同时还有偏移频率 $\omega_0=\Delta\phi\omega_r/2\pi$.

频率偏移 $\omega_0=\Delta\phi\omega_r/2\pi$. 因此，脉动重复周期一般说并不严格是 T. 为了获得 $E(t)$的频谱，计算傅里叶积分

$$\tilde{E}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}E(t)e^{i\omega t}dt \tag{26.4}$$

对 $A(t)$和 $C(t)$分别作傅里叶变换

$$\tilde{A}(\omega)=\sqrt{2\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-n\omega_r)\tilde{A}_n \tag{26.5}$$

$$\tilde{C}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}C(t)e^{i\omega t}dt \tag{26.6}$$

施加在脉冲上的周期性啁啾可以使波包 $A(t)$是复数. 在简化的情况下，$C(t)$ 就是载波 $C(t)=e^{-2\pi i f_c}$，但是电场的其他部分也包含 T 的非周期变化. 利用卷积定理，$\tilde{E}(\omega)$可通过$\tilde{A}(\omega)$和$\tilde{C}(\omega)$来计算(如图 26.2)，即

$$\begin{aligned}\tilde{E}(\omega)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{A}(\omega')\tilde{C}(\omega-\omega')d\omega'+\text{c. c.}\\&=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\tilde{A}_n\tilde{C}(\omega-n\omega_r)+\text{c. c.}\end{aligned} \tag{26.7}$$

这个求和代表了频域中的周期性频谱. 如果载波的谱线宽度 $\Delta\omega_c$ 远小于模式间隔 ω_r，上式就代表等间隔的光梳，光梳间隔为 ω_r，并且其中每个谱线都有相同的线形 $\tilde{C}(\omega)$. 如果说 $\tilde{C}(\omega)$ 的中心频率是 ω_c，那么光频梳中的频率都从 $n\omega_r$ 移动 ω_c. 光梳中的每个模式频率的中心频率可以从模数 n 来计算，第 n 个模的频率是

$$\omega_n = n\omega_r + \omega_c \tag{26.8}$$

(26.8)式表示的频率，并没严格规定频率的零点，所以 $n=0$ 的模的频率不一定严格是 ω_c，而是在 0 与 ω_r 之间. 因此，重新给这些模式编号可以限定频率偏移在 $0 \leqslant \omega_0 \leqslant \omega_r$ 以内，所以

$$\omega_n = n\omega_r + \omega_0, \quad n = \text{一个大整数}. \tag{26.9}$$

这样就把对光频的测量与对两个射频频率 ω_r 和 ω_0 的测量对应起来，如图(26.2).

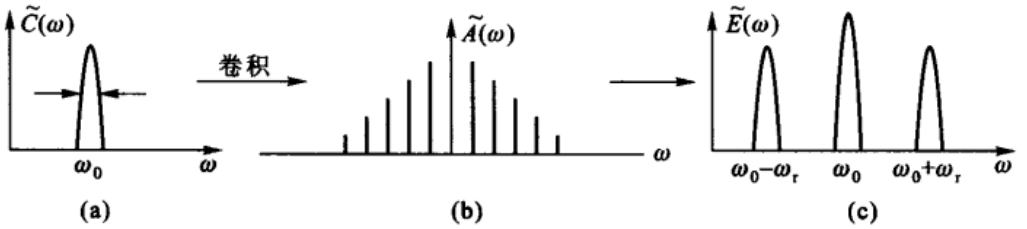


图 26.2 $\tilde{C}(\omega)$ 与 $\tilde{A}(\omega)$ 得 $\tilde{E}(\omega)$

图(a)为载波函数的谱线，图(c)为按(26.7)式用波包函数，

图(b)为调制后的结果，假定 $\Delta\omega_c \ll \omega_r$

26.2.4 光频测量

下面讨论怎样精确测量一个连续激光器(CW Laser)的频率 ω_{CW}. 关键是使光梳的激光与该待测的连续激光同时入射到光探测器，产生拍频. 拍频的频率记为 ω_b，则有

$$\omega_{CW} = n\omega_r + \omega_0 + \omega_b \tag{26.10}$$

由此式可知，为了测连续激光的频率 ω_{CW}，就必须测出 n，ω_r，ω_0 和 ω_b.

(1) ω_r 的测量

用光探测器测量钛宝石锁模激光脉冲串，测出脉冲重复频率 ν_r，即可得到 $\omega_r = 2\pi\nu_r$.

(2) ω_b 的测量

把光梳的脉冲串与待测的连续激光射到光探测器，该光探测器必须对光场平方敏感，所以才能探测这两个光场的乘积，从而测出拍频 ω_b.

(3) ω_0 的测量

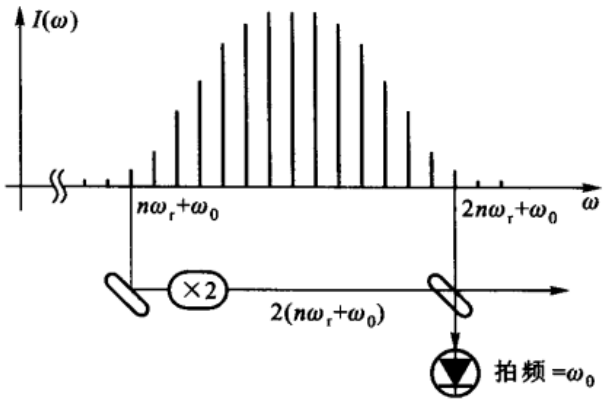


图 26.3 ω_0 的测量方法

由图 26.3 可知，光栅的低频段的频率是 $n\omega_r+\omega_0$，高频段的频率是 $2n\omega_r+\omega_0$（光梳中的每个频率都移动 ω_0）. 用倍频晶体（KTP 或 BBO）对 $(n\omega_r+\omega_0)$ 倍频，得到的频率是 $2n\omega_r+2\omega_0$，将这个倍频光与光梳中的高频段的光 $2n\omega_r+\omega_0$ 在光探测器中产生拍频，即得到 $(2n\omega_r+2\omega_0)-(2n\omega_r+\omega_0)=\omega_0$.

（4）n 的测量

对 n 的测量有多种方法。①如果待测量的光频 ω_{CW} 是初步可知的，并且它的精度大于光梳频率间隔 ω_r，波数 n 可以通过解对应的方程 $\omega_{CW}=n\omega_r+\omega_0+\omega_b$ 而得到，要求 n 必须是整数. ②亨施用飞秒梳状频率进行的第一次实验中，用另一种方法解决了这个问题. 他们使用一个被动谐振腔，自由光谱范围是重复频率的 20 倍，每个脉冲在下一个脉冲到达之前已经在谐振腔来回反射 20 次，每次反射时都有光输出，所以一个脉冲变为 20 个脉冲，因而光脉冲重复率提高到 20 倍. 因此，重复率变为 $\omega_r'=20\omega_r$，公式(26.10)变为 $\omega_{CW}=20n\omega_r+\omega_0+\omega_b$，因此，$n$ 变化 1，ω_{CW} 即有很大变化. 这样更容易决定 n. ③用两个不同的光梳，频率间隔分别是 ω_{r1} 和 ω_{r2}，测量同一个光频 ω_{CW}，所以两次测量实验对应两个重复频率，得到了下面两个方程：

$$\omega_{CW}=n_1\omega_{r1}+\omega_0\pm\omega_{b1} \tag{26.11}$$

$$\omega_{CW}=n_2\omega_{r2}+\omega_0\pm\omega_{b2} \tag{26.12}$$

对于给定的光频 ω_{CW}，能够精确的测量出模数 n_1、n_2. 例如考虑两束重复频率分别为 750 MHz 和 751 MHz 的脉冲，由于两束脉冲是从同一个光源发出的，经过不同的分割器，因此偏移频率 ω_0 相同，而拍频相差也很小，从第一个光梳出来的脉冲在 750×751 MHz=563.25 GHz 以后才会与从第二个光梳出来的脉冲相重合，也就是说脉冲重复位置的频率是

563.25 GHz 的整数倍，先初步地估计一下光频 ω_{CW}，确定光频位于哪一个重复位置之间. 然后根据测出来的 ω_{b1} 和 ω_{b2}，再在那个重复位置之间找出第一个光梳和第二个光梳的差频的值等于 $\omega_{b1}-\omega_{b2}$ 的两条线，而这两条线在这个区域是唯一确定的，然后根据 $n=\frac{\omega}{\omega_r}$ 可以精确的求出 n_1、n_2.

26.2.5 用光梳测量光频的装置图

图 26.4 是用光梳测量光频率装置的示意图. 其中在左上角是钛宝石飞秒激光器. 用 $\lambda/2$ 波片是为了提高信噪比. 30 cm 长的光子晶体光纤是为了产生有几十万“齿”的光梳. KTP 晶体用于倍频与拍频. 光学延迟线是为了使光梳的频率间隔增大到 20 倍以利于决定 n.

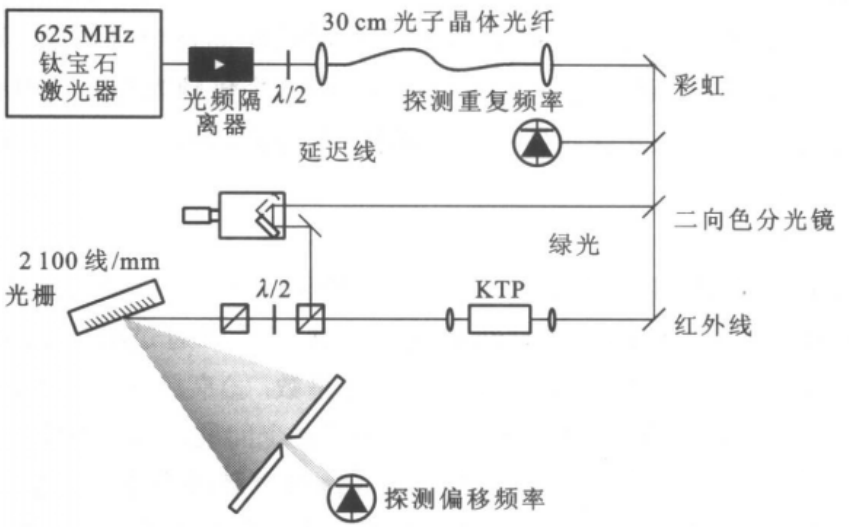


图 26.4 用光梳测量光频率的实验装置图

用飞秒激光光梳精确测量光频，有十分重要的意义：①解决了光谱学中需要精确测量光频的百年难题. ②有利于发展精确计时的原子钟. ③有助于提高全球定位系统的精度. ④因为频率测量与时间测量是密切相关的，精确测量光频就有可能检测在空间各个方向上时间是否均匀，从而检测相对论. ⑤可能用于检验反物质（例如反氢原子）与正物质的光谱是否有差别. ⑥有可能更精确测量精细结构常数 $e^2/\hbar c$，从而考察 $e^2/\hbar c$ 是否随时间变化，进而判定光速 c 是否可变.

26.3 阿秒激光的产生

阿秒即 10^{-18} s，记为 as，下面介绍从皮秒（即 10^{-12} s，记为 ps）到飞秒

技术的发展，有几个必要的条件：一是新型增益介质的出现. 对于飞秒脉冲的产生来说，必须要求具有宽的增益带宽. 根据傅里叶变换，增益带宽与持续时间成反比，只有足够的增益带宽才能保证飞秒输出. 二是采用新的激光技术. 飞秒脉冲产生利用了新的锁模技术，其中克尔透镜锁模技术已成为最常采用的技术. 三是谐振腔镜的镀膜工艺及腔内色散补偿技术的发展. 只有在宽带膜及有效的高阶色散补偿的保证下，才能得到 10 fs 以下的超短脉冲.

当飞秒脉冲向更短的阿秒迈进时，产生飞秒的方法却不再适用. 原因很简单，主要是受到光振荡周期的限制. 可见光的振荡周期大约是 2 fs，由于脉冲持续时间不可能短于一个光振荡周期，所以在可见光波段不可能产生短于飞秒的光脉冲，要想实现阿秒脉冲必须在高频区（如极紫外或软 X 射线区）想办法. 但是，要想利用传统的光学谐振腔来产生紫外阿秒脉冲有如下困难：一是没有极紫外区的激光介质，二是缺乏在紫外区镀宽带膜的成熟技术. 既然激光介质和谐振腔这两个条件都不具备，人们只能另想办法来产生阿秒脉冲.

目前人们在产生阿秒脉冲的原理和方法上作了大量的前探索. 最有前途的方案是超短脉冲的谐波合成技术. 具体的可行技术有两种：一种是利用超强超短激光脉冲与惰性气体的非线性作用产生高次谐波，或者用受激拉曼散射，从而得到阿秒脉冲. 另一种是相位锁定光学参量或同步飞秒激光产生的可见光亚谐波合成技术.

用高次谐波产生阿秒脉冲技术有了突破性的进展.

图 26.5 就是 Paul Corkum 模型的简单图示解释. Paul 认为，当超强超短激光脉冲与气体原子靶相互作用时，超强超短脉冲作为驱动光场，极大地改变了原子中电子的电离势曲线，结果使束缚电子可以穿透这个势垒发生隧道效应而使原子电离. 被电离出的自由电子在随后的光场中加速或减速，并与它脱离的离子或周围的离子碰撞复合. 发光的光子能量等

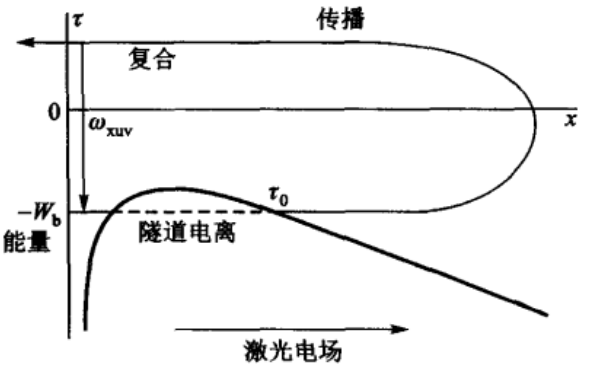


图 26.5 高次谐波产生的 Paul Corkum 模型

于电离电位 W_b 与电子从激光光波场中得到的动能之和. 图 26.5 中发射出的光子频率表示为 ω_{xuv}，处于极紫外或软 X 射线区. 由于这种基本过程与激光频率准周期性的叠加，从而产生了谐波. 而电子是在光强最大(波峰或波谷)处被精确电离，同时辐射高次谐波，所以辐射是在极短的时间内产生. 理论计算出这个时间大约是 100 as. 但是在一个光周期内有两次辐射，这样产生的光脉冲是一个阿秒串，即每半个光周期有一个阿秒脉冲，这种间隔如此紧密的脉冲串在绝大多数实验中都是很难使用的. 可贵的是奥地利一个国际课题组解决了这个难题.

26.4 互相关测量原理

早在 1993 年，当人们首次观察到超短脉冲与气体相互作用产生高次谐波时就已经知道其中蕴含着阿秒成分，但一直苦于没有合适的办法进行测量. 可以说阿秒脉冲测量带给人们的是比阿秒脉冲产生更大的挑战. 从原理上讲，阿秒脉冲的测量也可以采用测量飞秒脉宽的自相关法. 这种方法是用两个相同的延迟脉冲先后通过倍频晶体发生自相关作用，通过测量产生的二次谐波，从而获得这个脉冲的时间特性参数. 二次谐波自相关法在测量原理上非常简单，但是对于阿秒测量来说，实现起来有很多的障碍. 最大的困难是极紫外或软 X 射线阿秒脉冲的强度都太低，无法在原子介质中产生可测量的非线性效应. 1999 年，Papadogiannis 在这个基础上进行了重要的改进，他们利用驱动激光脉冲来代替其中一个要测的高次谐波脉冲. 这个想法来自于产生高次谐波的电离气体也可以作为非线性介质来测量脉冲宽度. 由于用驱动激光代替了一个高次谐波脉冲，相当于可见激光脉冲与高次谐波的互相关作用，和自相关测量法相对应，这种方法实质上是一种互相关测量法. 这种测量高次谐波脉冲宽度的方法在实验上虽然简单，但在原理上却是非常复杂的，因为在这个过程中，产生和测量是同时发生、互相影响的，所以这种测量方法的物理机制和高次谐波的产生机制密切相关.

互相关测量阿秒脉冲的基本物理思想是，当一个极紫外或软 X 射线光脉冲射入非线性气体介质时，使介质原子发生光电离，所产生的光电子在产生时刻受到比 X 射线脉冲延迟了时间 t_d 的驱动激光脉冲光场作用，其动能发生改变，改变的大小取决于此时刻激光脉冲的振荡光场的振幅、载波频率和绝对相位. 理论预言，如果高次谐波光脉冲时间相对于半个驱动激光脉冲而言很短，则在平行于激光偏振方向的动量分量中将会加入一个改变量，结果导致在光电子动量的角度分布中，动量质心在平行于激

光偏振方向有上移或下移现象，如图 26.6 所示，这与光电子产生时刻激光电场的绝对相位有很大关系，这里所说的绝对相位也就是飞秒激光稳

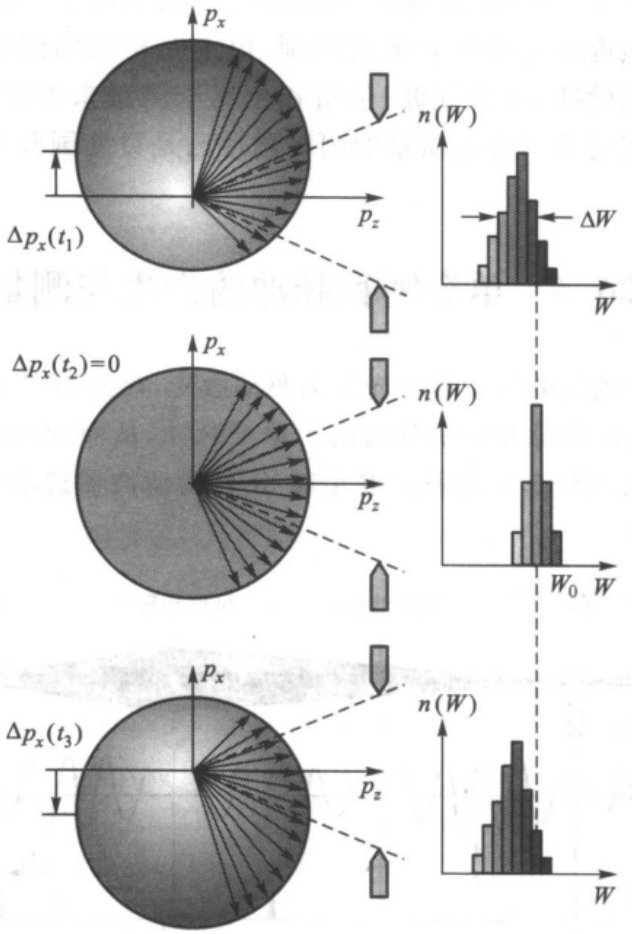


图 26.6 互相关测量原理图[6]

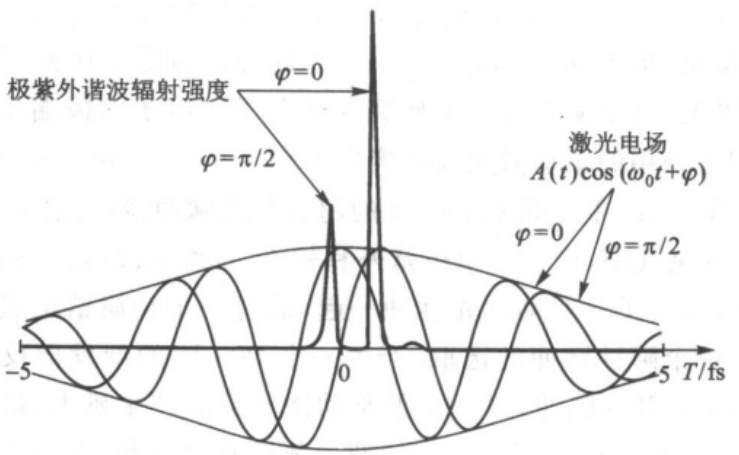


图 26.7 载波-包络相位分别为 0 和 $\pi/2$ 时产生的高次谐波

频控制中的载波-包络相位. 当超短脉冲的持续时间只有几个光周期时，载波-包络相位对高次谐波的产生影响很大，图 26.7 表示载波-包络相位分别为 0 和 $\pi/2$ 时所获得的高次谐波的时间特性曲线. 可以明显看出，两个曲线的强度和脉宽都有很大差别. 由于互相关的测量实际上也要用到驱动激光脉冲，所以载波-包络相位对于测量来说也有很大影响. 如何通过控制它来产生高质量的阿秒脉冲已是目前国际上的一个研究热点.

26.5 单个阿秒脉冲的产生与测量

利用几个周期的强飞秒激光作为驱动激光，再使用一个高通滤波器，从数目较少的阿秒脉冲串中分离出了单个脉冲，从而为阿秒脉冲的实用化奠定了基础. 图 26.8 为采用重元素 Zr 作为滤波器选取单个阿秒脉冲的实验原理图.

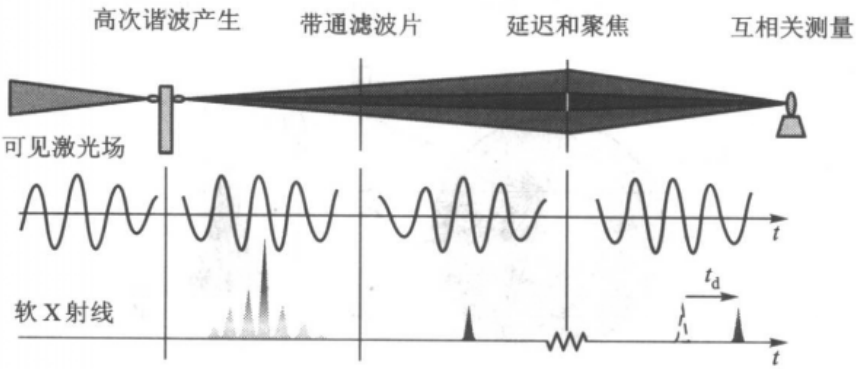


图 26.8 单个阿秒脉冲产生与测量的实验原理图[6]

利用高次谐波产生单个亚飞秒的 X 射线脉冲技术以及上述介绍的互相关测量法，奥地利 Krauze 于 2001 年成功地测得了脉宽 650 as 的 X 射线高次谐波. 这个实验打开了研究原子分子中电子的极端超快过程的大门. 他们所采用的驱动激光场是聚焦强度为 $9\times10^{14}\ \mathrm{W/cm^2}$、脉宽 7 fs、中心波长 750 nm、重复频率 1 kHz 的超短激光脉冲. 将其射入 3 mm 长、200 mbar 的氖气中，产生一串极紫外和软 X 射线谐波脉冲. 然后将此 X 射线与共线的可见光驱动激光脉冲一起，通过一个金属锆组成的带通滤光片，进行单个阿秒脉冲的选取. 产生一个 90 eV 的低发散反射镜聚焦和强化此软 X 射线脉冲，对于可见驱动激光又会产生延迟，最后以此延迟自由可见激光和软 X 射线共同辐照一氪原子气体靶，通过在垂直于激光偏振方向的小角度内探测产生光电子的能谱位移，从而获得 X 射线脉

冲的持续时间约为 650 as±150 as.

在这个实验中，光电子的产生和测量都是利用惰性气体作为激光靶产生非线性原子电离. 在产生过程中，首先超短超强飞秒激光激发原子场电离并得到具有阿秒量级的高次谐波串. 为了分离出单个阿秒脉冲，关键是要采用脉宽仅几个光周期的飞秒脉冲. 在测量过程中，软 X 射线脉冲与气体原子发生光电效应，产生光电子. 然后通过观察光电子在驱动激光脉冲作用下能谱位移改变情况，从而得到软 X 射线的脉宽. 这里观察角度的选取一方面有上面分析的原因，另一方面还可以避免驱动激光激发的阈上光电离的噪声背景. 其实，测量过程实际上也是一种改进的超快时间分辨率光谱探测技术，只不过这里是双波长的抽运与探测. 这种技术可以帮助我们“看”到原子内部电子的动力学过程，甚至可以实现人们梦寐以求的对电子波包的控制，就像控制一个经典球体的运动轨迹一样. 总之，这个实验最大的突破在于：第一次测量了阿秒脉冲的时间特性. 第一次得到了孤立的阿秒脉冲，第一次在阿秒时间尺度利用双波长抽运探测技术研究了原子中电子的运动机制.

26.6 面临的问题与应用前景

虽然已经能够产生单个阿秒 X 射线脉冲，但是仍有许多问题需要深入研究与改进. 首先阿秒脉冲的产生和测量技术仍需要继续改善. 除了继续追求质量更高、性能更稳定的高次谐波外，采用可见光波段亚谐波合成阿秒脉冲是一种令人感兴趣的技术. 由此所得到的阿秒脉冲除了具有比高次谐波高得多的光子能量外，而且更易控制操作并实现单周期运行. 其次，用于产生阿秒高次谐波的强驱动飞秒激光的特性也需深入的研究，尤其是要可靠地控制几个周期的飞秒激光的载波-包络相位. 因为阿秒脉冲是在驱动激光亚飞秒周期内产生的，所以激光脉冲的控制必须在亚飞秒周期的时间尺度内进行. 这样，光场振荡的可重复性必须在阿秒精度内，以便产生重复性很好的阿秒脉冲. 在技术上，如何控制强激光脉冲载波-包络相位，使每个飞秒脉冲的时间抖动在阿秒时间精度内，是阿秒实用化进程中需要解决的另一个关键问题. 总之，阿秒科学已经来临. 单个阿秒脉冲的出现在超快光谱学方面掀开了新的篇章. 科学家也将从研究原子分子动力学过程的飞秒化学时代进入研究原子内电子动力学的阿秒物理时代. 用阿秒激光揭示电子动力学过程（如内壳层动力学过程）并控制这些过程，将导致阿秒激光物理的诞生. 这无疑是重要前沿课题.

习题与思考

(1) 讨论钛宝石激光的克尔透镜锁模的机理.

(2) 光梳是怎样产生的? 怎样用光梳测量光频率?

(3) 说明阿秒激光的产生与测量方法.

参 考 文 献

[1] Hall J L, Jun Ye, Diddams S A, et al. Ultrasensitive spectroscopy, the ultrastable lasers, the ultrafast lasers, and the seriously nonlinear fiber: a new alliance for physics and metrology. Journal of quantum electronics, 2001, 37(12): 1482 - 1492.

[2] Jones D J, Diddams S A, Ranka J K, et al. Carrier-envelope phase control of femtosecond mode-locked lasers and direct optical frequency synthesis. Science, 2000, 288, 635 - 639.

[3] Holzwarth R, Udem T, Hänsch T W, et al. Optical frequency synthesizer for precision spectroscopy. Phys. Rev. Lett., 2000, 85: 2264 - 2267.

[4] Holzwarth R, Zimmermann M, Udem T, et al. White-light frequency comb generation with a diode-pumped Cr: LiSAF laser. Opt. Lett., 2001, 26, 1376 - 1378.

[5] Udem T, Holzwarth R, Hänsch T W. Optical frequency metrology. Nature, 2002, 416, 233 - 237.

[6] Hentschel M, Kienberger R, Spielmannet C, et al. Attosecond metrology. Nature, 2001, 414: 509 - 513.

第 27 章　THz 辐射技术与应用

THz 辐射(terahertz radiation)，又称为 T 射线，这是介于红外与毫米波之间的电磁波. 1 THz＝10^{12} Hz，对应于波长 $\lambda=300$ μm. 这是近十几年以来新开发的波段，正成为研究热点之一. 本章介绍 THz 辐射的概念，THz 辐射的产生与检测，THz 辐射时域光谱技术与成像技术，以及 THz 辐射的应用.

27.1　THz 辐射的概念与特性

THz 辐射技术被美、日等国列为 21 世纪初优先开发的技术.

THz 辐射通常指的是波长在 0.3 mm～30 μm(0.1 THz～10 THz)之间的电磁波，其波段在红外与毫米波之间，属于远红外波段，如图 27.1 所示. 在 20 世纪 80 年代中期以前，由于缺乏有效的产生方法和检测手段，科学家对于该波段电磁辐射性质的了解非常有限. 近十几年来，超快激光技术的迅速发展，为 THz 辐射的产生提供了稳定、可靠的激发光源，使 THz 辐射的研究和应用得到了蓬勃发展.

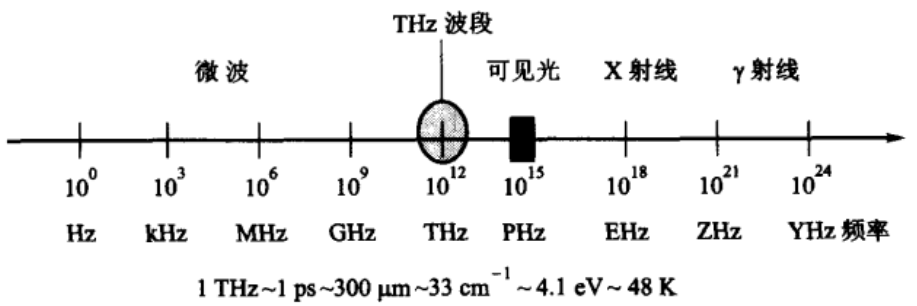


图 27.1　THz 波段在电磁波谱中的位置示意图

物质的 THz 谱包含了丰富的物理和化学信息. 同时 THz 辐射的优点决定了它在很多方面可以成为傅里叶变换红外光谱技术和 X 射线技术的互补技术. 使 THz 辐射在基础研究、工业及军事领域有重要应用. 随着 THz 技术的不断发展，它的应用领域也在不断扩展，在生物学、医学、微电子学、农业、安检和反恐以及其他一些领域显示出很大的应用潜力.

THz 辐射有很多独特的性质：

(1) 穿透性：THz 辐射对于很多非极性物质，如电介质材料例如土壤、砖、石及塑料、纸箱、布料等包装材料有很强的穿透力，可用来对包装的物品进行光谱研究与成像. 这对于安全检查与反恐有重要意义.

(2) 瞬态性：THz 脉冲的典型脉宽在 fs 量级，不但可以方便地对各种材料(包括液体、半导体、超导体、生物样品等)进行时间分辨的研究，而且通过取样测量技术，能够有效地抑制背景辐射噪声的干扰. 目前，辐射强度测量的信噪比可以达到 10^{10}，远远高于傅里叶变换红外光谱技术，而且其稳定性更好.

(3) 宽带性：THz 脉冲通常只包含若干个周期的电磁振荡，单个脉冲的频带可以覆盖从 GHz 至几十 THz 的范围，便于在大的波谱范围里分析物质的光谱性质.

(4) 相干性：常用的 THz 辐射具有激光的性质. 它是由相干电流驱动的偶极子振荡产生，或是由激光通过非线性光学差频效应产生. 由于它具有相干性，便能够直接测量电场振幅和相位，可以方便地提取样品的折射率、吸收系数等参数.

(5) 低能性：THz 光子的能量只有 meV，与 X 射线相比，不会因为电离而破坏被测样品.

(6) 许多大分子的振动能谱和转动能谱正好处于 THz 范围，使 THz 光谱技术在分析和研究大分子，特别是生物分子方面有广阔的应用前景.

THz 技术目前还存在以下一些技术问题：

(1) 由于大部分生物组织中含有丰富的水分，而水对 THz 辐射的吸收很强，这就大大降低了对生物样品成像的灵敏度.

(2) 目前所产生的 THz 脉冲的平均功率只有 nW 到 μW 的数量级，尽管对于单点探测可以达到 10^5 或更高的信噪比，但是 THz 实时二维成像的信噪比却较低. 要获得高信噪比的成像，则需要更高功率的辐射源.

(3) 由于 THz 波的波长较长，限制了 THz 成像系统的空间分辨率. 若利用近场成像和动态孔径技术，能大大提高空间分辨率.

(4) 为了应用 THz 技术，还要使 THz 系统向小型化发展.

美国和日本提出，要在 2009 年前后开发出实用的太赫兹安全检查技术.

27.2 THz 辐射的产生与探测

本节介绍 THz 辐射的产生与探测的方法.

27.2.1 THz 辐射的产生

产生 THz 辐射的方法包括热辐射、耿(Gun)氏管、自由电子激光器、分子激光器、光电导、光整流、光参量振荡等.

目前产生 THz 辐射的主要方法是用超短激光脉冲作为激发源. 通常有两种方法:光导激发机制和光整流效应.

光导机制是在光电导半导体材料(如 GaAs)表面淀积金属,制成偶极天线电极结构,利用飞秒激光照射电极之间的光电导半导体材料,会在其表面瞬时地(10^{-14} s 量级)产生大量电子-空穴对. 这些光生载流子在外加电场或内建电场作用下被加速,并由于光生载流子的复合,在光电导半导体材料表面会形成变化极快的光电流,从而产生 THz 电磁辐射脉冲. 如图 27.2 所示. 光导激发的 THz 辐射功率在 μW 量级.

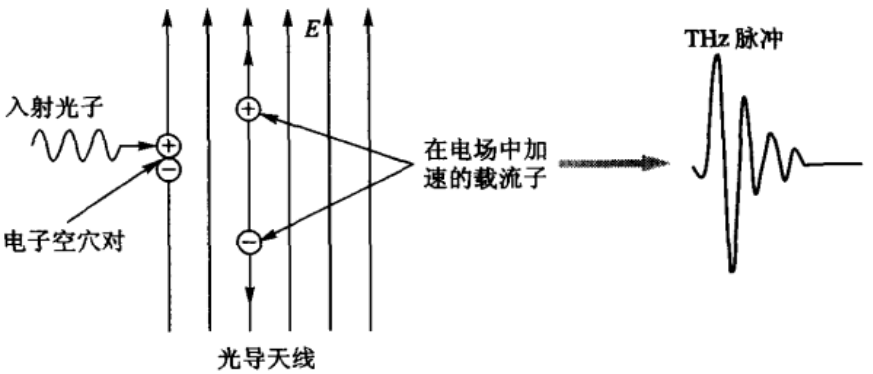


图 27.2 光导天线受激示意图

THz 辐射发射系统的灵敏度和响应速度取决于三个因素:光导体,天线几何结构和选通光脉冲宽度. 光导体是产生超短电磁脉冲的关键部件,性能良好的光导体应该具有尽可能短的载流子寿命、高的载流子迁移率和介质耐击穿强度. 随着对光导开关的深入研究,已开发了很多适宜作光导开关的材料. 硅(Si)的载流子寿命较长,用于产生几百 ns 到 μs 级的脉冲以及用于脉冲整形. 由于其暗电阻低,容易烧毁,一般用于产生中、低功率. 砷化镓(Cr:GaAs)的载流子寿命典型值为 200 ps,暗电阻较高,因此 Cr:GaAs 常用于产生皮秒脉冲的大、中、小功率装置中. 另外一种材料磷化铟(Fe:InP)的性能与砷化镓相似. 钻石材料要求很短波长的光去触发,介质击穿强度非常高,是目前工作电压最高的光导体材料. SOS(宝石上外延硅)材料由于载流子寿命短,常用于共面结构中产生 ps、fs 电磁脉冲,也是目前运用最普遍的一种形式.

用光导开关方法产生 THz 辐射的方案中,以光导体作为辐射天线的

瞬态电流元. 天线结构通常有基本的赫兹偶极子天线、共振偶极子天线、锥形天线、传输线以及大孔径光导天线等. 大多数实验中采用了基本偶极子天线. 它的结构比较简单. 天线结构由 3 部分组成，即：(1) 平面偶极子，(2) 产生光电流的光导开关，(3) 用作欧姆接触的两条共面微带传输线.

增大外电场可得到更强的 THz 辐射. 制作大孔径的光电导天线可以提高 THz 辐射的效率.

光整流法是利用激光脉冲在电光晶体中的非线性效应，通过远红外差频的方法产生 THz 电磁辐射脉冲. 这种机制类似于利用光波产生静电场，被称为亚皮秒光整流方法. 光整流效应是一种非线性效应即差频，是利用激光脉冲(脉冲宽度在亚皮秒量级)和非线性介质(如 ZeTe 等)作用而产生低频电极化场，此电极化场辐射出 THz 电磁波，如图 27.3 所示. 电磁波的振幅强度和频率分布决定于激光脉冲的特征和非线性介质的性质. 常用的非线性介质有 $LiNbO_3$、$LiTaO_3$、有机晶体 DAST、GaAs 和 ZnTe 等. 用得最多的是 ZnTe 和 GaAs. 另外，DAST 是一种很有潜力的有机介质，它是非线性效应最强的材料之一.

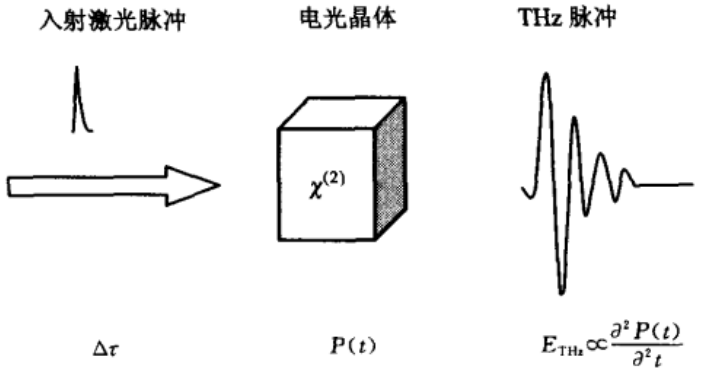


图 27.3 光整流效应

在这两种产生 THz 电磁波的方法中，用光导天线辐射的 THz 电磁波功率通常比用光整流效应产生的 THz 波功率高. 因为光整流效应产生的 THz 波的能量仅仅来源于入射的激光脉冲的能量，而光导天线辐射的 THz 波的能量主要来自天线上所加的偏置电场，可以通过调节外加电场的大小来获得较强的 THz 波. 但是，光导天线产生的 THz 电磁波的频率较低，而光整流产生的 THz 电磁波的频率较高.

27.2.2 THz 辐射的探测

脉冲 THz 辐射的探测也有两种方法：光导天线法和电光采样技术. 光导天线是最早用于 THz 探测的技术. 而目前电光采样测量技术已逐渐

取代了光导天线探测技术.

电光采样技术是利用激光脉冲在电光晶体中的线性电光效应进行电光采样. 例如,用 ZnTe 作探测晶体,用超快激光脉冲作为探测光,使该探测光束和 THz 辐射脉冲共线通过晶面取向为〈110〉的电光晶体 ZnTe. THz 电磁辐射脉冲的电场作用于 ZnTe,发生电光效应而调制 ZnTe 的折射率椭球. 通过测量探测光偏振态的改变,得到 THz 辐射脉冲的电场信息.

电光探测利用二阶非线性光学效应. THz 辐射的电场引起电光材料折射率发生变化. 这个折射率的变化影响了经过相同材料的探测光的椭圆偏振率. 把探测光束分为两个正交偏振成分可进而测量椭圆偏振率的变化. 用一个均衡的光电探测器来测量这两个正交偏振成分之间的强度差异,可给出一个与电场成比例的信号. 通过改变 THz 脉冲和探测激光脉冲之间的延迟,可以观察到完整的时间依赖的电场. 对于 THz 探测来说,电光探测是最普遍的选择. 这有两个原因:首先,电光材料在商业上很容易获得. 其次,电光探测适合有很宽的带宽的信号. 由于 THz 脉冲的众多应用,在 THz 电场的电光探测中获得一个好的信噪比是必需的. 信号探测的改进可以减少测量时间. 对于电光探测,像 ZnTe 和 GaP 这样的闪锌矿晶体是常用的. 在这里面,ZnTe 是非常合适的,因为它在远红外的折射率与近红外折射率是可比的,这导致了相对有效的 THz 探测.

光导天线的方法是利用一束探测激光脉冲在半导体材料内部产生瞬间载流子,同时利用 THz 的电场驱动瞬间载流子,这样就可得到反映 THz 电场信息的电流,从而得到 THz 信息.

光导天线探测 THz 波时由于产生光电流的载流子寿命较长,其探测带宽较窄. 电光取样技术的时间响应只与所用的电光晶体的非线性性质有关,有较高的探测带宽. 目前用电光取样探测到的频谱已超过 37 THz. 同时这种探测方法具有光学平行处理的能力和好的信噪比,使它在 THz 的实时二维相干成像技术中具有很好的应用前景.

27.3 THz 辐射时域光谱技术

本节介绍 THz 辐射时域光谱的概念以及由实验数据提取光谱信息的问题.

27.3.1 THz 时域光谱概念

THz 时域光谱技术(Terahertz time domain spectroscopy, THz-

TDS)是国际上近年来发展起来的技术. THz 时域光谱技术就是用 THz 脉冲透射样品或在样品上产生反射,测量由此产生的电磁场在时间上的变化,通过傅里叶变换获得频域上幅值与位相的变化,进而得到样品信息的技术.

典型的 THz 时域光谱实验系统主要有飞秒激光器、THz 发射元件、THz 探测元件和时间延迟控制系统组成,如图 27.4 所示.

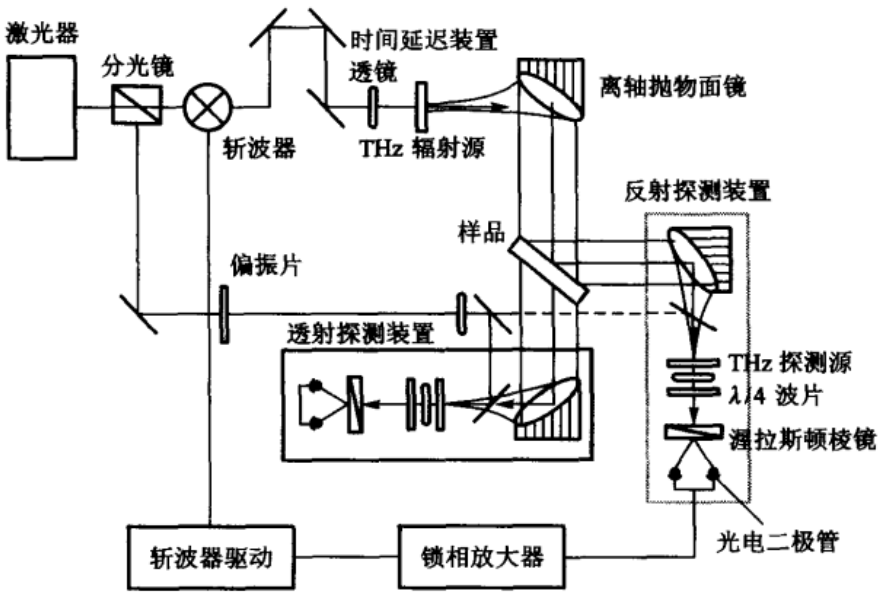


图 27.4 THz 时域光谱系统典型装置图

飞秒激光器产生的激光脉冲经过分光镜后被分为两束. 一束激光脉冲(激发脉冲)经过时间延迟系统后入射到 THz 辐射源上产生 THz 辐射,另一束激光脉冲(探测光)和 THz 脉冲一同入射到 THz 探测器件上. 延迟装置可改变探测光与 THz 辐射脉冲的光程差,使探测光在不同的时刻对 THz 脉冲的电场强度进行取样测量,最后获得 THz 脉冲电场强度的时间波形.

THz 时域光谱系统分为透射型和反射型,既可以做透射探测,也可以做反射探测,还可以在泵浦—探测的方式下研究样品的时间动力学性质. 对于不同的样品、不同的测试要求可以采用不同的探测装置. 反射探测装置和透射探测装置类似. 可以采用一个可调节的装置,既可进行透射测量又可进行反射测量.

测量出 THz 辐射脉冲的波形并进行傅里叶变换,就可以得到 THz 脉冲的频谱. 分别测量通过样品前后(或直接从样品激发)的 THz 脉冲波形,并对其频谱进行分析和处理,就可获得被测样品折射率、介电常数、吸

收系数和载流子浓度等物理信息.

THz 时域光谱技术的优点在于:(1) THz 时域电场波形包含了 THz 脉冲的强度、相位、随时间变化等更完整的信息,通过傅里叶变换可同时得到吸收光谱和色散光谱.通过测量样品在 THz 波段的吸收光谱和色散光谱可进而得到不同分子的构象和分子间非共价键相互作用的信息.(2) 飞秒激光激发的 THz 脉冲峰值功率比热辐射中远红外成分的功率更高,并且利用飞秒激光进行时间符合测量,信噪比要远远高于利用热辐射的远红外光谱仪.(3) THz 时域光谱的时间分辨率高.使它有一些独特的应用,如高温材料的 THz 光谱、非线性 THz 发射光谱和光学泵浦—THz 探针实验.

27.3.2 THz 时域光谱数据处理

电磁波在与物质作用时,其振幅变化由反射系数和折射系数决定,菲涅耳(Fresnel)公式给出了它们之间的关系:

1. 透射系数

$$t_{/\!/}=\frac{2n_1\cos\theta_i}{n_2\cos\theta_i+n_1\cos\theta_t} \tag{27.1}$$

$$t_{\perp}=\frac{2n_1\cos\theta_i}{n_1\cos\theta_i+n_2\cos\theta_t} \tag{27.2}$$

2. 反射系数

$$r_{/\!/}=\frac{n_2\cos\theta_i-n_1\cos\theta_t}{n_2\cos\theta_i+n_1\cos\theta_t} \tag{27.3}$$

$$r_{\perp}=\frac{n_1\cos\theta_i-n_2\cos\theta_t}{n_1\cos\theta_i+n_2\cos\theta_t} \tag{27.4}$$

其中 // 和 ⊥ 分别表示 $\boldsymbol{E}$ 平行于入射面和垂直于入射面入射的情况,θ_i 和 θ_t 为入射角和折射角,其具体的关系由折射定律决定:

$$n_1\sin\theta_i=n_2\sin\theta_t \tag{27.5}$$

一般的,用复折射率 $\tilde{n}(\omega)=n(\omega)-\mathrm{i}\kappa(\omega)$ 描述样品的宏观光学性质,其中 $n(\omega)$ 为实折射率,简称折射率,它描述样品的色散特性.$\kappa(\omega)$ 为消光系数.$\kappa(\omega)=\alpha(\omega)c/2\omega$,其中 $\alpha(\omega)$ 为吸收系数,它与 $\kappa(\omega)$ 描述样品的吸收特性.

假定实验中 THz 时域光谱系统的响应函数是不随时间改变的,还要求所测的样品结构均匀,前后表面被抛光且保持互相平行.分别探测没有样品时的参考信号和带有样品信息的样品信号,如图 27.5 所示,假设电磁波 $\boldsymbol{E}$ 平行于入射面入射,在 THz 刚到达样品时,其波形用 E_{initial} 表示.

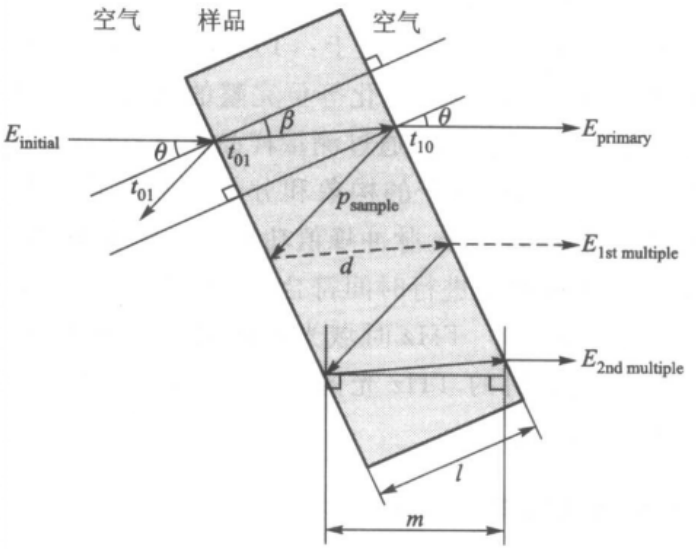


图 27.5 THz 在平板型介质中传播示意图

这时，(27.1)，(27.3)式可表示为：

$$t_{ab}(\omega)=\frac{2\,\tilde{n}_a(\omega)\cos\theta}{\tilde{n}_a(\omega)\cos\beta+\tilde{n}_b\cos\theta} \tag{27.6}$$

$$t_{ab}(\omega)=\frac{\tilde{n}_b(\omega)\cos\theta+\tilde{n}_a\cos\beta}{\tilde{n}_a(\omega)\cos\beta+\tilde{n}_b\cos\theta} \tag{27.7}$$

a，b 表示由介质 a 到介质 b. 由方程(27.5)式可得到

$$\beta=\arcsin\left(\frac{n_a\sin\theta}{n_b}\right) \tag{27.8}$$

当电磁波在介质中传播距离 d 时，它的位相会发生相应的改变，其大小由传输因子决定.

$$p_b(\omega,d)=\exp\left(\frac{-\mathrm{i}\,\tilde{n}_b(\omega)\omega d}{c}\right) \tag{27.9}$$

在没有样品时，对于自由空气路径，

$$E_{ref}(\omega)=E_{initial}(\omega)\,p_{air}(\omega,x),\quad \tilde{n}_{air}(\omega)=1.000\ 27-\mathrm{i}0 \tag{27.10}$$

由图中的几何关系可得：

$$d=\frac{l}{\cos\beta} \tag{27.11}$$

l 为介质的厚度，THz 穿过样品后的波形可表示为：

$$E_{primary}(\omega)=E_{initial}(\omega)\,p_{air}[\omega,(x-m)]\times t_{01}\,p_{sample}(\omega,d)\,t_{10} \tag{27.12}$$

上式中 m 可由图中的几何关系得到：$m=d\cos(\theta-\beta)$， (27.13)

第一个和第二个反射回波分别可表示为：

$$E_{1\text{st multiple}}(\omega)=E_{\text{initial}}(\omega)\,p_{\text{air}}[\omega,(x-m)]\times t_{01}\,p_{\text{sample}}(\omega,d)\,r_{10}\,p_{\text{sample}}(\omega,d)\times r_{10}\,p_{\text{sample}}(\omega,d)\,t_{10}=E_{\text{initial}}(\omega)\,p_{\text{air}}[\omega,(x-m)]\times t_{01}\,p_{\text{sample}}(\omega,d)\,t_{10}\,r_{10}^{2}\,p_{\text{sample}}^{2}(\omega,d),\tag{27.14}$$

$$E_{2\text{nd multiple}}(\omega)=E_{\text{initial}}(\omega)\,p_{\text{air}}[\omega,(x-m)]\times t_{01}\,p_{\text{sample}}(\omega,d)\,t_{10}\,r_{10}^{4}\,p_{\text{sample}}^{4}(\omega,d)\tag{27.15}$$

考虑到 p 个回波的情况下，实际上穿过样品后波的形式可表示为：

$$E_{\text{complete}}(\omega)=E_{\text{initial}}(\omega)\,p_{\text{air}}[\omega,(x-m)]t_{01}\,p_{\text{sample}}(\omega,d)\times t_{10}\left\{1+\sum_{k=1}^{p}[r_{10}^{2}\,p_{\text{sample}}^{2}(\omega,d)]^{k}\right\}.\tag{27.16}$$

定义 $FP(\omega)=\sum_{k=0}^{p}[r_{10}^{2}\,p_{\text{sample}}^{2}(\omega,d)^{k}]$ (27.17)

其中 k 是多次反射的次数，而且样品置于真空中，样品两个端面外侧的介质是相同的.

可以看出 $FP(\omega)$ 为等比数列，因此 $FP(\omega)=\dfrac{1-r_{10}^{2p+2}\,p_{\text{sample}}^{2p+2}(\omega,d)}{1-r_{10}^{2}\,p_{\text{sample}}^{2}(\omega,d)}$ (27.18)

考虑(27.6)，(27.7)，(27.10)，(27.16)，(27.17)，可以得到 THz 的传输函数：

$$H(\omega)=\frac{E_{\text{complete}}(\omega)}{E_{\text{ref}}(\omega)}=\frac{4\,\tilde{n}_{\text{air}}(\omega)\tilde{n}_{\text{sample}}(\omega)\cos\theta\cos\beta}{[\tilde{n}_{\text{air}}(\omega)\cos\beta+\tilde{n}_{\text{sample}}(\omega)\cos\theta]^{2}}\times\left\{\exp\left(\frac{-\mathrm{i}[d\,\tilde{n}_{\text{sample}}(\omega)-m\,\tilde{n}_{\text{air}}(\omega)]\omega}{c}\right)\right\}FP(\omega)\tag{27.19}$$

考虑垂直入射的情况，这时 $\cos\theta=\cos\beta=1$，$\tilde{n}_{\text{air}}(\omega)=1$ 方程(27.19)变成：

$$H(\omega)=\frac{4\,\tilde{n}_{\text{sample}}(\omega)}{[1+\tilde{n}_{\text{sample}}(\omega)]^{2}}\exp\left\{-\mathrm{i}\omega\left[\frac{d\,\tilde{n}_{\text{sample}}(\omega)-d}{c}\right]\right\}\times\frac{1-\left[\dfrac{1-\tilde{n}_{\text{sample}}(\omega)}{1+\tilde{n}_{\text{sample}}(\omega)}\right]^{2p+2}p_{\text{sample}}^{2p+2}(\omega,d)}{1-\left[\dfrac{1-\tilde{n}_{\text{sample}}(\omega)}{1+\tilde{n}_{\text{sample}}(\omega)}\right]^{2}p_{\text{sample}}^{2}(\omega,d)}\tag{27.20}$$

将(27.9)式代入：

$$H(\omega)=\frac{4\,\tilde{n}_{\text{sample}}(\omega)}{[1+\tilde{n}_{\text{sample}}(\omega)]^{2}}\exp\left\{-\mathrm{i}\omega\left[\frac{d\,\tilde{n}_{\text{sample}}(\omega)-d}{c}\right]\right\}\times$$

$$\frac{1-\left[\frac{1-\tilde{n}_{\text{sample}}(\omega)}{1+\tilde{n}_{\text{sample}}(\omega)}\right]^{2p+2}\exp[-\mathrm{i}(2p+2)\tilde{n}_{\text{sample}}(\omega)\omega d]}{1-\left[\frac{1-\tilde{n}_{\text{sample}}(\omega)}{1+\tilde{n}_{\text{sample}}(\omega)}\right]^{2}\exp[-2\mathrm{i}\,\tilde{n}_{\text{sample}}(\omega)\omega d]}$$

对于厚样品情况，可以忽略回波，这时可以取 $p=0$，传输函数可以简化为：

$$H(\omega)=\frac{4\,\tilde{n}_{\text{sample}}(\omega)}{[1+\tilde{n}_{\text{sample}}(\omega)]^2}\exp\left\{-\mathrm{i}\omega\left[\frac{d\,\tilde{n}_{\text{sample}}(\omega)-d}{c}\right]\right\} \quad (27.21)$$

将折射率公式代入上式并化为指数形式：

$H(\omega)=\rho(\omega)\exp[-\mathrm{i}\phi(\omega)]$，其中

$$\rho(\omega)=4[n^2(\omega)+\kappa^2(\omega)]^{1/2}\frac{1}{[n^2(\omega)+1]^2+\kappa^2(\omega)}\exp[-\kappa(\omega)\omega d/c]$$

$$\phi(\omega)=\frac{[n(\omega)-1]\omega d}{c}+\arctan\left[\frac{\kappa(\omega)}{n(\omega)\cdot(n(\omega)+1)+\kappa^2(\omega)}\right] \quad (27.22)$$

若 $\kappa(\omega)/n(\omega)\ll 1$ 时 $\phi(\omega)$ 可进一步简化为 $\phi(\omega)=\frac{[n(\omega)-1]\omega d}{c}$，因此只要知道了样品的厚度，$\tilde{n}(\omega)=n(\omega)-\mathrm{i}\kappa(\omega)$ 就可以从得到的 THz 的差谱中利用(27.22)式解出来.

这样就得到了样品的折射率、消光系数和吸收系数的计算公式：

$$n(\omega)=\Phi(\omega)c/\omega d+1 \quad (27.23)$$

$$\kappa(\omega)=\ln\{4n(\omega)/\rho(\omega)[n(\omega)+1]^2\}c/\omega d \quad (27.24)$$

$$\alpha(\omega)=2\kappa(\omega)\omega/c=(2/d)\ln\{4n(\omega)/\rho(\omega)[n(\omega)+1]^2\} \quad (27.25)$$

27.4 THz 辐射时域光谱实验

利用图 27.4 所示的实验装置，可得到被测样品的 THz 辐射时域光谱. 本节介绍用 THz 时域光谱技术得到的若干中药或其提取物的 THz 谱.

27.4.1 青蒿素的 THz 辐射光谱

青蒿素是我国的中医药专家从草药(青蒿)中提取的有效成分，用于治疗疟疾，有很好的效果，享誉世界.

图 27.6(a)是入射到样品的 THz 辐射脉冲，即参考信号. 图 27.6(b)是通过青蒿素样品，透射出来的 THz 辐射脉冲. 显然，透射脉冲的波形与入射脉冲有些不同. 这种差别，包含着样品的信息.

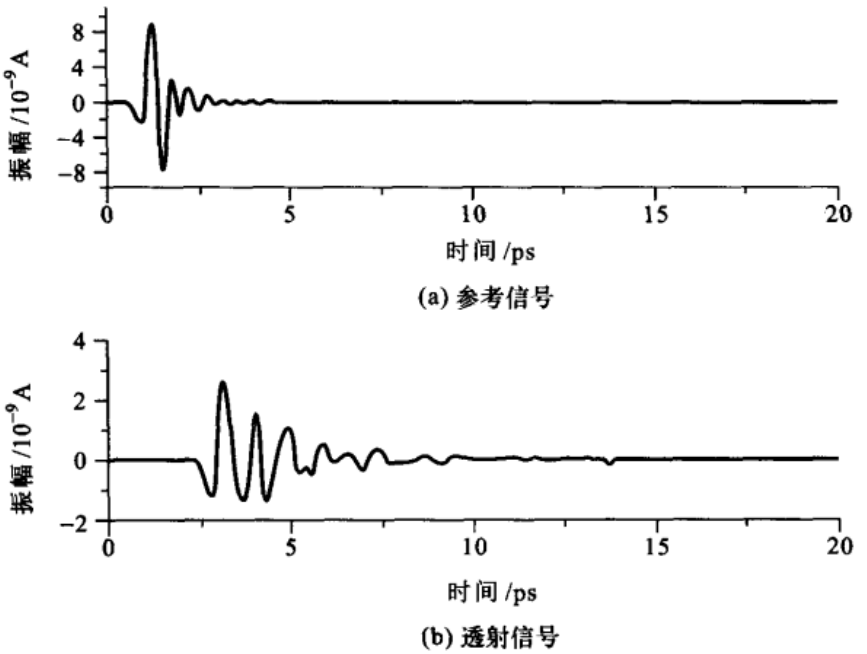


图 27.6 (a)入射的 THz 辐射脉冲;(b)从青蒿素样品透射的 THz 辐射脉冲信号

把透射脉冲与入射脉冲进行比较,利用公式(27.23)、(27.24)和(27.25)可以提取出样品的 THz 辐射光谱信息. 图 27.7 是青蒿素的 THz 辐射谱和折射率谱.

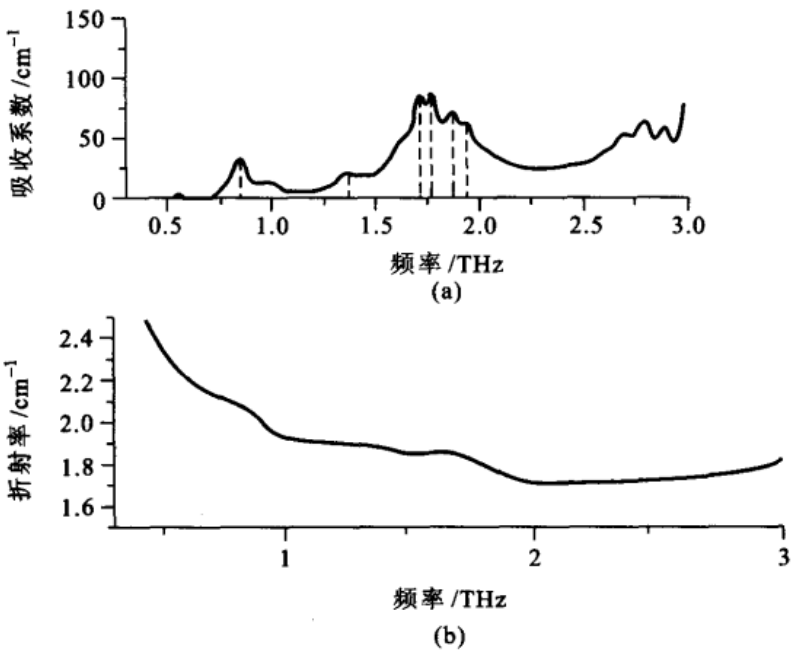


图 27.7 (a)青蒿素的 THz 辐射谱和(b)折射率谱

27.4.2 牛黄的 THz 辐射光谱

用同样的方法，还可以对牛黄进行研究. 图 27.8 是天然牛黄与人工牛黄的 THz 辐射光谱的比较. 由图可知，天然牛黄与人工牛黄的 THz 辐射光谱有差别. 因此，利用 THz 辐射时域光谱技术，可以鉴别天然中药与人工的中药.

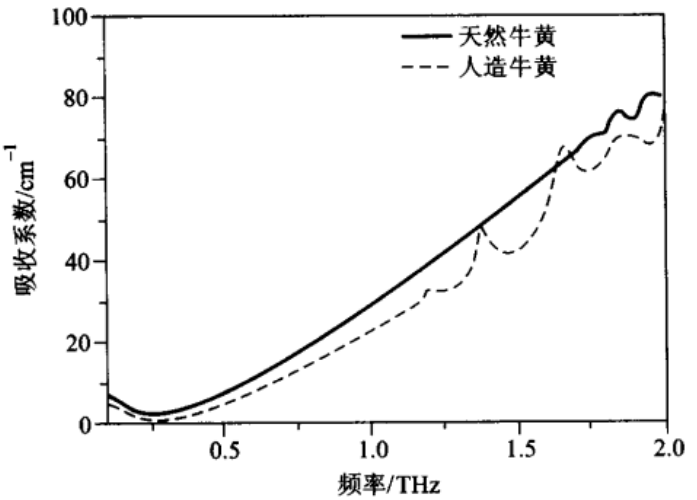


图 27.8 天然牛黄与人造牛黄的 THz 辐射光谱的比较

此外，THz 辐射技术还广泛用于半导体材料、DNA、蛋白质、毒品、炸药等多种样品的研究.

27.5 THz 辐射成像

本节介绍 THz 辐射成像的原理及初步实验.

27.5.1 THz 辐射成像原理

可见光、X 射线、电子束、中近红外光和超声波广泛用于医学诊断、材料分析中的成像. 与以上的信号相比，THz 辐射对于电介质材料具有相当高的穿透率. 除了可测量由材料吸收而反映的空间密度分布外，还可通过位相测量得到折射率的空间分布，获得材料的更多信息. 这是 THz 时域光谱的独特优点. 此外，THz 源的光子能量极低，没有 X 射线的电离效应，不会对材料造成破坏. 因此，THz 成像技术有望在安全检查和医学检查等方面成为 X 射线检测的补充手段.

THz 辐射成像的基本原理是：利用成像系统把成像样品的透射谱或

反射谱所记录的信息(包括振幅和相位信息的二维信息)进行处理和分析,就可以得到样品的 THz 图像. 与 THz 时域光谱相比,多了图像处理及扫描控制装置. 利用透射扫描或者反射扫描都可以成像,主要取决于样品及系统的性质. THz 成像系统的构成如图 27.9 所示. THz 成像系统的构成和工作原理与 THz 时域谱测试系统相似. THz 波被聚焦元件聚焦到样品的某一点上,收集元件则将透过样品(或从样品反射)的 THz 波收集后聚焦到 THz 探测元件上. THz 探测元件将含有位置信息的 THz 信号转化为相应的电信号. 图像处理单元将此信号转换为图像.

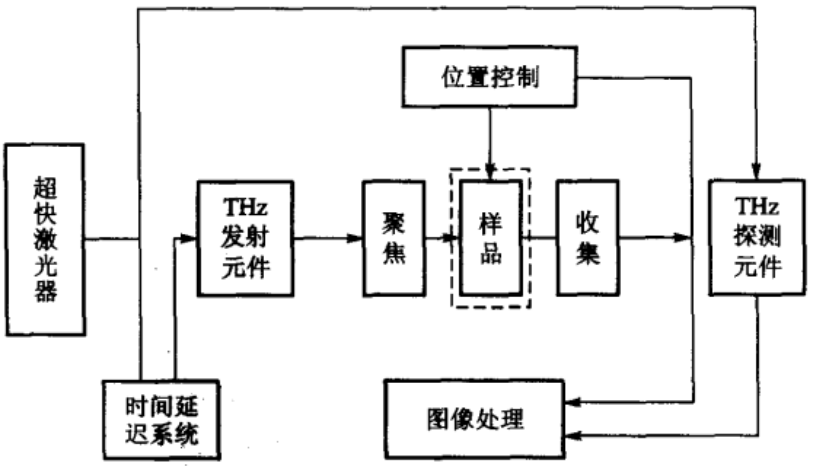


图 27.9 THz 成像系统示意图

THz 辐射成像与 X 射线成像相比,THz 辐射的光子能量极低(只有几个 meV),可以用来对人体或物品进行无损成像. THz 对于电介质材料及塑料、纸箱等包装材料有很强的穿透力,可用来对已经包装的物品进行成像. THz 辐射对水的穿透力很差,可以通过测量物质中的水分含量来控制质量,如对于已经包装好的食品,可以通过测定食品的水分含量来确定其新鲜程度. 通过对肉制品的 THz 检测发现,瘦肉对 THz 辐射吸收很强,而脂肪几乎不吸收 THz 辐射,利用此特性可以对肉制品进行质检. 另外,通过测量 THz 光谱,不仅可以得到物体光谱的强度(振幅)信息,还可得到其相位信息,因而可以用来对物体进行三维立体成像. 目前,THz 显微成像的分辨率可以达到几十 μm,能清晰地看到皮肤中的肿瘤,可以用于进行皮癌的诊断.

与微波、X 射线、核磁共振 NMR(nuclear magnetic resonance)成像相比,THz 成像不仅能给出物体的密度信息,而且能给出频率域的信息,以及在光频、微波和 X 射线范围内所不能给出的材料的转动、振

动信息. THz 成像技术在生物学、安全监测等方面有可能带来新的突破.

利用电光晶体和 CCD 实现实时成像，与扫描成像相比，可以很快地提高信息的提取速度. 由于 CCD 不能捕捉到 THz 信号，为此必须利用电光晶体进行频率转换. 每个像素点所对应的电光晶体的折射率的变化是由 THz 电场的强度所决定的. 当另一束激光穿过电光晶体时，由于 THz 场所引起的晶体的折射率的变化将会调制通过晶体的激光，因而 THz 信息被转化为光频信息.

27.5.2 成像实验

作为 THz 辐射成像的一个例子，图 27.10 给出了牙齿的 THz 辐射成像.

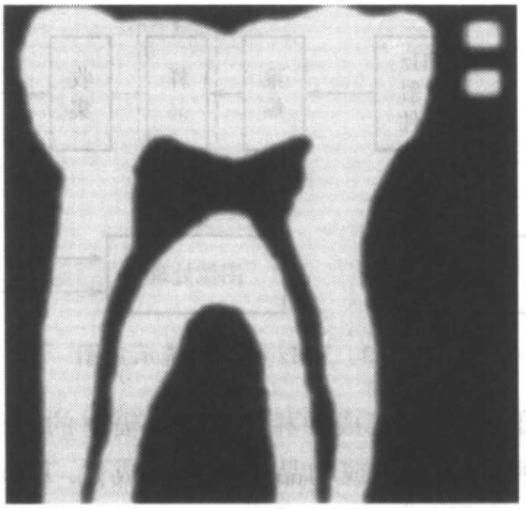


图 27.10 牙齿的 THz 辐射成像

THz 成像技术还可以对纳米材料、半导体材料或超导体材料物理特性的分布特征进行研究，如测量超导电流的矢量场分布图像等. 而且 THz 成像在生物医学样品中的应用也已经得到了广泛的关注. THz 近场成像技术已经使得其分辨率达到了波长以下的尺度. 在较长的一段时间里，THz 成像技术应用中的障碍之一在于设备复杂昂贵，对图像信息的分析和处理技术也有待进一步实用化. 目前，THz 系统已经实现了小型化，而连续 THz 辐射的产生技术也将使 THz 技术不再依赖于昂贵的飞秒激光器. 可以期望，随着技术的发展，THz 成像的应用前景将是非常广阔的.

27.6 隐蔽物的 THz 成像与光谱

由于 THz 辐射对许多材料有相当的穿透率，便有可能用于隐蔽物的成像与光谱研究.

27.6.1 土、石的 THz 辐射透过率

图 27.11 和 27.12 分别给出了土片、石片的 THz 辐射透射率与吸收系数.

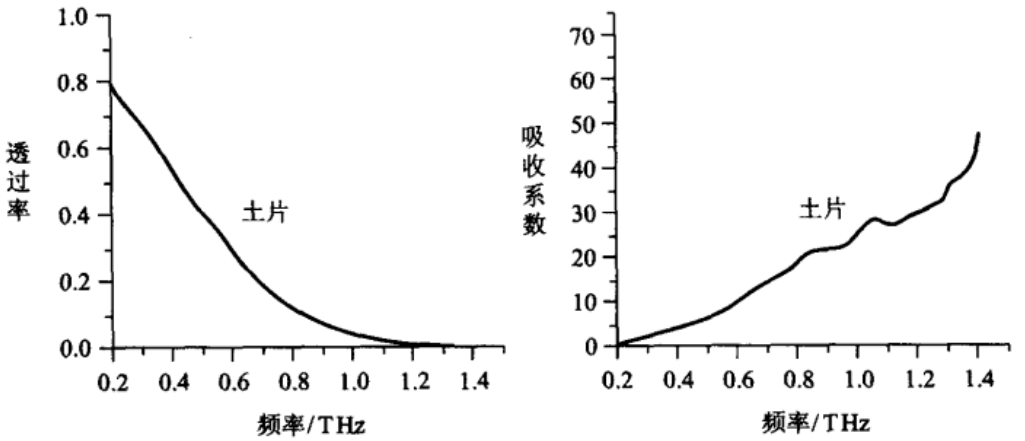


图 27.11 土片的 THz 辐射透射率与吸收率曲线(土片厚＝6 mm)

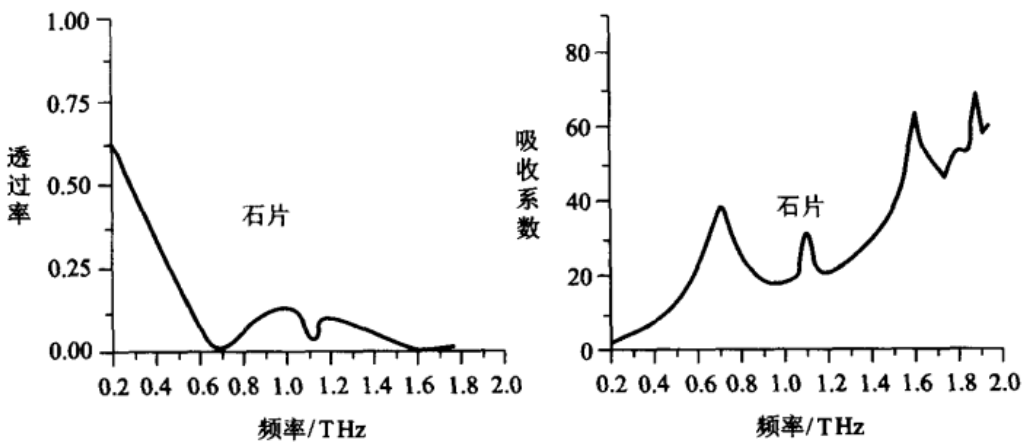


图 27.12 石片的 THz 辐射透射率与吸收率曲线(石片厚＝2 mm)

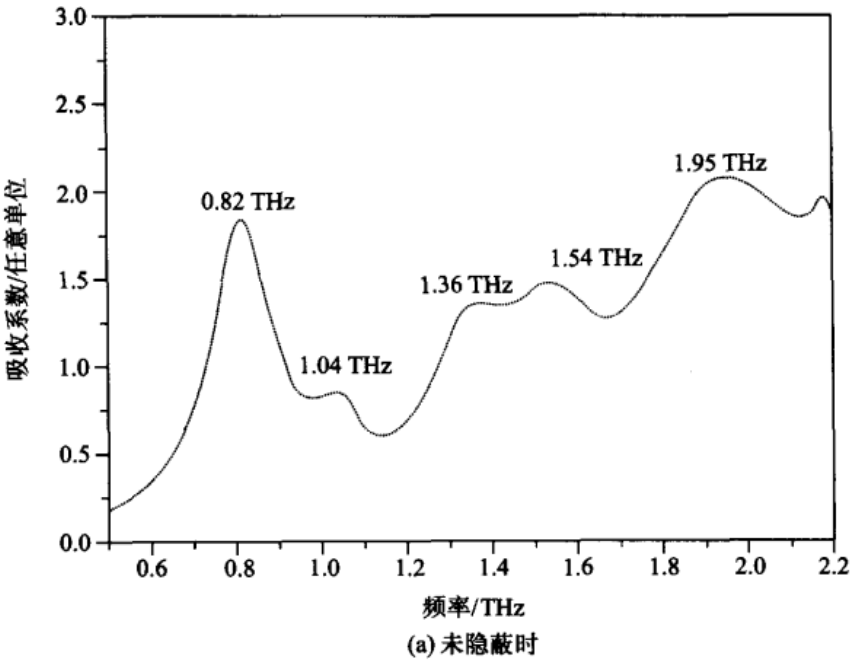
我们还对多种包装材料的 THz 辐射穿透特性进行了研究.

27.6.2 隐蔽的炸药的 THz 辐射光谱

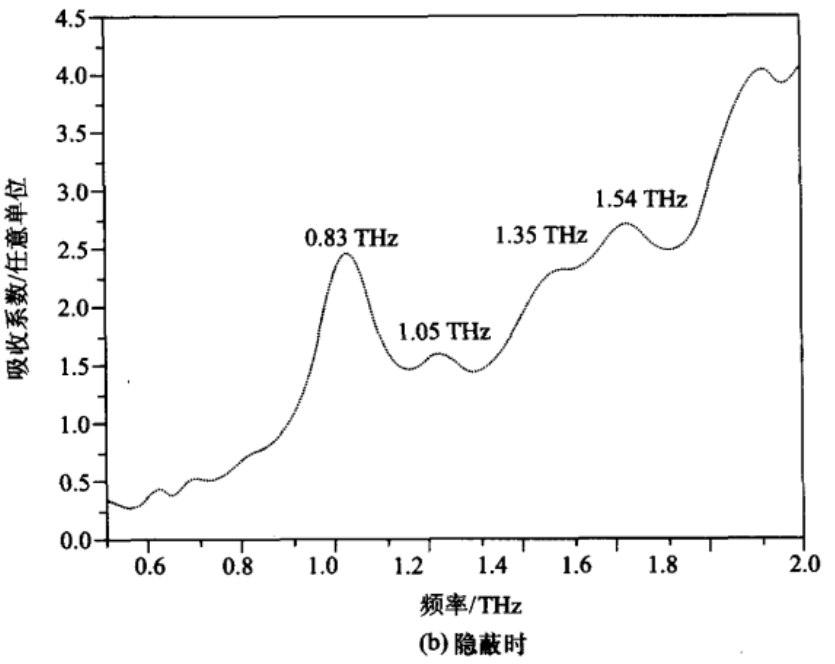
我们还研究了藏在迷彩服、制服、棉花、信封、牛皮纸等材料里的炸药的 THz 辐射谱.

图 27.13 是炸药 RDX 的 THz 辐射谱以及被隐蔽的 RDX 的 THz 辐射谱. 由此图可知,在 RDX 被隐蔽的情况下,仍可能发现其指纹谱 0.82 THz、1.05 THz 等. 但是,被隐蔽的 RDX,其 THz 辐射的指纹谱被吸收掉了.

RDX:



(a) 未隐蔽时



(b) 隐蔽时

图 27.13 炸药 RDX 的 THz 辐射谱

要真正把 THz 辐射技术用于隐蔽的炸药、炸弹的安全检查，还需做大量工作.

27.7 展 望

THz 辐射作为新的波段的电磁波，有许多奇特的性质. 它在对凝聚态材料、生物样品的研究中，会发挥很大作用. 它在医学中也可能获得应用.

将 THz 辐射用于炸药及毒品的安全检查，有重要意义. 应该把 THz 技术与现有的安全检查技术集成起来，以发挥更大的效能.

由于 THz 辐射对土、石、木、纸等有相当大的穿透特性. 因此，它有可能用于考古与文物保护. 当 THz 辐射源的功率提高之后，便可能直接用于对地下文物的探测.

从长远来看，THz 辐射穿地遥感与穿地成像雷达无疑是最诱人的.

参 考 文 献

[1] Hu B B, Nuss M C. Imaging with terahertz waves. Optics Letters, 1995, 20(4): 1716 - 1718.

[2] Han P Y, Zhang X C. Free-space coherent broadband terahertz time-domain spectroscopy. Measurement Science And Techology, 2001, 12: 1747 - 1756.

[3] Auston D H, Cheung K P, Smith P R. Picosecond photoconducting Hertzian dipoles. Appl. Phys. Lett., 1984, 45: 284 - 286.

[4] Han P Y, Zhang X C. Free-space coherent broadband terahertz time-domain spectroscopy. Measurement Science And Technology, 2001, 12: 1747 - 1756.

[5] Wang S, Ferguson B, Abbott D, et al.. T-ray imaging and tomography. Journal of Biological Physics, 2003, 29(2): 247 - 256.

[6] Zhang C, Sun D F, Chen W, et al. Wetting variation of the zirconia ceramic film by laser. Proc. of SPIE 2004, Vol. 5629.

[7] Zhang C, Liao Y, He S L, et al. Nanostructured YSZ membranes derived from inorganic salts Proc. of SPIE 2004, Vol. 5633.

[8] 徐新龙，王秀敏，李福利等. ZnSe 体单晶 THz 辐射段时域光谱测量及分析. 光学与光谱学分析，2004，24(10)：1153 - 1156.

[9] 李福利，张蕾等. 几种中药草的 THz 光谱研究. 见：全国光学大会论文集，2004 年 4 月

第 28 章　激光与协同学

本章介绍激光理论与协同学的关系. 这样可能有助于加深对激光物理知识的理解，并对交叉学科的研究有些启发.

28.1　从激光理论到协同学

协同学是哈肯从激光理论发展起来的. 协同学的英文 Synergetics 的含义是“合作”、“协同一致的工作”.

协同学研究的对象是自然界中普遍存在的自组织结构——空间结构、时间结构和功能结构. 这些结构不是上帝创造的，而是自组织的结果. 如果系统在产生空间结构、时间结构或功能结构的过程中，没有外界的特定干预(不是外界强加的)，这样的系统就是自组织系统.

人们对自组织并不陌生. 例如一个班级去讨论春游的问题. 这个班级是系统，每个人是子系统. 起初畅所欲言，提出各种想法，这就是涨落. 在讨论中，逐渐形成几种方案. 一种方案就是一种模式. 不同方案的比较和竞争就是模式竞争. 可能有的同学主张去泰山，有的主张去黄山，有的主张去其他地方. 讨论的结果，越来越多的同学认识到黄山有奇松、怪石、云海、瀑布，几乎集天下名山之大成. 投票表决的结果，去黄山的方案得到超过半数票的赞成. 赞成票的票数叫控制参数. 半数票叫临界点. 形成的决议叫序参量. 决议对每个成员有指导、伺服作用，大家都要服从决议，这就是协同学的伺服原理. 这是广义的民主集中制.

激光器是非平衡态自组织系统的典型代表. 一般说，非平衡态自组织系统(以下简称自组织系统)有几个特点：1) 开放性，2) 远离平衡态，3) 存在涨落(自发辐射)，4) 有自复制机理(受激辐射)，5) 有非线性(激光的雪崩式放大)，6) 有选模机制，7) 有正反馈，激光谐振腔即起选模与正反馈作用.

激光器在阈值以下时，发出的光与蜡烛的光无异. 一旦泵浦超过阈值，则从涨落开始起振. 涨落是无序，却又是有序之源. 不同模式竞争的结果，一个或少数模式占主导，其他模式被淘汰. 这样产生从无序到有序的相变. 泵浦强度或反转粒子数就是控制参数. 阈值是临界点. 激光光场是序参量. 序参量即 order parameter. Order 既是有序，也是命令. 因此，序

参量兼具有序和命令的含义. 序参量的特点之一是它在临界点为零,例如激光器在阈值时的激光光场为零. 激光的产生是大量子系(激发态原子)合作的结果,但一旦产生激光,则每个激发态的原子都要服从激光光场的命令,和谐有序地发出同方向、同偏振、同频率、同位相的光子即激光.

激光的空间分布(横模)即自组织的空间结构,激光光强随时间的变化即自组织的时间结构.

在形成自组织时,从无序到有序,对称性降低了,即发生了对称性破缺. 因此,自组织的本质是对称性破缺.

自组织结构与耗散结构有相似的含义. 协同学与耗散结构论有异曲同工之妙. 中国传统文化崇尚自组织. 老子的"道法自然"、"道常无为"就包含自组织.

自组织现象是普遍存在的. 协同学或自组织的理论与实验为对立统一、量变质变以及否定之否定提供了新的科学证据. 有人将自组织理论提升为自组织的世界观.

自组织理论为交叉科学研究提供了强有力的理论工具. 它把平衡态相变与非平衡态相变统一起来,并且在非生命现象与生命现象的理论之间以及自然科学理论与社会科学的理论之间初步架起了桥梁.

28.2 激光器的二级相变类比与信息的自组织

下面具体介绍激光器从无序到有序的相变过程.

大家知道,铁磁体的自发磁化是平衡态的二级相变的典型. 朗道的相变理论给出自由能公式

$$F(q,T)=F(0,T)+\frac{\alpha}{2}q^2+\frac{\beta}{4}q^4 \tag{28.1}$$

朗道把 q 称为序参量. 由热力学可知,分布函数为

$$f=N_n\exp[-F/k_BT] \tag{28.2}$$

这里 N_n 是归一化常数,T 是温度,k_B 是玻耳兹曼常量. 朗道假定

$$\alpha=a(T-T_c),\quad a>0 \tag{28.3}$$

容易证明,在二级相变中,自由能对温度的一阶导数是连续的(熵是连续的),而二阶导数不连续.

当 $T>T_c$ 时,$\alpha>0$,稳定点在

$$\frac{\partial F}{\partial q}=0,\quad q_0=0 \tag{28.4}$$

这时序参数为零. 熵 S 和比热 C 分别为

$$S=-\frac{\partial F(q_0,T)}{\partial T}=-\frac{\partial F(0,T)}{\partial T}=S_0 \tag{28.5}$$

$$C=T\frac{\partial S}{\partial T}=T\frac{\partial S_0}{\partial T}=-T\frac{\partial^2 F(0,T)}{\partial T^2} \tag{28.6}$$

当 $T<T_c$ 时,$\alpha<0$,稳定点在

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial F}{\partial q}=0\\&q_0=\pm(|\alpha|/\beta)^{1/2}\end{aligned}\right\} \tag{28.7}$$

$$S=-\frac{\partial F(q_0,T)}{\partial T}=S_0+[a^2/(2\beta)](T-T_c) \tag{28.8}$$

$$C=T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)=T\frac{\partial S_0}{\partial T}+[a^2/(2\beta)]T \tag{28.9}$$

比较(28.5),(28.6)式与(28.8),(28.9)式可知,在临界点 $T=T_c$,自由能的一阶导数连续,二阶导数不连续.

在激光理论中,激光器的等效的势函数 V 就相当于自由能.

令

$$\left.\begin{aligned}D_0'&=(g^2/\gamma_\perp)D_0\\D_c'&=(g^2/\gamma_\perp)D_c\end{aligned}\right\} \tag{28.10}$$

光场方程和等效函数分别为

$$\dot{a}=(D_0'-D_c')a-4\frac{g^2\kappa}{\gamma_{/\!/}\gamma_\perp}aa^+a \tag{28.11}$$

$$V=-\frac{1}{2}(D_0'-D_c')|a|^2+\beta'|a|^4 \tag{28.12}$$

为了简单,将(28.12)式写成

$$V=(D_0-D_c)q^2+\beta q^4 \tag{28.13}$$

在低于阈值时,$D_0<D_c$,稳定点在

$$\frac{\partial V(q)}{\partial q}=0,\quad q_0=0 \tag{28.14}$$

$$F(q_0)=V(q_0)=0 \tag{28.15}$$

$$\frac{\partial F(q_0)}{\partial D_0}=0 \tag{28.16}$$

$$\frac{\partial F^2(q_0)}{\partial D_0^2}=0 \tag{28.17}$$

在高于阈值时,$D_0>D_c$,由 $\partial V(q)/\partial q=0$ 决定的稳定点在

$$q_0=\pm\left(\frac{D_0-D_c}{2\beta}\right)^{1/2} \tag{28.18}$$

$$F(q_0)=V(q_0)=3(D_0-D_c)^2/(4\beta) \tag{28.19}$$

$$\frac{\partial F(q_0)}{\partial D_0}=\frac{3}{2}(D_0-D_c)/\beta\to 0,\text{当 } D_0=D_c \tag{28.20}$$

$$\frac{\partial^2 F(q_0)}{\partial D_0^2}=3/(2\beta) \tag{28.21}$$

比较(28.16),(28.17)和(28.20),(28.21)式可知,在临界点 $D_0=D_c$,自由能的一阶导数连续,二阶导数不连续.因此,激光器在阈值附近的行为与平衡态的二级相变相似.

激光器的无序与有序的转化,还表明**信息也是自组织的产物**.

哈肯定义了信息熵,

$$i_f=-\sum_i p\ln p_i \tag{28.22}$$

即采用"香浓的信息"的定义.这里的几率 p_i 即

$$p\propto\exp(-V/Q) \tag{28.23}$$

其中的等效势函数 V 由激光理论计算.用计算机求解,发现在激光器的阈值即临界点,信息熵 i_f 是连续的,从阈值之下到阈值之上,信息增加了.

此外,激光光强的表达式也有相当大的普遍性

$$\dot{I}=\alpha I-\beta I^2 \tag{28.24}$$

其中 α 是净增益,β 代表饱和,两个倾向互相制约.这正如中国的古书所说,"造化之机,不可以无生,也不可以无制.无生则发育无由,无制则亢而为害".信息的自组织理论可能有深远影响.思维过程是自组织的,意识的产生机理是大脑内的对称性破缺.未来的计算机也可能是自组织的.

28.3 光学双稳态与一级相变

光学双稳态是典型的非平衡态的一级相变.它的输出与输入之间的S形曲线,与平衡态的一级相变(例如磁滞回线)是相似的,同样,对光学双稳态也可定义等效的势函数 $V_y(x)$,而且可以画出 $V_y(x)$ 曲线(下标 y 代表输入的光场),由光学双稳态方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\kappa\left(y-x-\frac{2Cx}{1+x^2}\right) \tag{28.25}$$

可定义等效的势函数 $V_y(x)$,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\kappa\frac{\mathrm{d}V_y(x)}{\mathrm{d}x} \tag{28.26}$$

$$-V_y(x)=yx-\frac{1}{2}x^2-C\ln(1+x^2) \tag{28.27}$$

进而得到分布函数或几率

$$P(x)=\frac{1}{N_n}\exp[-V_y(x)/Q] \tag{28.28}$$

以上诸式中，x 和 y 分别是输出和输入光强，κ 是场的耗散，C 是合作参数，Q 是起伏，Q 的数量级为 10^{-2}，N_n 是归一化常数.

由香浓的信息的定义，得到信息公式

$$i_f=-\sum_i p_i\ln p_i=\int[P_y(x)\ln P_y(x)]\mathrm{d}x \tag{28.29}$$

用计算机计算 i_f-y 曲线，表明当 $C<4$ 时，信息 i_f 随 y 连续变化. 当 $C>4$ 时，i_f 随 y 的变化是不连续的. 众所周知，在共振条件下，光学双稳态的临界条件是 $C=4$. 当 $C>4$ 时，i_f-y 的不连续性突变，正是一级相变的典型特征，即在临界点，一级相变的信息熵是不连续的. 这是与二级相变的根本区别.

双稳态现象也是相当普遍的. 在图 10.2 中曾绘出人的视觉的双稳态现象，颇有启发. 人的听觉、嗅觉、味觉、触觉也可能有类似的双稳态现象. 这可能与大脑处理信息的动态过程有关.

28.4 经络的自组织理论

协同学与自组织理论为揭示经络的实质提供了新的可能性.

在介绍激光器与光学双稳态的相变类比时，我们看到，非平衡态相变与平衡态相变，在形式上有相似之处. 然而，有必要特别指出非平衡态结构与平衡态结构的重要区别.

用通俗的语言来说，自然界的结构可以分为两大类：一类是“活结构”，一类是“死结构”. 平衡态结构就是“死结构”，非平衡态结构则是“活结构”. 平衡态结构是司空见惯的. 例如，当温度降低到一定程度，水变成冰，或铁磁体显示磁性，超导体显示超导性，都使有序性增加. 冰、铁磁体、超导体等各种平衡态结构，最根本的特点就是可以用“解剖”、“分析”的方法发现的. 与此相反，非平衡态系统不断与外界进行物质和能量交换或新陈代谢. 它在一定条件下产生的结构称为非平衡态系统的自组织结构，简称自组织. 有的文献称之为耗散结构. 激光、流体的对流等，就属于非平衡态结构，它们与平衡态结构有迥然不同的性质和特点.

应该特别强调“活结构”即非平衡态结构的两个显著特点：第一，就是它们是不可能用解剖刀挖出来的；第二，它们的产生和消灭都需要一定的过程和时间. 例如，观察水的对流或漩涡，若用调羹取出一滴水，在调羹里

便看不到对流或漩涡了. 若把这滴水倒回去,这滴水又参加对流或漩涡了. 对于激光器,若拆出其一部分,不可能在这一部分中看到激光. 因此,"活结构"是非平衡态系统的宏观的整体性的反映,是不能解剖的. 然而,"活结构"的产生或消失,绝不可能不需要时间. 对流是这样,激光也是这样. 只有对激光器输入一定能量,才可能产生激光. 反之,该激光就从激光器中消失. 不论从无激光到有激光,或从有激光到无激光,突变也需要时间. 即使立刻破坏激光器的必要条件(停止输入能量),激光也不会"瞬时即逝",而是有一定弛豫时间. 这与生命现象何其相似! 作为当代科学前沿之一的耗散结构论、协同学、突变论以及 20 世纪 80 年代才发展起来的复杂性理论,都是专门研究非平衡态的自组织结构的. 正是这种理论,可望在无生命现象与生命现象的理论之间,架起空前未有的桥梁. "他山之石,可以攻玉",经络实质,似见端倪.

按照我们提出的经络的非平衡态自组织结构理论,人体是复杂的非平衡态系统. 经络的实质是人体的非平衡态自组织结构. 经络的物质基础是整个活的人体. 经络不是已知或未知的管状物质. 经络与肌肉、血管、体液、神经都有关,但既不是肌肉、血管,也不是体液、神经. 经络可以用多种方法显示出来,却不可能用解剖刀"挖"出来. 尸体和死亡的断肢上不存在经络. 断肢上的低电阻线可能只不过是弛豫效应. 由于经络是人体的整体属性,自然可解释断肢病人的幻肢现象. 由于非平衡态结构的相对稳定性和可变性,经络的分布和走向只是相对固定的. 西医手术,妙手回春,断肢再植只需接上骨骼、神经、血管、肌肉、皮肤,从不专门接上"经络通道". 手术成功,经络自行疏通. 因此,西医手术恰恰说明经络是非平衡态自组织结构. 此外,至少动物也有自组织特性的经络系统. 总之,经络是活的结构. 经络的非平衡态自组织结构理论也可简称经络的活结构理论.

有证据表明,经络的穴位可以产生辐射. 我们用第 12 章介绍的方法,全面研究了这种辐射信号的功率谱、相空间轨道、关联函数、关联维数和李雅普诺夫指数,得到关联维数 $D_2=1.2$,李雅普诺夫指数 $\lambda\geqslant 1.5$. 从而表明穴位辐射具有典型的混沌特性.

经络的穴位的分布,从功能来看,局部与整体有相似性. 由此表明,包括协同学在内的复杂系统论,为探索许多未知的复杂现象提供了可能性.

28.5 大脑压缩态与纠缠态

在 20 世纪 80 年代初,人们研究了激光与大脑的类比,曾提出大脑是

复杂、开放、有意识的自组织系统，意识的产生机理是大脑内的对称性破缺，继而联想到动物感觉器官有很高的灵敏度，于 1985 年率先预言了大脑压缩态. 现在，已经找到了大脑压缩态的初步迹象. 随着量子测量和纳米科技的发展，有可能设计和进行大脑压缩态的判定性实验. 不仅如此，在实验上实现量子纠缠态之后，有人又提出了大脑纠缠态设想，也许自从出现细胞、神经和大脑之后，它们可能就一直在产生和利用量子纠缠态、量子通信和量子计算.

大脑压缩态与纠缠态是激光理论、量子光学、信息科学、生物学及脑科学交叉的难题. 所谓压缩态是一种纯量子效应. 压缩态的最奇妙特性就是可以把噪声压缩到量子起伏以下，又不违背量子力学的测不准关系. 这已被实验证明，并可能用于引力波检测等. 本书讨论的问题是生物、神经和大脑有没有压缩态？它们能不能利用压缩态把噪声压缩到量子起伏以下，从而有超高灵敏度？此外，大脑功能的整体性和非局域性是不是与量子纠缠态及量子信息有关？

28.5.1 激光与大脑的类比

激光与大脑都是自组织系统. 迄今在理论和实践上均已证明，激光器有噪声态、二级相变、双稳态(一级相变)、全息、同步、相干态、自脉冲、混沌态、真空态、压缩态和纠缠态. 另一方面，有证据表明，大脑也有噪声态、二级相变、双稳态(一级相变)、同步、相干态、自脉冲、混沌态. 此外，为了解释大脑记忆的分布特性，有人提出脑全息假说. 后来，有人又提出大脑还可能有真空态、压缩态和纠缠态. 这样，激光与大脑可能有十种左右的态是相似的.

例如，视觉有明显的二级相变特性. 图 28.1 是中国明朝成化年间皇帝明宪宗朱见深的绘画《一团和气图》，又叫《和合二仙图》乍一看此图，不知何意，视觉或大脑处于无序状态. 仔细一看，一会儿像是一个眯眼嬉笑的人，一会儿又像是三个人抱成一团. 这两种感觉是对称的. 但是，视觉做出判断时，你只能取其一，便破坏了对称性，即对称性破缺. 类似的图像还有《人与花瓶》、《爱因斯坦与鼻子上的女人像》等. 图 28.2 表



图 28.1 明宪宗朱见深《一团和气图》

示激光器的对称性破缺. 激光器在阈值之下($\alpha<0$),光场 x 为零. 激光器在阈值之上($\alpha>0$),激光器处于下面曲线的某一极小值,光场 $x\neq 0$.

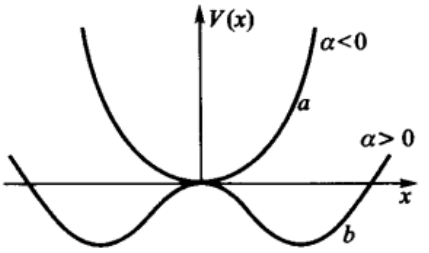


图 28.2 激光器的对称性破缺

视觉的双稳态也是众所周知的. 至于大脑的分布记忆,自从实现激光全息不久便有人提出脑全息假说. 此后,Pribram 提出大脑全息模型,对脑全息进行了长期、系统的研究. 但是,由于该理论模型在数学上的困难,没能解释更多的问题.

1992 年,德国的 Singer 发现了神经同步振荡现象,被认为是神经科学实验的重大成果.

德国的 Basar 等最早提出大脑相干态的概念. 若给猫一个刺激,迅速测其脑电,发现脑电信号很强,然后衰减. 他们认为,这是神经振荡的相干结构. Bressler 用脑电实验详细研究了大脑皮层的动态自组织特性,特别是脑电的时间相干性和空间相干性. 但大脑相干态与激光的相干态的严格定义与具体特征还不完全一样.

另外,自从混沌理论开始发展,人们从实验上大量研究了脑电的混沌特性,并实现了大脑的混沌控制. 但所谓大脑混沌控制,实际上只是进行了对一个神经元的混沌控制实验. 另一方面,发现癫痫病人的脑电具有周期性脉冲的特性. Freeman 研究了嗅觉系统的混沌.

1985 年,我们考虑到,一方面大脑与激光有如此多的相似,另一方面,动物的感觉器官有很高的灵敏度,于是便提出了大脑压缩态假说. 后来,又考虑到大脑功能的非局域性,进而猜想大脑有纠缠态.

28.5.2 大脑压缩态假说

大家知道,一些昆虫、动物的感觉器官有很高的灵敏度. 它们有很强的搜索、追踪、定向、返巢、求偶、觅食等能力. 例如,人们用猎狗搜寻猎物,用警犬检查毒品及爆炸物;猫、狗的听觉、视觉也很灵敏;骆驼有很强的寻水能力;鸽子等鸟类可利用星光或地磁场定向;蝙蝠有灵敏的听觉;蜜蜂有很强的寻花、归巢能力. 有些水生动物的感觉器官也很灵敏. 人们还发现,有些动物对地震前的反应十分敏感. 此外,人眼可以检测几个光子. 有的动物可能检测到 1 个光子. 这些现象发人深省. 它(他)们的感觉灵敏度

为什么可以很高？其信噪比有多大？能否突破量子起伏极限？如果它(他)们的感觉器官的灵敏度达到甚至超过量子起伏极限，又可能是什么机理？

噪声问题，显然也是信息技术中的根本问题. 要想提高信噪比，就必须尽力减小噪声. 然而，即使把探测器冷却到绝对零度(热力学第三定律不允许达到绝对零度)，还有量子起伏噪声. 一般认为，用任何经典理论和经典技术，尽管可以减少震动噪声、热噪声等，却不可能突破量子起伏极限. 量子起伏的根源是测不准关系. 量子起伏产生的机理是真空涨落. 长期以来，人们认为真空涨落就是噪声的“理论极限”，是永远“不可超越”的. 一旦超越这个极限，便“违背”量子力学的测不准关系.

然而，科学与技术的发展过程，就是不断探索和突破极限的过程. 在激光出现之后，人们先从理论上研究了突破量子起伏极限的可能性，进而于 1985 年被实验证实. 这就是奇妙的光学压缩态. 压缩态是纯量子效应，没有经典类比. 利用压缩态，可以把噪声压缩到量子起伏以下.

压缩态的奥妙在于，人们可以把一个待测的物理量(例如激光的光场)分解为两个正交分量，使一个正交分量的测不准量特别小，低于量子起伏的要求，同时使另一个正交分量的测不准量又相当大. 但是，两个正交分量的测不准量的乘积，仍满足测不准关系. 这样，既可以把噪声压缩到量子起伏极限以下，又不违背测不准原理. 这好像人们对感兴趣的信息明察秋毫，而对不感兴趣的信息视而不见、听而不闻.

除了压缩态以外，至今没有任何理论和技术可能把噪声压缩到量子起伏以下. 反之，任何把噪声压缩到量子起伏以下的概念，都属于压缩态. 这就是说，如果人或动物的感觉器官能把噪声压缩到量子起伏以下从而有超高灵敏度，那就说明人或动物感觉系统有压缩态. 此外，再也不可能找到任何解释. 再考虑到激光与大脑的类比，似乎别无选择. 这是人们当初提出大脑压缩态的基本思路.

28.5.3 大脑压缩态的初步证据

如果大脑压缩态假说得到实验验证，将是人们发现的生物界第一个纯量子效应. 那么，有没有生物、神经和大脑压缩态的实验证据呢？玻耳(N. Bohr)早就注意到，一些感觉器官的灵敏度已达量子水平.

表 28.1 一些动物听觉阈值与量子起伏极限的比较

动物	阈值定义	测得的听觉阈值	实验者	量子起伏极限
猫	行为响应	4×10^{-12} m	S. M. Khanna, 1982	1.5×10^{-11} m 或 10^{-18} W
	行为响应	6×10^{-19} W	S. M. Khanna, 1981	
蝙蝠	行为响应	10^{-18} W	A. D. Grinnell, 1977	
	行为响应		E. A. G. Shaw, 1979	
青蛙	神经响应	10^{-11} m	E. R. Lewis, 1981	
蜥蜴	神经响应	$<4\times10^{-11}$ m	W. T. Peake, 1980	

表 28.1 列出了一些动物的听觉灵敏度的实测数值. 动物听觉的量子起伏的极限值是 1.5×10^{-11} m 的振动或 10^{-18} W 的功率. 而猫、蝙蝠、蜥蜴和青蛙的听觉灵敏度，都已达到甚至突破量子起伏极限. 这就是生物、神经与大脑压缩态的初步证据. 另一方面，由于压缩态是唯一可以把噪声压缩到量子起伏以下的理论和技术，因此，压缩态是解释动物感觉器官灵敏度的唯一可能的机理.

表 28.1 的数据仅仅是生物、神经、大脑压缩态的迹象，还不能由此得出最后结论. 现在的任务是，一方面收集更多、更新的实验数据，一方面进一步提高实验精度. 为此，需要特别注意新技术的发展动向：(1)稳频激光器的稳定度已达 10^{-14} 以上，原则上可用于测量 10^{-11} m 的位移或振动. (2)超导量子干涉仪及纳米传感器能否用于测量 10^{-18} W 的辐射？(3)量子测量技术，包括光学压缩态技术的发展，可能是检验大脑压缩态的理想技术. (4)单光子计数技术，可能用于检验视觉系统的粒子数压缩态. (5)非平衡态生物光子的统计特性的研究与测量，有可能用于检测生物、神经、大脑的纯量子效应及压缩态.

此外，测量引力波的技术，也可供大脑压缩态实验借鉴. 我们不妨与引力波的测量做一对比. 检验生物、神经和大脑压缩态的测量精度为 10^{-11} m 或 10^{-18} W，而测量引力波的技术必须达到 10^{-22} m 的精度. 在 20 世纪 80 年代，中山大学研制成室温天线，用探测器可分辨出 1 m 长的铝棒所产生的 10^{-17} m 的长度变化. 90 年代，意大利和美国研制的超低温(10^{-2} K)天线，灵敏度可能达到 10^{-21} m 的水平. 问题在于，需要考虑怎样把测引力波的技术用于测量动物感觉器官的灵敏度极限.

中国科学院生物物理所张锦珠与德国科学家 Popp F. A. 合作，于 2002 年用实验证明了生物光子在光学压缩态的特性. 这对生物与大脑压

缩态假设是一个有力的支持.

28.5.4 大脑压缩态的理论探索

假设生物系统、神经系统或大脑中,直接参与功能活动的激发粒子或准粒子(元激发)是玻色子,其产生算符和消灭算符分别是 a^+ 和 a^-. 定义

$$X=\frac{1}{2}(a+a^+),\quad Y=\frac{1}{2\mathrm{i}}(a-a^+) \tag{28.30}$$

由玻色子对易关系 $[a,a^+]=1$,可知

$$[X,Y]=\frac{\mathrm{i}}{2} \tag{28.31}$$

由量子力学已知,若算符满足对易关系

$$[A,B]=C \tag{28.32}$$

则海森堡测不准关系是

$$\langle(\Delta A)^2(\Delta B)^2\rangle\geqslant\frac{1}{4}|C|^2 \tag{28.33}$$

由(28.31)、(28.33)可得出

$$\langle(\Delta X)^2\ (\Delta Y)^2\rangle>\frac{1}{4} \tag{28.34}$$

与真空量子起伏对应的测不准关系是

$$(\Delta X)^2=(\Delta Y)^2=\frac{1}{4} \tag{28.35}$$

由(28.34)式可知,在理论上可以有

$$(\Delta X)^2<\frac{1}{4}\text{及}(\Delta Y)^2>\frac{1}{4} \tag{28.36}$$

或

$$(\Delta Y)^2<\frac{1}{4}\text{及}(\Delta X)^2>\frac{1}{4}$$

因此,可以使对 X 的测量突破量子起伏极限,同时付出的代价是对 Y 的测量必须有更大的测不准量. 反之亦可. 这是有所得有所失,有所为有所不为.

现在,问题的关键变成生物系统、神经系统、大脑中,起决定作用的粒子或准粒子(元激发)是不是玻色子,以及通过什么具体机制产生压缩态. 目前,不同的文献,都一致认为生物、神经、大脑中激发的粒子是玻色子,但有以下几种不同的说法:

(1) 量子脑动力学学派认为,在大脑中,蛋白质中的非局域电子的集体偶极振荡用泡利矩阵描述,而蛋白质周围的准晶态的水分子的偶极声子服从玻色统计. 后者(偶极声子)简称"交换玻色子"."交换玻色子"以长

程关联波的形式在脑神经元内外产生和传播，实现量子信息传输. 他们甚至认为中医理论中的“气”也是这种“交换玻色子”.

(2) 有些外国学者认为，大脑功能和意识的基础是细胞骨架即微管(microtubules)中的生物光子发射. 微管是纳米生物结构，其直径约几个nm，长度为几百 μm，几个 mm，甚至更长. 他们认为微管是非线性的，有自组织特性，甚至设想纳米微管不但能产生相干光子，而且光子可以由自感透明的机理，在微管中以孤立子形式传播.

(3) 还有人认为大脑中的玻色子对应蛋白质分子构形的变化.

当然，即使大脑中有玻色子，它们通过什么样的非线性过程产生大脑压缩态，也还需进一步探索.

28.6 大脑纠缠态

人们在研究了压缩态之后，近年又特别重视纠缠态的研究. 备受关注的量子通信和量子计算便是以纠缠态为基础或利用纠缠态的. 压缩态也已经用于产生量子纠缠态和进行量子通信实验.

利用纠缠态进行量子通信，可以把量子态在瞬间传到任意远的地方，而不需要把光子或其他粒子传到远处. 但真正传递信息，还需经典的信息通道的“帮助”，后者是不能超光速的. 用纠缠态进行量子计算，则是量子计算机的基础. 目前在实验上已经演示成功量子通信与量子计算.

为什么说大脑也可能有纠缠态呢？这是因为，大脑功能具有整体性、非局域性. 另外，人的大脑的想像力、联想能力以及把空间任意两点关联起来的能力，也与纠缠态在形式上相似. 大脑功能是全球化的. 在大脑工作时，不是一个个神经元各自为政，而是在相当大的范围互相关联，大量神经元构成一个整体，协调一致地工作. 这涉及神经科学与脑科学中最著名的问题，好像大量神经元被捆绑在一起而协调工作，即 binding 问题，至今还未解决. 为了解释大脑功能的整体性和非局域性，目前提出的几种有代表性的理论有：① 脑全息. 全息的基本特性就是一个全息片的任何一个局部都包含整体的信息. Pribram 猜想大脑中有类似的“全息板”. ② 神经元的同步. Shuster 等研究了有耦合的振子的同步，借以说明 binding 问题. 我们则证明了，两个无连接、无耦合的神经元，即使有很远的距离，它们在相同刺激和相同噪声作用下，也可以自动地实现混沌同步振荡. ③ 神经元之间的细胞通信，包括猜想细胞间有超导结. 我们从循经感传现象(神经分布是横向的，而针灸引起的感觉却是纵向的)，也提出了

神经元之间的超导结猜想. 超导结即约瑟夫森结. 关于约瑟夫森结的研究已获诺贝尔奖. 还有人认为细胞间有量子信号传输. ④ 意识与玻色-爱因斯坦凝聚假说,认为主导脑功能的玻色子发生玻色-爱因斯坦凝聚,即所有这些玻色子都处于同一个量子态,它们完全是一个整体,有非局域性. 这是宏观量子现象. 物理学中的玻色-爱因斯坦凝聚研究已获 2001 年诺贝尔奖. 但是,大脑中的玻色-爱因斯坦凝聚假说还不能说明大脑的信息输入、输出和存储等问题. ⑤ 大脑纠缠态,即大脑产生和利用量子力学叠加态.

关于大脑纠缠态的理论研究,有两项工作特别引人瞩目. 第一是 Frohlich 的理论文章,即生物系统在室温下可能产生大尺度的纠缠态. 生物系统一般处于室温,这就要求生物纠缠态应在室温下产生并保持一定时间的相干性. 另外,只有大尺度的纠缠态,才能解释大范围的非局域性、整体性. 这还需要实验的检验. 第二是彭罗斯的《大脑的影子》和《宇宙、量子、人脑》. 彭罗斯是著名数学家与理论物理学家,曾与霍金合作研究黑洞. 彭罗斯认为,大脑纠缠态的产生有几个阶段或层次:一种微管的纠缠态;单个神经的微管处于纠缠态;大量神经的纠缠态. 他认为,"只有存在某种形式的扩展到整个大脑的适当部分的量子同调(即相当于纠缠态)时,才能出现一个大脑的统一性". 由于学科间的界限,许多激光与量子信息专家并不知道他的工作.

在此需要说明,孪生子及亲友间的感情关联的假说,在形式上与纠缠态有相似之处,这无疑是既有挑战性又有人情味的问题. 但假说不能代替科学. "孪生子纠缠态"、"亲友纠缠态"或类似想法的支持者,必须拿出确凿的科学实验证据,排除偶然巧合与牵强附会的因素. 同时,还必须从理论和实验上说明,用什么方法(量子编码或其他防止"消相干"的方法)能把纠缠态保持或更新达数十年之久. 目前,我们还找不到什么方法对"孪生子纠缠态"等进行检验与证伪. 无论如何,量子通信与量子计算也需要尽可能长时间地保持宏观尺度的纠缠态. 必须在此方向上取得突破.

28.7 大脑量子信息研究展望

大脑可能既有逻辑思维又有非逻辑思维,既有线性现象又有非线性现象,既有可计算性又有非计算性,既有经典现象又有纯量子现象.

大脑的量子效应是人们关注的重要问题. 生物、神经、大脑的压缩态

是可能的. 利用压缩态可以把噪声压缩到量子起伏以下，从而有超高灵敏度. 若干动物的听觉阈值(极限)的实验研究，为生物、神经、大脑压缩态提供了初步证据. 但这还不是确凿的检验性实验结果，还不能下肯定的结论. 但是，利用高新技术和检测手段，特别是量子测量技术，有可能设计出更好的实验，更精确地测量动物感觉系统的阈值. 这是一个现实的突破口. 至少比测引力波更容易. 我们应该争取在中国完成大脑压缩态的实验检验. 这将是激光、量子光学与信息学、生物学、脑科学大交叉的一项突破.

需要特别指出，如果说大脑压缩态已有若干直接的实验证据的话，那么至今猜想的大脑纠缠态连间接的实验证据也没有，甚至不知怎样设计大脑纠缠态的检验实验. 但是，在激光与量子光学中，用压缩态已经可以产生纠缠态，并且用压缩态也已实现量子通信实验. 这说明，一旦大脑压缩态被确凿的实验结果证实，那就为检验大脑纠缠态猜想带来了一定的希望. 但是，大脑能否以及如何制备、保持和利用大尺度的量子纠缠态，仍是未解决的问题.

总之，大脑压缩态与大脑纠缠态的研究需要新理论、新技术. 反之，如果大脑压缩态、大脑纠缠态的研究能取得突破，则可能影响到未来的科学与技术.

我们猜想，自从在生物进化中出现细胞、神经和大脑之后，它们可能就一直在产生和利用量子纠缠态、量子通信与量子计算. 彭罗斯提出了一个假设，“量子计算是由神经系统完成的”. 21 世纪的生物神经计算机应是量子计算机，未来的量子计算机也应利用生物、神经和大脑的量子纠缠态. 也许，大脑利用量子通信或大脑是量子计算机不完全是神话.

参 考 文 献

[1] Haken H. Synergetics—An introduction. 3rd ed. Berlin: Springer, 1983.

[2] Haken H, Graham R. Synergetik die lehre vom zusammenwirken. Umschau, 1971, 6: 191 - 197.

[3] Haken H. The science of structure, synergetics. New York: Van Nostrand Reinhold, 1984.

[4] Li F L. Functional structure model of human body and Yinyang-Wuxing equations. Physica Scripta, 1987, 36: 966 - 969.

[5] Pribram K H. The implicate brain. In: Hiley E B J, Peat F D. Quantum Implications. London: Routl edge & Kagan Paul, 1987. 365 - 371.

[6] Frohlivh. Coherent excitations in active biological systems. In: Gutmann F, Keyzer H. Modern biological chemistry. New York: Plennm Press, 1986. 241 - 261.

[7] 李福利. 协同学与中医学. 中国医药学报, 1988, 3(4), 32 - 34.

附录　与激光有关的诺贝尔奖

获奖时间	获奖者	主要贡献
1964年诺贝尔物理学奖——**微波激射器和激光器的发明**	 汤斯　　 普罗霍罗夫　　巴索夫	1964年诺贝尔物理学奖一半授予美国麻省理工学院的汤斯(Charles H. Townes,1915—　);另一半授予前苏联莫斯科苏联科学院列别捷夫物理研究所的巴索夫(Nikolai G. Basov,1922—2001)和普罗霍罗夫(A. M. Prokhorow,1916—2002),以表彰他们发明微波激射器和激光器并从事量子电子学方面的基础工作。
1966年诺贝尔物理学奖——**光磁共振方法**	 卡斯特勒	1966年诺贝尔物理学奖授予法国巴黎大学高等师范学校的卡斯特勒(Alfred Kastler,1902—1984),以表彰他发现和发展了研究原子中光磁共振的双共振方法。

续表

获奖时间	获　奖　者	主　要　贡　献
1971年诺贝尔物理学奖——**全息术的发明**	 伽博	1971年诺贝尔物理学奖授予英国伦敦帝国科技学院的匈牙利裔物理学家伽博(Dennis Gabor,1900—1979),以表彰他发明和发展了全息术。
1981年诺贝尔物理学奖——**激光光谱学与电子能谱学**	 布隆姆贝根　 肖洛　 凯·西格班	1981年诺贝尔物理学奖的一半授予美国哈佛大学的布隆姆贝根(Nicolaas Bloembergen,1920—　)和美国斯坦福大学的肖洛(Arthur L. Schawlow,1921—1999),以表彰他们在发展激光光谱学所作的贡献;另一半授予瑞典乌普沙拉(Uppsala)大学的凯·西格班(Kai M. Siegbahn,1918—　),以表彰他在高分辨率电子能谱学所作的贡献。
1986年诺贝尔化学奖——**电子显微镜与扫描隧道显微镜**	 赫希巴赫　 李远哲　 波利亚尼	赫希巴赫主要从事微观反应动力学的研究并和他的学生李远哲共同研究和发展了交叉分子束方法,为化学动力学研究开辟了新的领域。波利亚尼研究了许多原子交换反应的动态学,为研制化学激光器奠定了理论基础。他们三人共获1986年诺贝尔化学奖。

续表

获奖时间	获奖者	主要贡献
1989年诺贝尔物理学奖——**原子钟和离子捕集技术**	 拉姆齐  德默尔特  保罗	1989年诺贝尔物理学奖的一半授予美国哈佛大学的拉姆齐(Norman F. Ramsey),以表彰他发明了分离振荡场方法及用于氢微波激射器及其在原子钟中的应用;另一半授予美国华盛顿大学的德默尔特(Hans G. Dehmelt)与德国波恩大学的保罗(Wolfgang Paul),以表彰他们发展了离子捕集技术。他们都是在原子物理技术方面作出过杰出贡献的物理学家,他们创造性地发展了精确的计量方法,使许多以前无法进行的实验得以实现,并达到前所未有的精确程度。
1997年诺贝尔物理学奖——**激光冷却和陷俘原子**	 朱棣文  科恩·塔诺季  菲利普斯	1997年诺贝尔物理学奖授予美国斯坦福大学的朱棣文(Stephen Chu),法国巴黎的法兰西学院和高等师范学院的科恩·塔诺季(Claude Cohen Tannoudji)和美国国家标准技术学院的菲利普斯(William D. Phillips)以表彰他们在发展用激光冷却和陷俘原子的方法方面所做的贡献。
1999年诺贝尔物理学奖——**电弱相互作用的量子结构**	 胡弗特  韦尔特曼	1999年诺贝尔物理学奖授予两位荷兰科学家杰拉尔杜斯·胡弗特和马丁努斯·韦尔特曼,以表彰他们在理论上解释了亚原子粒子之间电弱相互作用的量子结构。他们1971年的文章中成功地严格证明电弱统一理论是可以经过"重整化"而消除其中所有的"无穷大"的,从而证明弱相互作用也能和电磁相互作用一样地进行精确计算,也可以接受实验的精确检验。

续表

获奖时间	获奖者			主要贡献
2000年诺贝尔物理学奖——**信息技术方面的基础性工作**	 阿尔弗罗夫	 基尔比	 克勒默	2000年诺贝尔物理学奖授予俄罗斯圣彼得堡约飞物理技术学院的泽罗斯·阿尔弗罗夫(Zhores I. Alferov)、美国加州大学的赫伯特·克勒默(Herbert Kroemer)和德州仪器公司的杰克·S. 基尔比(Jack S. Kilby)以表彰他们在移动电话及半导体研究中获得突破性进展。他们的工作奠定了现代信息技术的基础,特别是他们发明的快速晶体管、激光二极管和集成电路(芯片),奠定了现代信息技术的基础。
2001年诺贝尔物理学奖——**玻色-爱因斯坦凝聚**	 康奈尔	 克特勒	 维曼	2001年诺贝尔物理学奖由3位美国物理学家共享。获得者为美国科罗拉多大学的埃里克·康奈尔(Eric A. Cornell)、美国麻省理工学院的沃尔夫冈·克特勒(Wolfgang Ketterle)和美国科罗拉多大学的卡尔·维曼(Carl E. Wieman)教授,他们的主要研究工作为原子物理领域中的"稀薄碱性原子气体的玻色-爱因斯坦冷凝态的研究"和"对冷凝物的早期基础研究工作"。
2005年诺贝尔物理学奖——**量子光学**	 霍尔	 亨施	 罗伊·格劳伯	2005年诺贝尔物理学奖的一半授予美国量子光学家罗伊·格劳伯,以表彰他对光学相干的量子理论做出的贡献;另一半则颁发给美国量子激光学家约翰·霍尔和德国量子光学家特奥多尔·亨施,以表彰他们对基于激光的精密光谱学发展做出的贡献。

索　引

A

A 类激光器　67
爱因斯坦自发辐射系数　71
暗孤立子　160

B

Bell 基　451
Bell 态的测量　443
B 类激光器　67
半导体光学双稳态　180
半经典激光方程　62
半经典激光理论　28
饱和参数　23
饱和光强　45
倍频　334
倍频的量子理论　334
倍周期分岔　194
本征压缩　392
玻耳兹曼方程　415
玻色分布　3
玻色增强因子　472
泊松分布　4,244,360
薄样品近似　112
不动点　196
布洛赫矢量　42,119

C

C-Not 门　441
C 类激光器　68
参量下转换　447
参量振荡　336
测不准关系　248
产生算符　228
场方程　48,62,85
超泊松分布　360
超辐射　345
超荧光　345
超荧光的半经典理论　349
纯色散型双稳态　172
纯吸收双稳态　172
纯系综　32
重建吸引子　206
磁摆动器　400

D

大脑纠缠态　547
单摆方程　407
单电子理论　413
单模电磁场的量子化　226
单模激光的朗之万方程　326
单模激光器　89
单模气体激光器　108
等离子体色散函数　107
点缺陷　491
电导率　48
电光采样　522
电偶极近似　29
电偶极矩　33
电偶极跃迁矩阵元　71
电子的聚束　403
叠加态　427
定态反转粒子数　19
对称性破缺　23

多模场的量子化 232
多模激光器 93
多模振荡 25
多普勒冷却 464
多普勒线宽 10

E

EPR 427
EPR 对 428
二次量子化 268
二级相变类比 537
二级相干函数 257
二阶孤立子 149
二阶关联函数 3,372
二量子比特 426
二能级近似 28

F

Fano 因子 360
翻转操作 436
反常色散 142
反聚束 357
反转粒子数 9,16
反转粒子数速率方程 26
放大系数 2
非简并参量振荡器 338
非简并四波混频 186,339
非局域性 428
非均匀加宽 9
非线性光学 333
非线性薛定谔方程 145
非线性折射率 165
费米子算符 270
分布函数 178
分数维数 204
分形 201
分形几何学 202
符合计数 447
辐射场的起伏与耗散 319
辐射偶极力 463
辐射压力 463
福克-普朗克方程 305,315
负频 33
负色散 142
负温度态 7
复杂系统 194

G

高阶孤立子 149
高阶色散 151
高阶压缩态 377
高斯线型 10,101
共焦腔 13
共振荧光 362
共振荧光谱 368
孤立波 125
孤立子 125
孤立子的相互作用 156
孤立子放大器 152
孤立子激光器 157
关联函数 2
关联维数 205
光场的复数形式 2
光场的空间分布 58
光场增益 46
光导激发 521
光导天线法 522
光脉冲的面积 112
光强增益 46
光纤中孤立子 141
光学布洛赫方程 37,39,48
光学参量放大 335
光学双稳态 164
光学双稳态的混沌 220
光学双稳态方程 169
光学压缩态 361,373,392

光学粘胶　464
光学粘团　465
光学章动　116
光整流效应　521
光子带隙效应　494
光子对　429
光子分布函数　389
光子回声　118
光子简并度　2
光子禁带　489
光子晶体　488
光子局域　491
光子数的起伏　297
光子数方程　20
光子数态　229
广义压缩态　377
过阻尼　77

H

H门　441
哈肯-洛伦兹模型　210
海森堡方程　229
豪斯道夫维数　201
合作参数　171
横模　12
横向弛豫参数　39
横向弛豫时间　111
横向弛豫速率　52,63,347
红宝石激光器　7
宏观极化强度　87
蝴蝶效应　194
混沌　193
混沌实验　214
混合系综　35

J

Jaynes－Cummings 模型　38
基阶孤立子　149
基模　13
激光的线宽　300
激光器　1
激光器的起始振荡　299
激光器的全量子理论　281
激光器的阈值　15
激光器的阈值条件　71
极化率　45
极化强度　45
极限环　196
简并参量振荡器　337
简并度　7
简并四波混频　186,339
解相　38
解相时间　111,120,347
净增益　23
纠缠态　426
聚束　357
绝热近似　22,30,75
均方差　377
均匀加宽　9
开式腔　11
康托尔集　202
科赫曲线　203
空间烧孔效应　88
控制参数　17

L

拉比频率　42
拉比问题的解　275
拉比振荡　113
拉曼增益　155
拉姆凹陷　102,104
拉姆的场方程　86
拉姆理论　85
朗之万方程　313
李雅普诺夫指数　194,198
粒子数反转　7

量子保密通信 459
量子比特 425
量子编码 429
量子非门 444
量子关联 429
量子化的相干函数 256
量子化朗之万方程 323
量子回归定理 370
量子计算 430
量子计算机 430
量子纠错 439
量子逻辑门 434,441
量子算法 432,437
量子态 425
量子态的不可克隆原理 432
量子态的叠加 430
量子态远程传输 450
量子网络 442
量子信息 425
临界点 16
临界反转粒子数 15
临界慢化 175
零点能量 230
螺旋形磁摆动器 410
洛伦兹方程 196
洛伦兹线型 10

M

Madey 定理 413
Mandel 因子 380
M-B 方程 47
麦克斯韦-布洛赫方程 47
麦克斯韦定则 179
麦克斯韦方程组 47
慢变振幅近似 30,39
密度矩阵 32
密度矩阵的狄拉克形式 34
密度矩阵的运动方程 34
密度算符 252
密度算符的相干态表示 253
面积定理 127,129
模密度 6

N

NLS 145,146
NOT 门 434
n 级相干函数 258

O

偶极矩算符 264
偶极算符 63
耦合常数 62

P

泡利算符 262
偏振叠加态 450
频率牵引 92
频率牵引效应 90
频率推移 92
平均场近似 89,354
平均光子数的方程 288
平面磁摆动器 410
普朗克方程 178
谱线半宽度 39

Q

Q 值 12
奇异吸引子 195
起伏耗散定理 315
起伏力的关联 321
超荧光的全量子 M-B 方程理论 351
起振条件 1
腔的寿命 12,15
强迫振荡 40
强信号理论的光子统计 295
权重函数 255

全量子化的麦克斯韦-布洛赫方程　273
全内反射　493
群速　475

R

Ricci 张量　419

S

Shor 算法　437
SIT　126
三阶极化理论　91
三位条件非门　436
色散　141
色散参数　143
上升算符　263
烧孔效应　102
实时全息　186
矢量势的量子化　232
势函数　23
受激辐射　5
受激辐射几率　279
受激辐射截面　9
受激辐射速率　9
双光子激光器　340
双光子激光器的全量子化方程　342
双光子相干态　385
双光子压缩态　380
双模激光器　96
双曲方程　146
双曲正割脉冲　135
瞬态特性　22
瞬态相干作用　111
斯宾斯基图　203
四波混频　186
伺服原理　75
速率方程　19
损耗　12
锁模激光器　80

T

Toffoli 门　436
汤斯阈值公式　15
调 Q 激光器　23
同步辐射　404

W

位相复共轭　183
位相复共轭反射率　190
位相算符　233
位相态　240
位移算符　242
物质方程　62

X

吸引子　196
细致平衡　294
下降算符　264
线缺陷　491
线性叠加　430
相变类比　174
相对介电常数　45
相干激发　112
相干态　242
相干态展开　251
相干作用　111
相互作用哈密顿量　262
相速度　475
相位匹配　334
相移　444
相移操作　436
消灭算符　228
消相干　439
小信号共振吸收系数　45
小信号增益　21,408
协同学　75
谐振腔　11

谐振腔的失谐参数 65
信息熵 539
信息维数 204
行波场的量子化 232
行波激光方程 64
序参量 537
序参数 17,21
旋转波近似 29,39
旋转操作 436
旋转坐标系 274
薛定谔猫 426

Y

压缩态的检测 397
压缩态光场的位相 390
压缩相干态 376
亚泊松分布 360
亚泊松因子 388
幺正变换 433
一级相干度 245
一级相干函数 256
有延迟的光学双稳态 222
有质动力势 403
阈值 14
阈值附近的光子统计 293
原子的失谐参数 66
原子激光器 470
原子阱 471
原子云团 471
远离平衡态的系统 7
远离平衡态的相变 15
约化算符 282
约化算符的运动方程 286
跃迁速率 83

Z

Z门 444
增益 9
增益饱和 20
啁啾 144
折射率 45
阵发混沌 199
真空表象 364
真空磁导率 48
真空介电常数 48
真空起伏 373
真空态 229
真空效应 366
正常色散 142
正反馈系数 2
正规乘积 379
正交分量 379
正频 33
正色散 142
正弦-戈登方程 140
驻波条件 11
锥形磁摆动器 416
准光子本征态 380
准几率 360
自发辐射 5
自发辐射几率 278
自感透明 126
自关联函数 3
自激条件 14
自位相调制 143
自相似性 201
自由电子激光的压缩态 422
自由电子激光器 400
自由电子激光器的全量子理论 418
自由能 537
自由衰减 121
自组织 16,536
纵模 12
纵向弛豫时间 111
纵向弛豫速率 51,63
$\pi/2$ 脉冲 118
π 脉冲 118
2π 脉冲 133